Matematika

Függvények - egyenletek

Munkatankönyv

v1.0

Szent Margit Gimnázium

szmg.hu
2020/2021

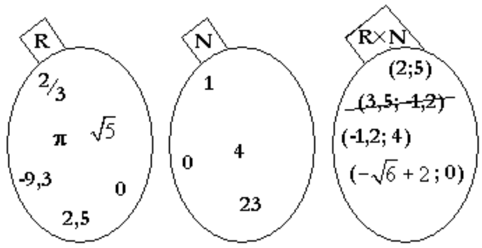
Függvények és Egyenletek: A
a függvények általában és a lineáris fv.

I. Halmazok

II. Függvények: **KM 8. oszt. 129.o-tól**

II/1) Rendezett párok, rendezett párokból álló halmazok

Vannak olyan halmazok, amelyeknek elemei számpárok.
Ilyen számpárok: (1;–3) (5;11) (–5;0) ill.: (4 ; 1,3) (0; $1\frac{1}{3}$) (–2; $\sqrt{3}$ +1)
Az első három olyan típusúak közé tartozik, mely számpárok mindkét tagja egész.
A második három olyan típusúak közé sorolható, amely rendezett számpárok első tagja egész, a második valós.



Rendezett számpár tehát: számpár, de nem mindegy, melyik az első és melyik a második: (2;–7)$\neq$ (–7;2)
Ha halmaz lenne, egyenlők lennének:

{2;–7}={–7;2}, mert ott a sorrend nem számít!

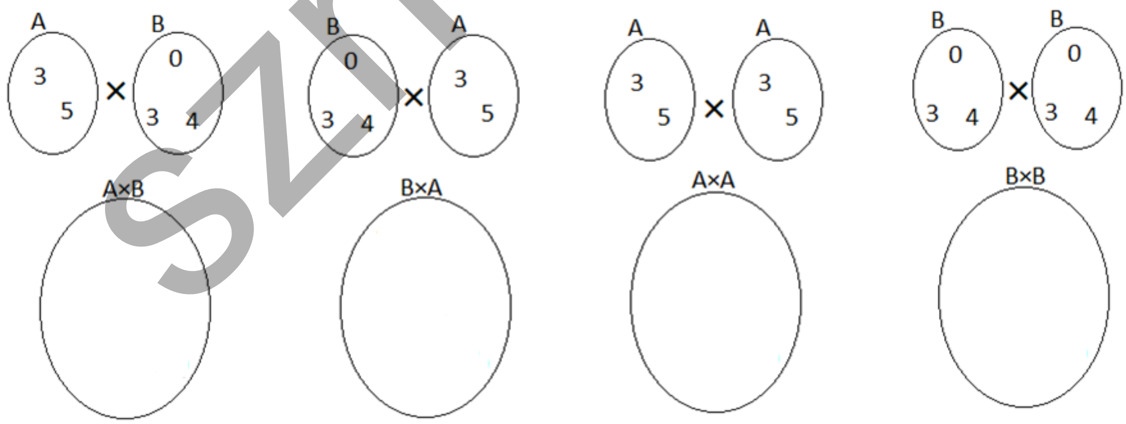
(a;b)$\in$ **Z**×**Z**, vagy (x;y)$\in$ **Z**×**R**

A másodiknál látható, hogy: a rendezett pár első tagját az egész számok közül lehet szedni, a második tagot pedig a valósak közül.

A és B halmaz Descartes szorzata: (x;y)$\in$ A×B $\Leftrightarrow$ x$\in$ A és y$\in$ B.

A×B= az a halmaz, melynek azok és csak azok a rendezett párok az elemei, melynek első tagja az A-ból van, a második tagja a B-ből.

A={3



A={–1; 0; 2; 3} B={–1; 3; 5; 7; 9}. A Descartes szorzatok: A×A; B×B, A×B és a B×A

Minek (akár többnek) eleme a következő rendezett pár:

(3;5)$\in$ (7;0) $\in$

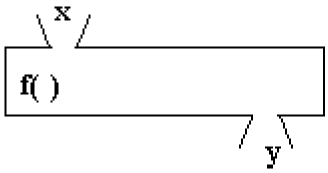
(0;0) $\in$ (2;3) $\in$

(–1; –1) $\in$

Hány eleme van az A×A; B×B, A×B és a B×A halmazoknak.

II/2) Definíció a függvényekre

a) Szemléletes kép: gép.



Pl: Bolt, áru, pénztárgép a gép:

„Áru és ár a boltban”

Ha „jó” a bolt, akkor nem lehet olyan, hogy ugyanazért valaki egyszer ennyit, máskor mást fizet…

„Autóhoz tulajdonos”: Függvény

„Tulajdonoshoz autó”: Nem függvény (egy embernek lehet több autója)

b) Def.: Ha egy H halmaz (minden egyes)/néhány eleméhez egyértelműen hozzárendelem a K halmaz egy-egy elemét, akkor ezt a hozzárendelést függvénynek nevezem.

Független változó: az alaphalmaz elemei

Függő változó: az alaphalmaz egy-egy eleméhez hozzárendelt képhalmazbeli elem.

c) Néhány példa – melyik függvény, melyik nem?

n természetes szám $\mapsto$ 2^n utolsó számjegye

anya $\mapsto$ gyerekei

egész szám $\mapsto$ osztóinak a száma

szám $\mapsto$ egészrésze

egész szám $\mapsto$ osztói

természetes szám $\mapsto$ aminek a négyzete

gyerek $\mapsto$ tanárai

szám $\mapsto$ háromszorosa

szám $\mapsto$ abszolút értéke

szám $\mapsto$ aminek az abszolút

szám $\mapsto$ nála kisebb természetes számok

egész szám $\mapsto$ osztóinak a halmaza

gyerek $\mapsto$ szülő anyja

szám $\mapsto$ az ötszörösénél kettővel kisebb szám négyzete

élő ember $\mapsto$ hátralévő éveinek száma

Az üdítő-automata fv-ként viselkedik, vagy sem?

d) Bevezető példa

f( ): **N**→**Q**; x ↦ $\frac{x}{2} - 3$

Argumentum - független változó: Az értelmezési tartomány elemei.

D_f: 0;1;2;3;…

Függvényérték: az értékkészlet elemei.

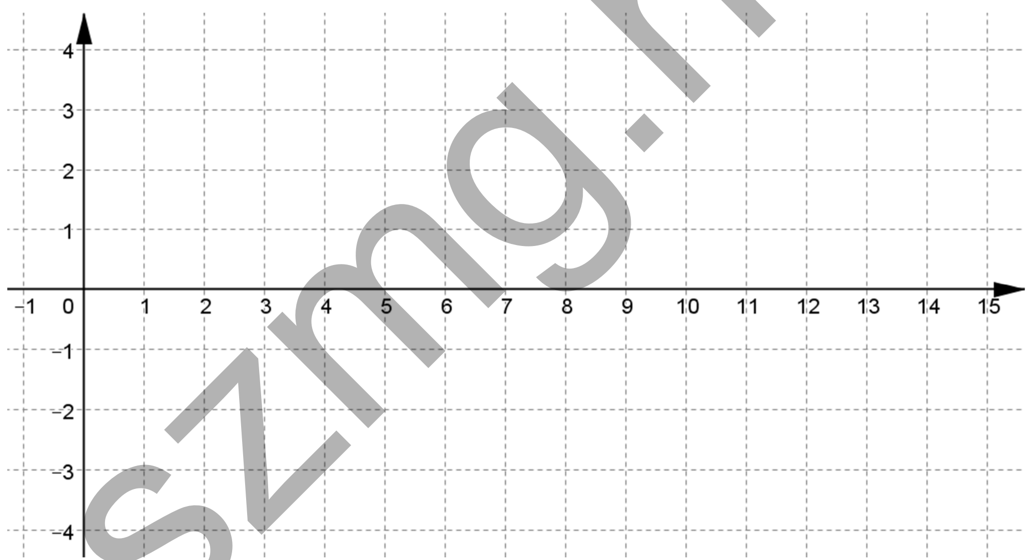
R_f: –3; –2,5; –2; …

f(5)=–0,5; f(4)=–1; f(0)=–3; f(–2): ☠

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
n/2-3	-3	-2,5		-1,5	-1	-0,5		0,5	1			2,5		3,5	4

A független változó és a fv-érték együtt egy rendezett párt alkot, amely mint koordináta: pontot határoz meg. Pl.: A(0;–3) B(1; –2,5) C(8;1) stb.

Vagyis: P(x;f(x))
Rögtön ábrázolhatjuk koordináta rendszerben:



Írjuk be néhány pont koordinátáját!

Abszcissza: a vízszintes tengely
Ordináta: a függőleges tengely
Origó: Q(0;0)

P(4;–1)

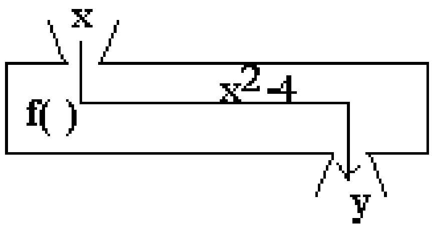
A P pont „első koordinátája” v. Abszcisszája, vagy „x koordinátája”: 4.

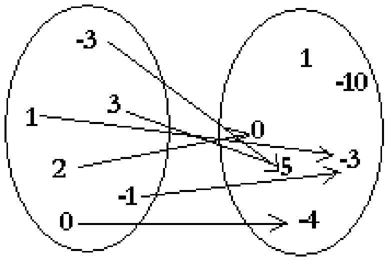
A P pont „második koordinátája” v. Ordinátája, vagy „y koordinátája”: –1.

II/3) Szemléltetés

$f(\ ): \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$; $y=x^2-4$

„Gép” - illetve megfeleltetés Venn diagrammon





Értéktáblázat $\leftrightarrow$ helyettesítési érték

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4			
y									45	96	21

Rendezett párok a független változóból és a hozzátartozó fv-értékből:

(–3;) (–1;) (0;) (1;) (;0) (;5)

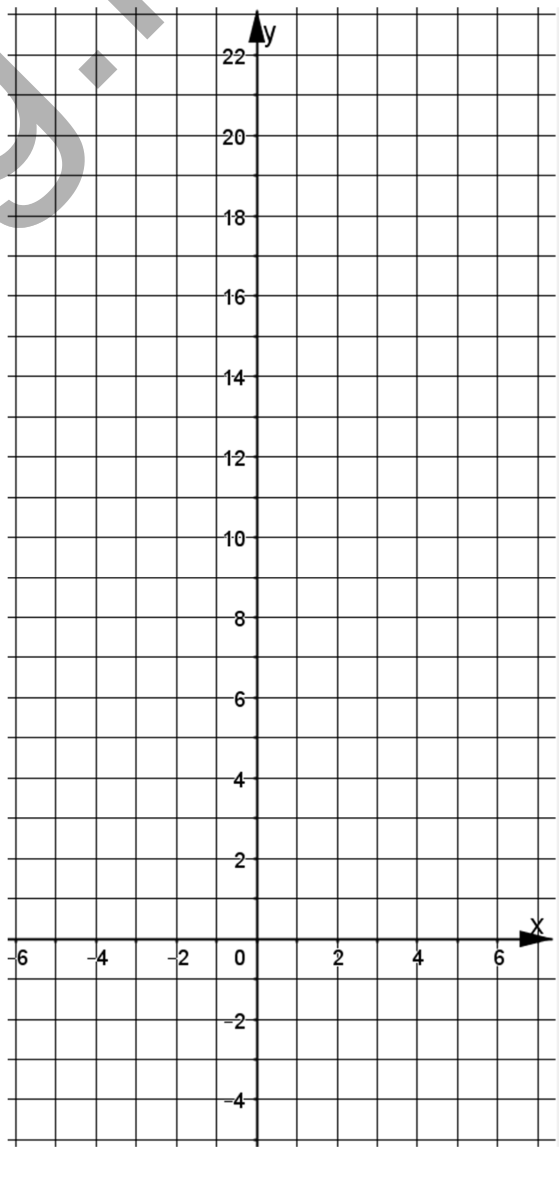
Az őskép keresés mindig egyenletmegoldás.

(?;60)

Az egyenlet:

(?;–10)

Ábrázoljuk koordináta rendszerben



III. Fogalmak, definíciók

III/1) Elnevezések, leírás – a fv. neve után mindig kiteszünk egy zárójelpárt: ( )

pl.: abs( ); sgn( ); int( ); frac( ); sin( ); f( ); tg( )

III/2) Független változó illetve függvényérték

Független változó v. argumentum

„Amit „bedobunk” a gépbe”, az értelmezési tartomány eleme.

Függő változó v. függvényérték:

ami „kipottyan” a gépből; a „független változóhoz” tartozó, ahhoz rendelt „helyettesítési érték”

III/3) Értelmezési tartomány - értékkészlet

Függvény értelmezési tartománya: az a legbővebb részhalmaza az alaphalmaznak, amelynek minden eleméhez a függvény hozzárendel egy értéket. (*Csak érteni kell, nem kell bemagolni.)*

Jele: D. Pl.: D_f, D_g, D_{sin} stb. Illetve: ÉT.

f( ): **R** $\to$**R**; f(x)=x+$\frac{1}{x+1}$ ÉT=

Mi az értelmezési tartomány?

Érdemes magadtól megkérdezni: mi az a művelet, amit nem lehet minden számra elvégezni. Ott lehet gubanc az értelmezési tartománnyal.

Az értelmezési tartomány vizsgálata sokszor egyenletmegoldás (később lesz egyenlőtlenség is).

g( ): **R** $\to$**R**; f(x)=$\frac{6x-8}{3x+4}$ +4x

D_g=

h( ): **R** $\to$**R**; f(x)=$\frac{4-5x}{3x^2-12}$+x^3

D_h=

AZ ÉRTELMEZÉSI TARTOMÁNY KERESÉSE NAGYON SOKSZOR EGYENLETMEGOLDÁS.

Függvény értékkészlete: az összes lehetséges függvényértékből, és csakis azokból álló halmaz (az értelmezési tartomány elemeihez rendelt fv-értékek halmaza).

Jele R. Pl.: $R_{g(\,)}$.

III/4) Gyakorlásuk

a) $f(\ )$: **R**$\rightarrow$**R**; y=2x+3

Töltsd ki a táblázatot

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y											

x											
y	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5

Az őskép keresés mindig egyenletmegoldás:
Mihez rendeli a –4-et?

Mihez rendeli a 0-át?

Mihez rendeli a 99-et?

Készítsünk „képletet” a folytonos egyenletmegoldás helyett: hogy ne kelljen állandóan új egyenletet felírni:
„Adjunk képletet, hogy az x-t könnyedén megkapjuk az y-ból, vagyis y őskéPének kiszámítására adjunk képletet.

Tudjuk:

y=2x+3

Próbáljuk is ki: Mihez rendeli a 21-et?

D_f =

R_f=

b) $g(\ ): \mathbf{R} \to \mathbf{R};\ x \mapsto \dfrac{12}{x-3}$

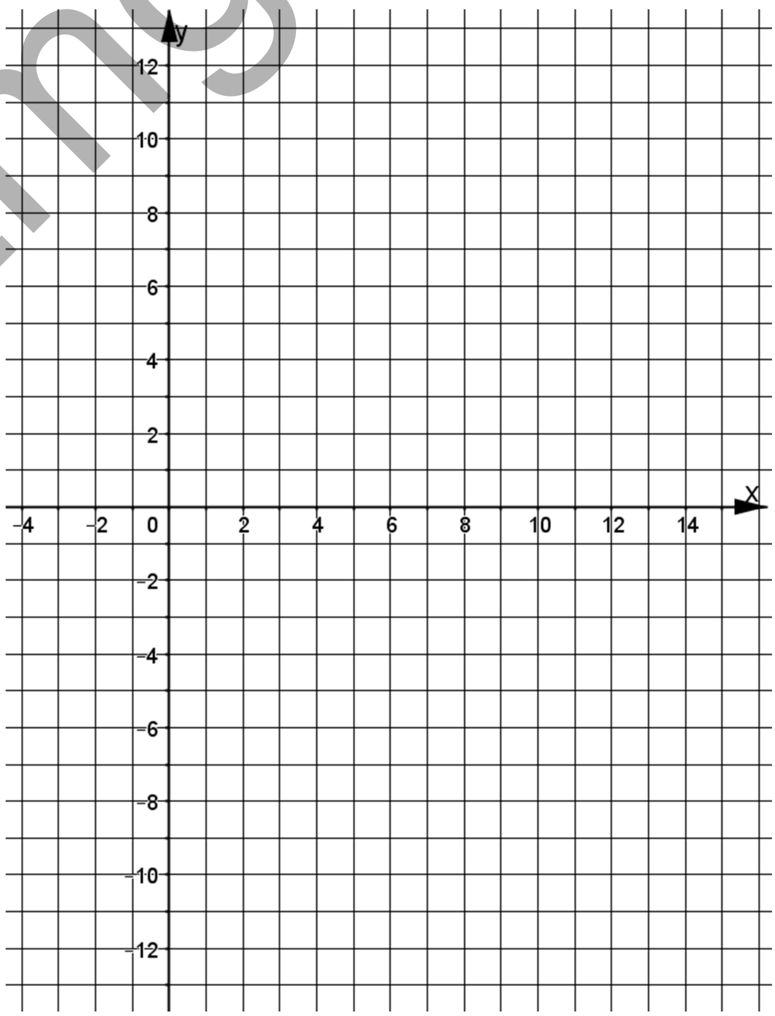
Mi az értelmezési tartomány? D_g=

Írjunk értéktáblázatot!

n	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
12/(x-3)		-2,4						12	6		3	2,4	2	1,71	1,5	1,33

Mihez rendeli a 8-at? (Ősképkeresés = egyenletmegoldás)

Ábrázoljuk az értéktáblázatból kiolvasott pontokat!



D_g =

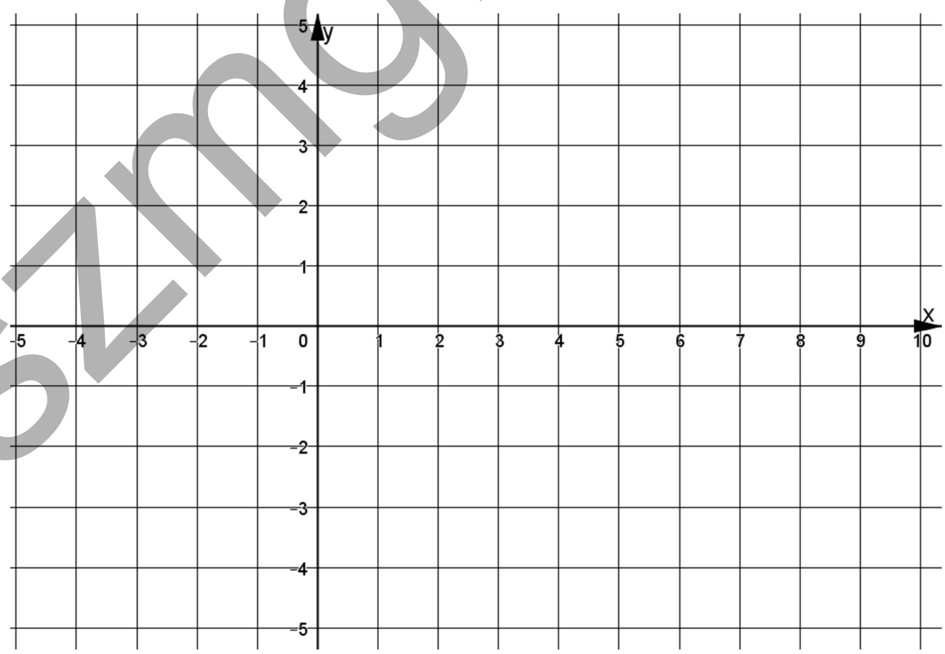
c) $h(\ ): \mathbf{R} \to \mathbf{R};\ y = \dfrac{x}{2} - 1{,}5$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3			6	7	8		10
x/2-1,5	-3,5			-2		-1	-0,5		0,5	1	1,5		2,5	3	3,5

Mihez rendeli az 1,8-at?

ZH:

Fixpont.: Az $x_0 \in D_f$ az f( ) fv. fixpontja, ha $x_0 = f(x_0)$
A fixpont-keresés egyenletmegoldás!



D_h =

Inverze

III/5) Injektivitás (kölcsönösen egyértelműség) $\Rightarrow$ invertálhatóság

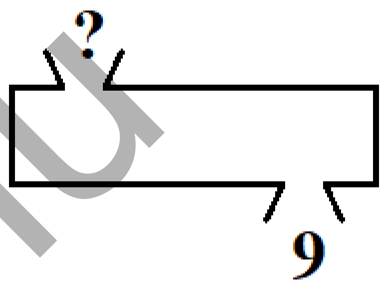
a) Az injektív (kölcsönösen egyértelmű) fv-ek

Melyik injektív? *g*( ): $\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}$; y=x+5

h( ): $\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$; $y=x^2$

Figyeljük meg, hogy az első függvénynél, ha nézzük a „gép" szemléltetést, akkor a gépből bármely kipottyant érték esetén *„vissza tudjuk keresni"* az **őskép**et, vagyis hogy mit dobtunk be a gépbe.
pl.: ha a függvényérték 9, akkor tudjuk, hogy a bedobott szám a 4 volt. Ezt a függvény nevével így írjuk: $g^{-1}(9)=4$
Ugyanakkor a második függvénynél, ha a „gép" szemléltetést figyeljük, akkor egy kipottyant érték esetén *„nem tudjuk vissza keresni"* az **őskép**et, vagyis hogy mit dobtunk be a gépbe, hiszen az lehet 3 és –3 is.

$9=x^2$
$0=x^2-9$
$0=(x+3)(x-3)$
$x_1=-3$ $x_2=3$



Geometriában a vetítés ilyen nem injektív fv. (~árnyék)

Def.: … hogy az *f*( ) fv. injektív (kölcsönösen egyértelmű),
ha ($\forall x_1;x_2\in D_f$ és $f(x_1)=f(x_2)$) $\Rightarrow x_1=x_2$.
Szavakkal:

Ha két gyerek kijön az „Egy eurós" boltból, és mondják, hogy 1 eurót költött mindkettőjük, akkor nem tudni, hogy ugyanazt vették-e vagy sem.
De ha egy boltban mindennek más az ára, akkor ha két gyerek kijön a boltból, és azt mondják, hogy mindketten egy dolgot vettek és mindketten 1,5 euro-ért, akkor tudni, hogy ugyanazt vették.

Ahogy a geometriánál tanultuk: „bárminek egyértelműn meg tudjuk mondani az ősképét".

b) Függvény „inverzének" „visszafelé kereső függvényének" a megadása:

f( ): $\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}$; f(x)=2x–3.
Az értéktáblázatot még „odafelé" könnyen kitöltjük.
De „visszafelé" valami „képlet" „szabály" lenne jobb.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y											

x											
y	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5

Ezt a „képletet" nevezzük az eredeti függvény inverz függvényének.

Pl.:

☺=2x–3.
Én azt szeretném megtudni, hogy az ☺-ből hogyan kapom meg az x-et.
☺=2x–3
☺+3=2x
$\frac{☺+3}{2}=x$
Vagyis megvan az „őskép” kereső „képlet”, leginkább függvény:

(y+3)/2=x
x=y/2+3/2
f^{-1}( ): R→R; x ↦ (x+3)/2

Így a –5 ősképe: $\frac{-5+3}{2}=-1$

A 0 ősképe: $\frac{0+3}{2}=1,5$

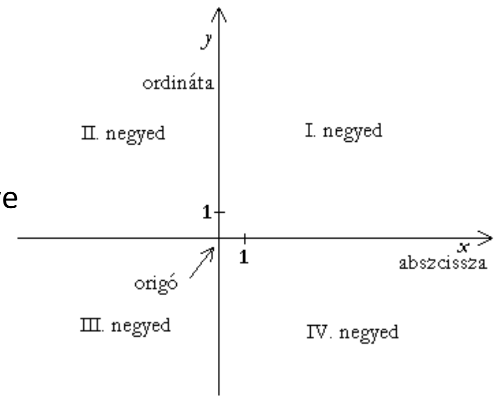
Ne riasszon meg senkit, hogy az inverz függvénynél is *x*-et használunk, hiszen az a független változót jelöli csak, nem egy elválaszthatatlan név az eredeti függvénytől.

A geometriában eddig tanult függvényeink invertálhatóak voltak.
Mondjuk meg, hogy mi a következő geometriai trafók inverze:

- E^{v} vektorral történő eltolás
- $Q^{+105°}$
- *t*( )

III/6) Függvények grafikonjai

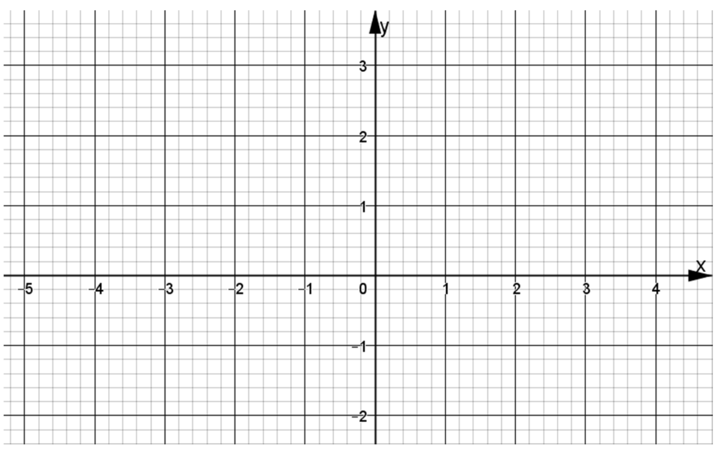
a) A koordinátarendszer



abszcissza: a független változó tengelye

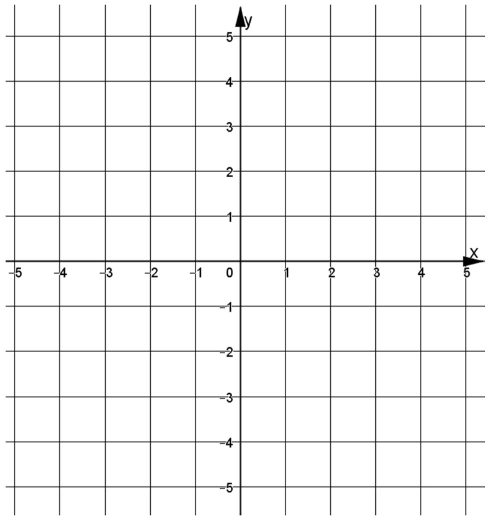
ordináta: a függő változó tengelye

Ábrázold a következő pontokat:
A(–3;4) B(4;–1) C(–5;0) D(0;2)
E(2;3) F(0;–2) G(–4;–2) Q(0;0)



Ábrázold azokat a pontokat

- pirossal, melyek első koordinátája: –2
- Sárgával: első koordinátájuk 0.
- Kékkel: két koordinátájuk egyenlő
- Zölddel: Két koordinátájuk egymás ellentettje
- Lilával: második koordinátájuk kisebb, mint az első.
  Itt fontos: először azt megmutatni, hogy egyenlők…



b) Függvény képének – grafikonjának pontjai a koordinátarendszerben:

f( ): ℝ→ ℝ; f(x)= 2x +1

tanm_fuggvenyek_egyenletek_A_3_9_b__fv_pontjai.ggb

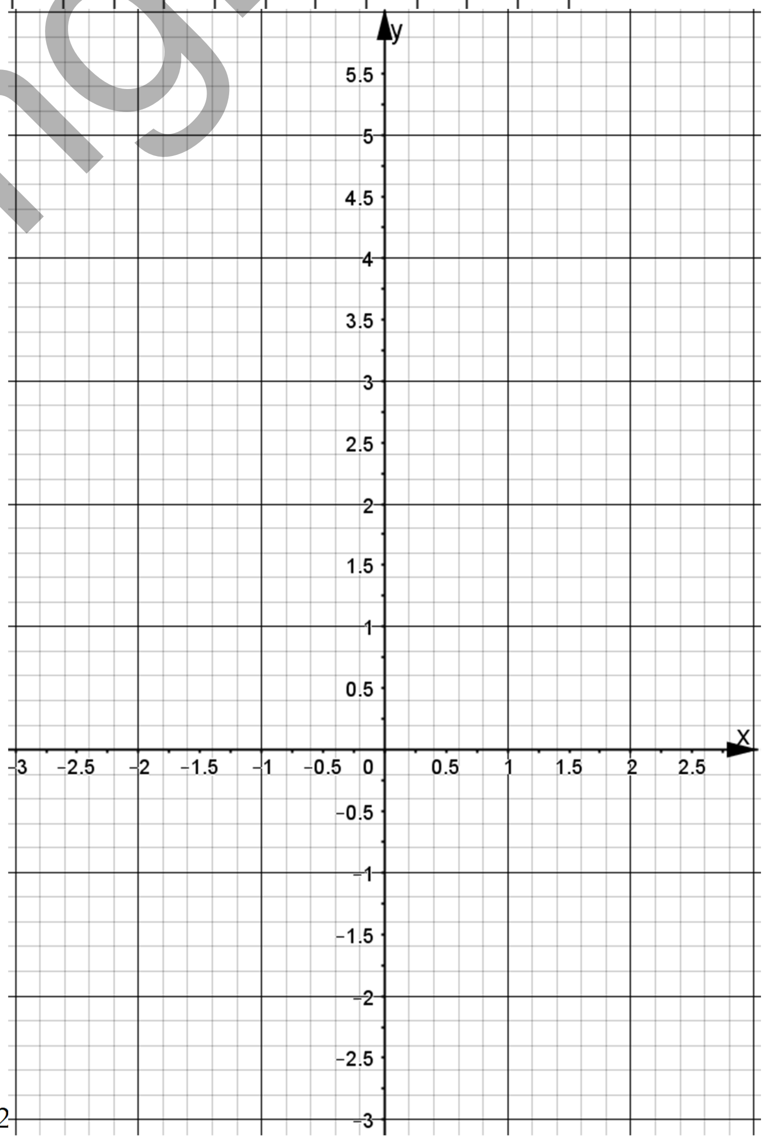
Ábrázoljuk először a (–2;3) (–1;–1); (0;1) (1;3) (2;5) pontokat.

Majd köztük ábrázoljuk még pontokat!

x	-2	-1,8	-1,6	-1,4	-1,2	-1	-0,8	-0,6	-0,4	-0,2	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2	2,2
2x+1	-3	-2,6	-2,2	-1,8	-1,4	-1	-0,6	-0,2	0,2	0,6	1	1,4	1,8	2,2	2,6	3	3,4	3,8	4,2	4,6	5	5,4

ZH:

Fixpont:

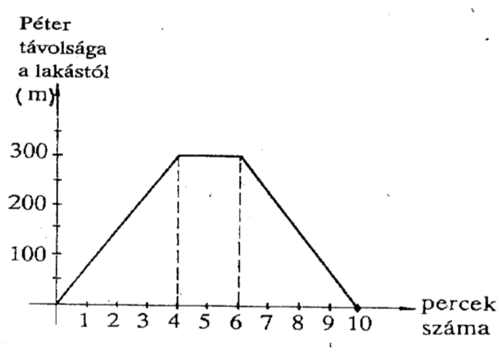


III/7) Grafikonok okos olvasása:

1. grafikon: Péter a boltba megy

Milyen messze van a bolt?

Mennyi időt vásárolt?



2. grafikon: Kerékpáros: idő-út grafikon

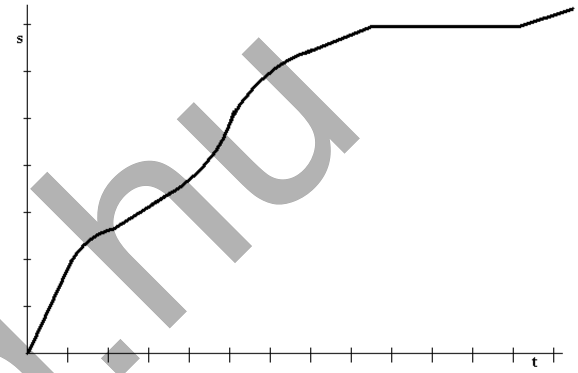
Mi legyen az ordináta neve, hogy értelme legyen a grafikonnak?

Ad meg a tengelyek beosztását!

Mikor ment a leggyorsabban.

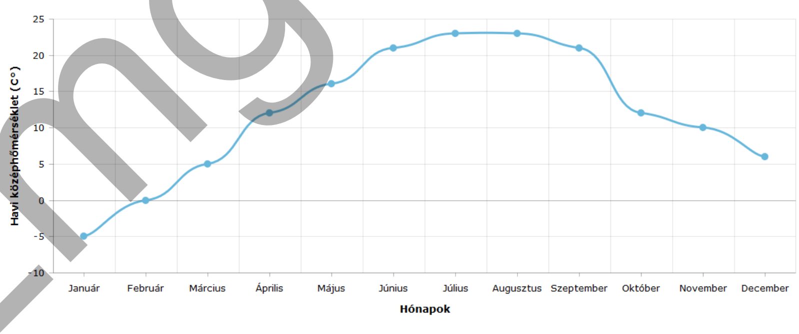
Mikor ment „hegynek”.

Mikor állt?



3. grafikon: havi középhőmérséklet

Mikor volt kb. 15°?



Megmondható-e, hogy mely hónapban volt a legmelegebb nap?

Mi az „értékkészlete” a havi középhőmérséklet függvénynek?

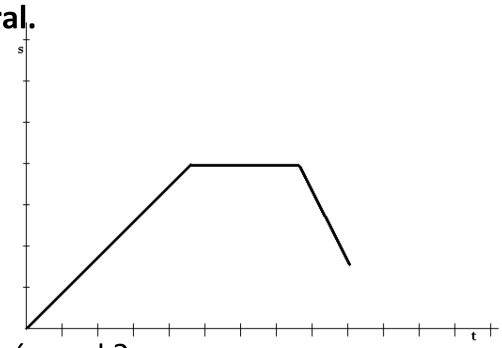
4. Grafikon: Péter távolsága otthonról kerékpárral.

Abszcissza egysége 1 óra, ordinátáé 15 km.

Milyen messzire ment?

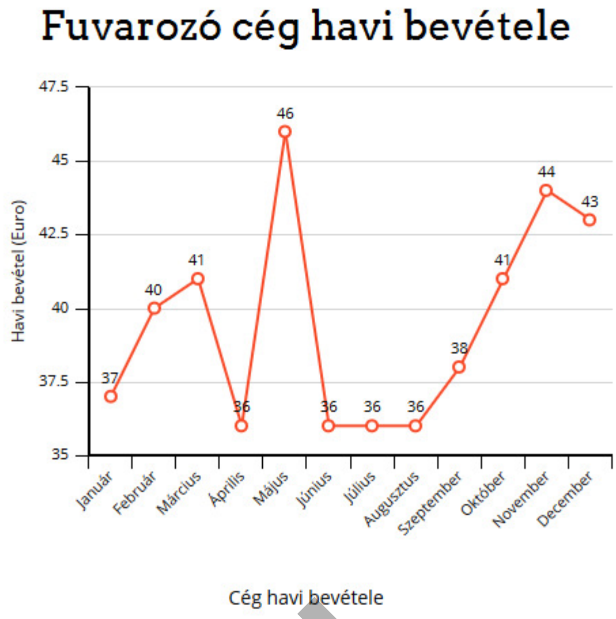
Hazajutott?

Mit csinálhatott? Tekerés közben fáradt?



Fv-ként tekintve mi az értékkészlete ennek a függvénynek?

5. grafikon:

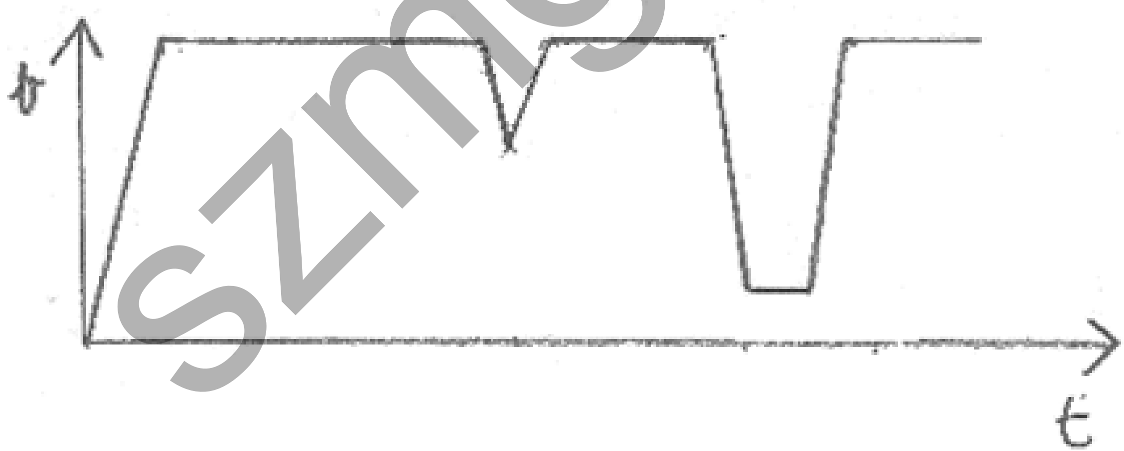


Milyen határok közt van a bevétel? (Minimumérték, maximum érték)

Hogyan számolnád ki az átlagbevételt?

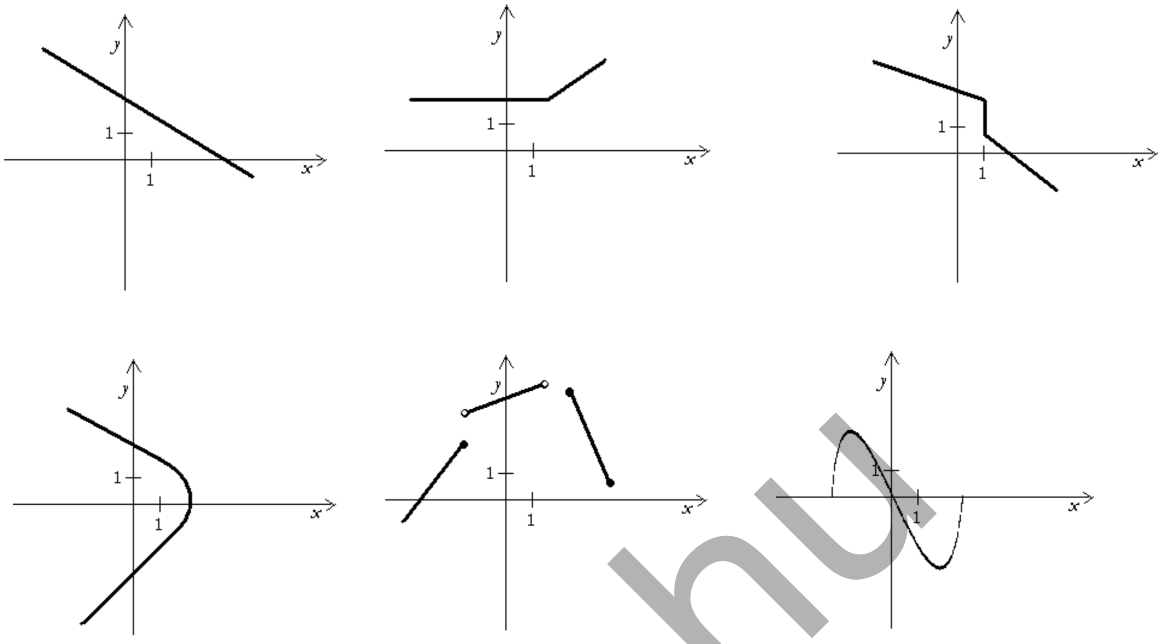
Van-e olyan bevétel, amelyről egyértelműn megmondható, hogy mely hónapban történt. Van-e olyan, amelyikről nem? Vagyis injektív-e a függvény v. sem?

6. grafikon: versenyautó, idő-sebesség grafikon.
Próbálj egy ilyen pályát rajzolni! Nem kell visszaérnie a kiindulási pontba!



Függvények grafikonjai.

Válasszuk ki, mely ábra lehet függvény grafikonja és mely nem, illetve melyik tűnik injektívnek, melyik nem!



Mit lehet még leolvasni?: D, R.

IV. Lineáris (elsőfokú és konstans), illetve lineárissá tehető függvények (KM 8. 129-137.)

IV/1) A Lineáris függvények: a konstans és az első fokú fv-ek.

Elsőfokú függvények: Az $x \mapsto mx+b$, ahol $m \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbf{R}$
hozzárendelési szabályú függvényeket elsőfokú függvényeknek hívjuk.

Konstans függvények: Az $x \mapsto b$, ahol $b \in \mathbf{R}$
hozzárendelési szabályú függvényeket konstans függvényeknek hívjuk.

($x \mapsto b \Leftrightarrow x \mapsto 0 \cdot x+b$), vagyis m=0)

Lineáris függvények: Az elsőfokú és a konstans függvények.
Tétel: Az elsőfokú és konstans (nulladfokú) fv-ek grafikonja egyenes.
(A 11. osztályban bizonyítjuk.)

Azokat a függvényeket, melyek képe egyenesre illeszkedik, lineárissá tehető függvényeknek hívjuk. Ilyen lehet: „lukas” egyenes, v. csak félegyenes.

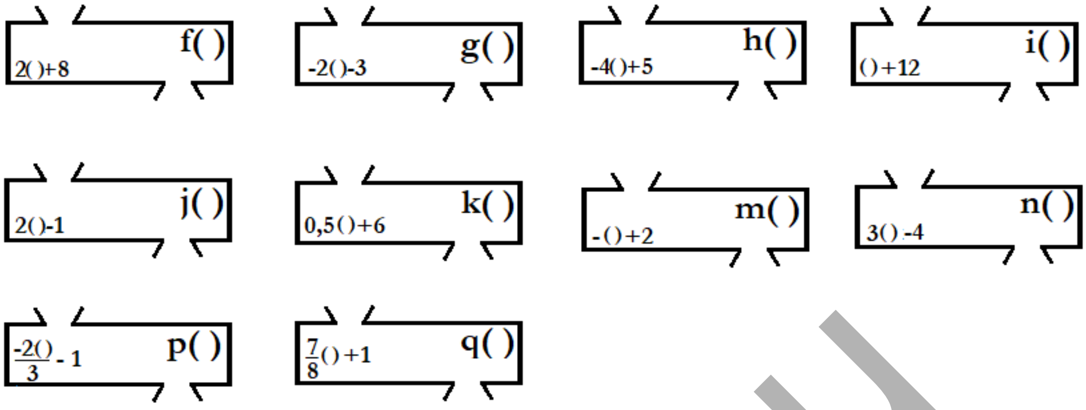
IV/2) Mitől függ a változás – vagyis a „meredekség”

Adott 10 gép - függvény

f( ): y=2x+8   g( ): y=–2x–3   h( ): y=–4x+5   i( ): y=x+12

j( ): y=2x–1   k( ): y=0,5x+6   m( ): y=–x+2   n( ): y=3x–4

p( ): $y=-\frac{2x}{3}-1$ q( ): $y=\frac{7}{8}x+1$



Ha mindegyikbe először 5-öt, majd utána eggyel többet, vagyis 6-ot dobok be:

- Melyikeknél lesz pozitív változás – (vagyis nagyobb számot dob ki a gép az előző kidobott számnál):

- Melyikeknél lesz negatív változás – (vagyis kevesebbet dob ki a gép):

- Melyiknél lesz a legnagyobb pozitív változás:

- Melyiknél lesz a „legnagyobb” negatív változás (legnagyobb absz. értékű):

- Melyik növekszik, de a legkevésbé:

- Melyik csökken, de a legkevésbé:

Mitől függ a változás mértéke?

Melyeknél a „legmeredekebb” a változás (akár növekszik, akár csökken, de nagyon…)

IV/3) Lineáris fv-nél két pontjából már ábrázolható a fv. grafikonja!

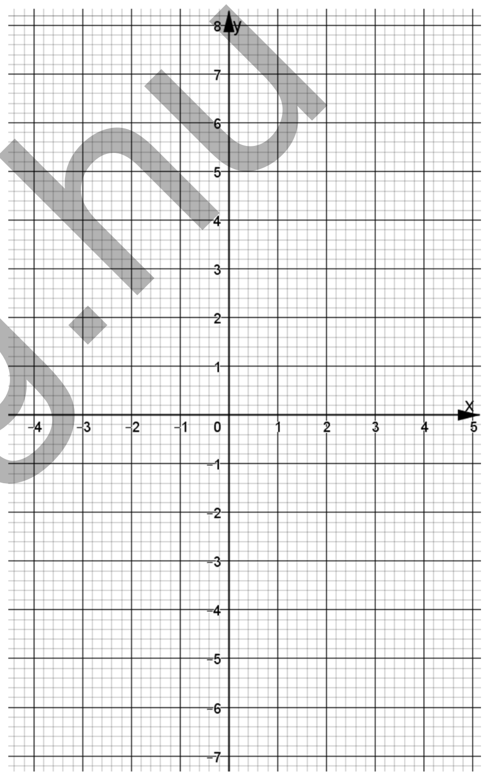
a) *f( )*:**R**→**R**; *f(x)*=6(x–2)–2(2x–5,5)

Először is helyrepofozzuk:

- Tehát a típusa:
- ÉT, vagyis D_f=
- *m*=

  FIGYELJÜK MEG: ha egy argumentumnál 1-gyel nagyobbat dobok be, 2-vel nagyobb függvényérték „esik” ki!
- Tengelymetszetek – ZH (zérushely)

  ZH: ott metszi az x tengelyt (ez a zérus hely), ahol x=…………



Az a pont esik az *y* tengelyre,
melynek első koordinátája: ………….

Általánosítás
y=*mx*+*b* *Zérushelye*

A zérushely-keresés
általában egyenletmegoldás!

- Fixpont?

  Inverz?

- Értékkészlet: R_f=

  Értéktáblázat:

x	-3	-2	-1	0	0,5	1	1,5	2	2,5					
											-2	8	100	-217

Grafikonja: Két pontját ábrázoljuk mivel egyenes a grafikon.

Grafikonra illeszkedő és nem illeszkedő pontok oda-vissza
Mit jelent az, hogy egy pont illeszkedik-e a grafikonra?

Pl.: A(8;17) $graf_f$ B(15;29) $graf_f$.

P(x,y) akkor eleme $graf_f$ -nek, ha koordinátáira teljesül: x∈ D_f és *y*=*f*(x)

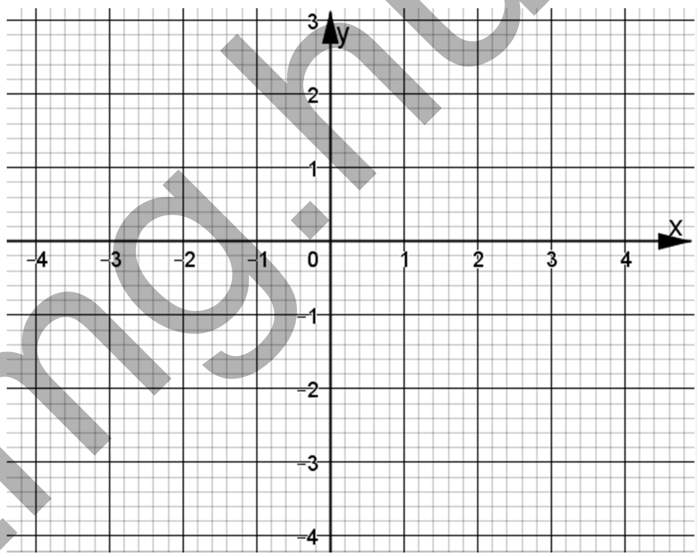
Egyszerűsítés gyakorlás HF-hoz:

$$\frac{4x^2-1}{3-6x}=$$

$$\frac{5x^2-10x+5}{7x-7}=$$

b) $g(\,):\mathbf{R}\to\mathbf{R};\ x\mapsto \frac{3x+2}{2}-x-2$

- Típus:
- D_g=
- Meredekség:
- ZH:
- y tengelymetszet:
- Fixpont:
- Inverz:



Értéktáblázat

x	–3	0	2	4	100				
g(x)						–3	0	–100	100

- Értékkészlet – R_g=

Néhány grafikonra illeszkedő és nem illeszkedő pont:

Grafikonja (megrajzolni)

c) $h(\ ):\mathbf{R}\to\mathbf{R}$; $h(x)=-\dfrac{3x+4}{4}$

- Típus:
- D_h=
- Meredekség:
- ZH:

y tengelymetszet:

- Fixpont:

- Inverz:

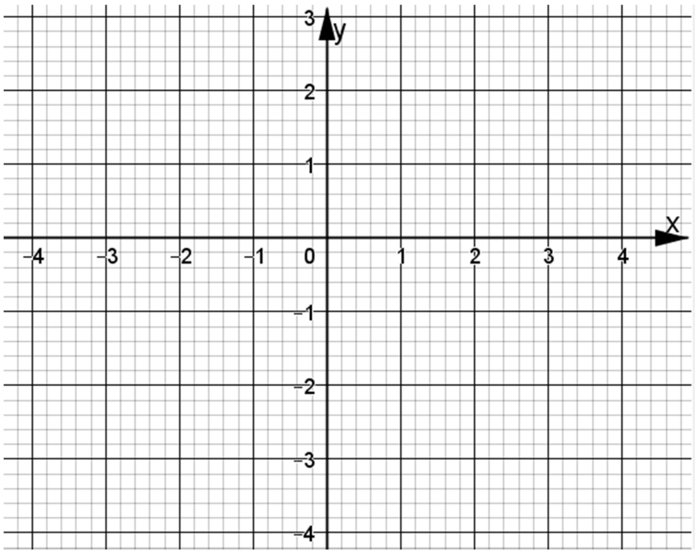
Értéktáblázat

x	–3	0	2	4	100				
h(x)						–3	0	–100	100

- Értékkészlet – R_h=

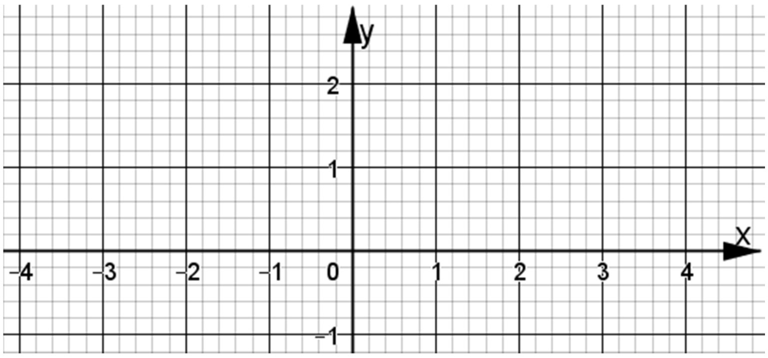
Néhány grafikonra illeszkedő és nem illeszkedő pont:

Grafikonja



d)

e) Konstans fv.



$c(\ )$: **R**→**R**; y=2

D_c=

Grafikonja

Típus:

m=

ZH:

Fixpont:

Injektív-e?

Invertálható-e?

R_c=

IV/4) A „meredekség” újra

a) Észrevétel két pont közti „meredekségekről”:

tanm_fuggvenyek_egyenletek_A_4_2_g__meredekseg.ggb
Ld.: KALANDOZÁSOK A MATEMATIKÁBAN: 132.o!

g( ): **R**→**R**; y=5x+3

pl: 6-hoz ____________= ________-at rendel: $g(6)$= _____

7-hez: ____________= ________-at rendel: $g(7)$= _____ = $g(6)$+______.

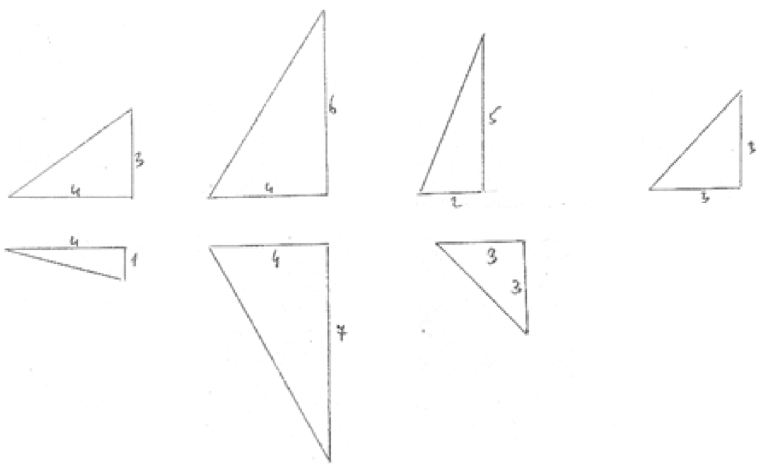
Vagyis eggyel nagyobb számhoz ______-tel nagyobb értéket rendel.

x_1-hez: $5x_1+3$-at

(x_1+1)-hez: vagyis:

Látható, hogy a lineáris fv-nél x együtthatója határozza meg a függvény meredekségét (pl. most 5). (Nemsokára be is látjuk.)

b) Hogy jellemeznéd a következő meredekségeket, milyen számmal?



c) Mennyi a meredeksége a következő hozzárendelési szabályú függvénynek:

y=$\frac{5-2x}{3}$ +2(x–3)

y=$(x-2)^2-(x+1)(x-3)$

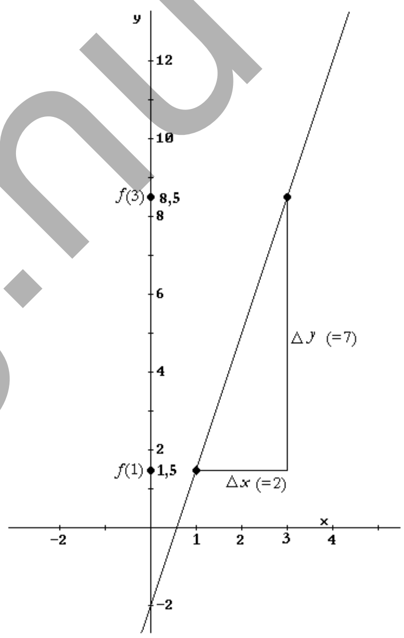
y=$\frac{3x^2-12}{10-5x}$

d) A meredekség számolása

f( ): **R**→**R**; *y*=3,5*x*–2

Konkrét helyzetben:

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ =



Két pont közötti meredekség jellemző száma $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. (A Δ jel a mögötte található érték változásának nagyságát jelöli.)

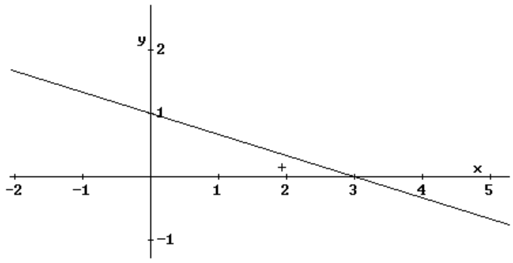
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$=$\frac{7}{2}$ =3,5

A lineáris függvényeknél a meredekség állandó, sőt, az *x* együtthatójával egyezik meg: *f*( ):R→R; *y=ax+b*

ui.:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{(mx_2+b)-(mx_1+b)}{x_2-x_1}=\frac{mx_2-mx_1}{x_2-x_1}=\frac{m(x_2-x_1)}{x_2-x_1}=m$$

g( ): **R**→ **R**; g(x)= $-\frac{x}{3}+1$



$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ =

Fontos tudni: nem lineáris fv-eknél a fv-meredeksége ≠ két pont közti meredekséggel!

Vegyük észre:

- ha a független változó együtthatója negatív: csökkenő a grafikon, ha pozitív, növekvő (emelkedő).
  m= ⊖: csökkenő a fv. és a grafikonja is.
  m= ⊕: növekvő a fv. és a grafikonja is.
- Ha a független változó együtthatójának abszolút értéke nagy: meredek a grafikon (meredeken csökken v. nő), ha kicsi: csökken.
- Akkor 45°-os a grafikon, ha az együttható: ±1.
- Szokás a meredekséget *m* betűvel jelölni, és szokás a lineáris függvényeket a következőképpen is írni: *mx+b*
- Mennél jobban emelkedik, mennél meredekebb a függvény grafikonja, annál nagyobb a meredekség, annál nagyobb az *m*.

Konstans függvény meredeksége: 0.

Nézegessünk egy néhány előre megadott fv-t és egy állíthatót!
tanm_fuggvenyek_egyenletek_A_4_3_d__meredekseg_tobb_fv.ggb

Mennyi a meredeksége a következő lineáris fv-eknek, melyek grafikonja átmegy az adott két ponton.

f( ): A és C m=

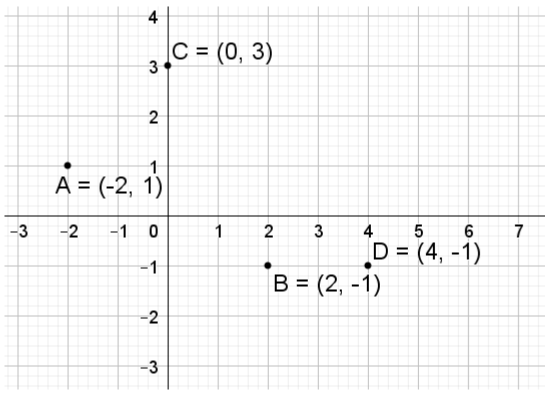
g( ): D és A m=

h( ): A és B m=

i( ): B és C m=

j( ): D és C m=

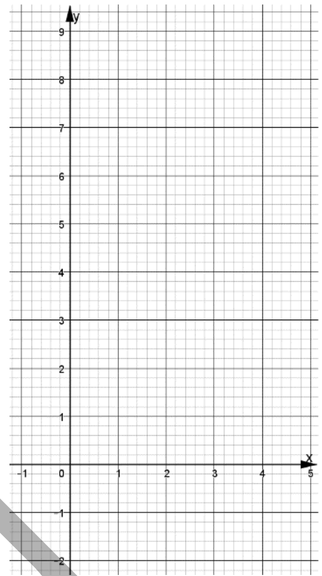
k( ): D és B m=



IV/5) Grafikonról történő leolvasások, függvény hozzárendelési szabály visszakeresése

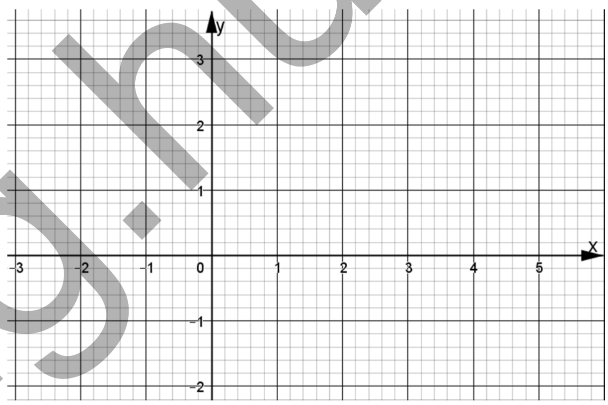
Meredekségből és egy grafikon-pontból a függvény felírása

(i) Add meg azt az elsőfokú f( ) függvényt, melynek meredeksége: m=–2; és a grafikon átmegy a P(2;3) ponton.)



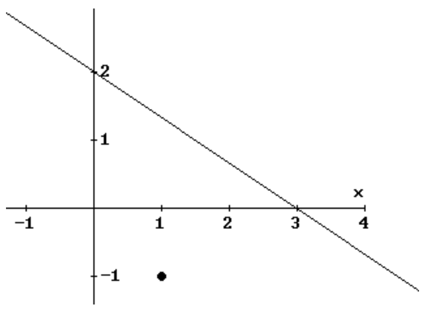
(ii) Add meg a következő elsőfokú g( ) fv-t:

$m=-\frac{1}{2}$; P(–2;3)$\in$ $graf_g$.



b) Adott egy lineáris fv. grafikonja, mely áthalad a (0;2) és a (3;0) ponton és egy új pont a koordinátarendszeren: P(1;–1). Adj meg egy olyan másik lineáris fv-t, amely képe a megadottal párhuzamos, és áthalad az adott új P(1;–1) ponton.

Mo.:



Elsőfokú függvény grafikonja párhuzamos az A(–1 ; 2) és B(2 ; –3) pontok által meghatározott egyenessel, és a P(–2;1) pont illeszkedik rá. Írd föl a fv-t, és add meg a zérushelyét.

c) Adott 3 pont. Kollíneárisak-e? A(0;1); B(9;30) C(5;17)

Mo.: Sajnos a pontok felrajzolása és összekötése nem bizonyító erejű!

d) Az azonos és a nem azonos meredekségű fv-ek. Ábrázoljuk is; ha lehet, most ne két ponttal, hanem mondjuk az *y* tengelymetszetet, és a meredekséget kihasználva.

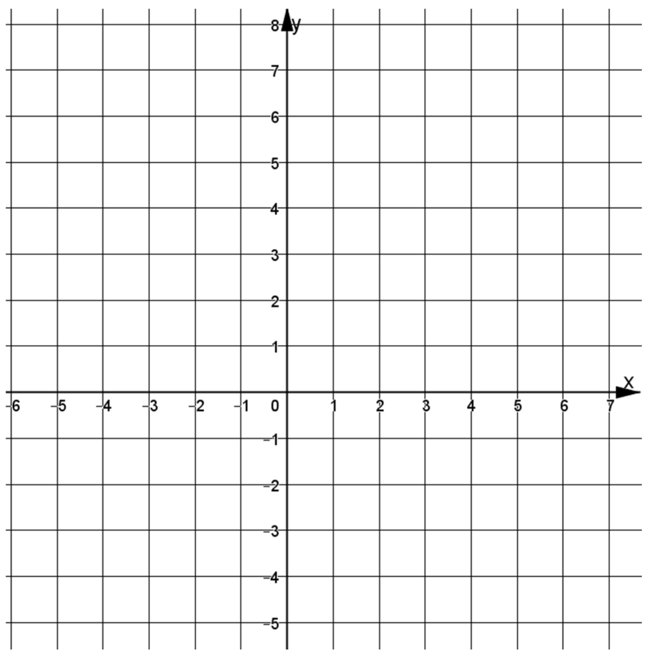
$f(\ ):\mathbf{R}\to\mathbf{R};\ f(x)=\frac{3}{2}x$

$g(\ ):\mathbf{R}\to\mathbf{R};\ g(x)=\frac{3}{2}x+1$

$h(\ ):\mathbf{R}\to\mathbf{R};\ h(x)=-\frac{3}{2}x+1$

$k(\ ):\mathbf{R}\to\mathbf{R};\ k(x)=x/2+1$

$m(\ ):\mathbf{R}\to\mathbf{R};\ m(x)=-x/2-2$



tanm_fuggvenyek_egyenletek_A_4_3_d__meredekseg_tobb_fv.ggb

e) Lineáris összefüggés (nem vesszük)

f) Menet: monotonitás

- … hogy az *f* fv. szigorúan monoton nő,
  ha $\forall x_1;x_2 \in D_f$, és $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$
  „Nagyobb értelmezéstartománybeli elemhez nagyobb értéket rendel”

- … hogy az *f* fv. szig. mon. csökken,
  ha $\forall x_1;x_2 \in D_f$, és $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$
  „Nagyobb értelmezéstartománybeli elemhez kisebb értéket rendel”

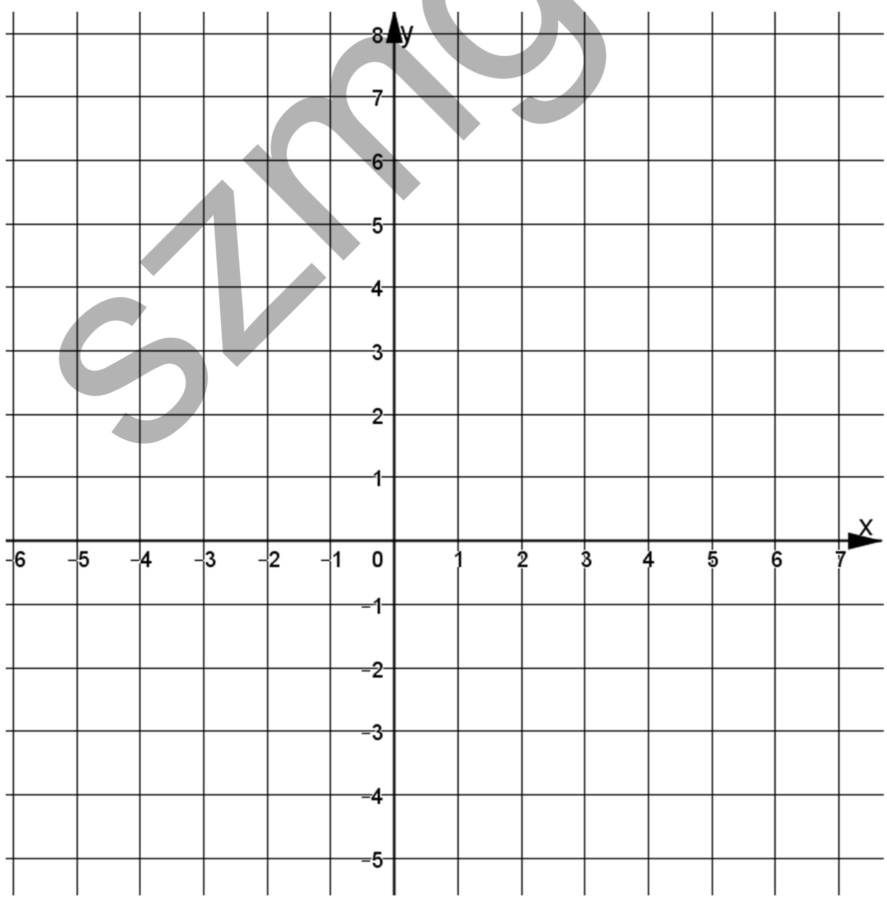
- … hogy az *f* fv. monoton nő,

  ha $(x_1;x_2 \in D_f \wedge x_1<x_2) \Rightarrow f(x_1)\leq f(x_2)$
  „Nagyobb értelmezéstartománybeli elemhez *nem kisebb* értéket rendel”

- … hogy az *f* fv. monoton csökken,
  ha $(x_1;x_2 \in D_f \wedge x_1<x_2) \Rightarrow f(x_1)\geq f(x_2)$
  „Nagyobb értelmezéstartománybeli elemhez *nem nagyobb* értéket rendel”

SAJNOS GUBANC AZ ELNEVEZÉSEK KÖRÜL – DE ELŐSZÖR TANULJUK MEG EZT, HOGY BIZTOSAN TUDJUK!

Rajzoljunk **szigorún monoton** függvényeket zölddel,
illetve **monoton** fv-eket pirossal!

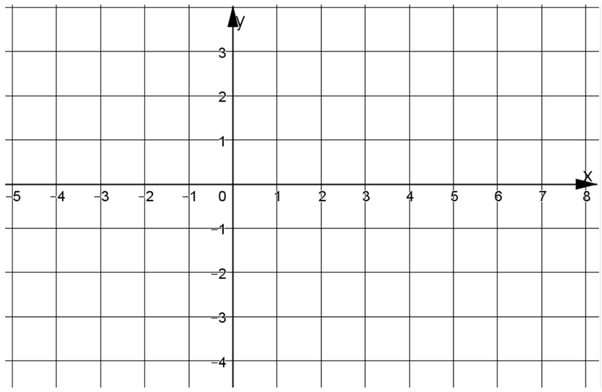


IV/6) Függvényjellemzések

a) Alapvető szempontok:

b) Függvényjellemzések

(i) $f(\ ): \mathbf{R} \to \mathbf{R};\ f(x)=\dfrac{x^2-x}{2x-2}-1$



Def.:

$f(\ )$:

Kikötés:

D_f=

Típus:

ZH:

y tengelymetszet:

Fixpont

Menet – táblázat:

Inverz

inverz: $f^{-1}(\ )$: y=

R_f=

(ii) $f(\ ):[-5;2] \to \mathbf{R}$; $f(x) = \dfrac{3x - 3x^2}{2x - 2} + 1$

Kikötés:

Definíció:
$f(\ ):[-5;2] \to \mathbf{R}$; y=

D_f=

Típus:

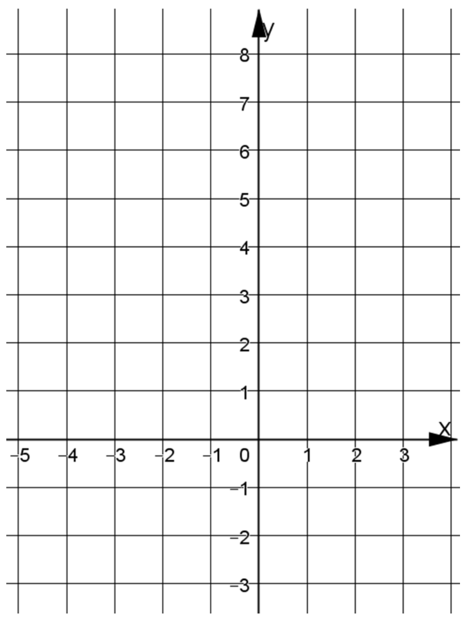
ZH:

y tengelymetszet:

Fixpont:

Menet – táblázat:

Inverz

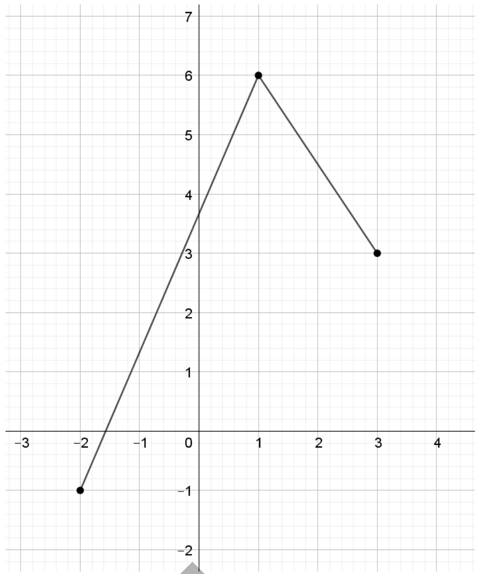


inverz: $f^{-1}(\ )$: y=

R_f=

c) Függvényjellemzés grafikonról olvasva

f( ) függvény



D_f=

Felveszi-e a –2 értéket: _________

Az 5-öt mely helyeken veszi fel: ________

A 2-őt mely helyeken veszi fel: _________

A –0,5-öt hol veszi fel________

ZH:

Menete:

[;] intervallumon:

[;] intervallumon:

Max. hely.:_______ Max. érték:_______

Min. hely.:_______ Min. érték:_______

Mi az értékkészlete? R_f=

g( ) függvény

D_g=

Az –0,5-öt hol veszi fel: _____________

A 2-őt hol veszi fel: _____________

ZH:

Menete:

[;] intervallumon:

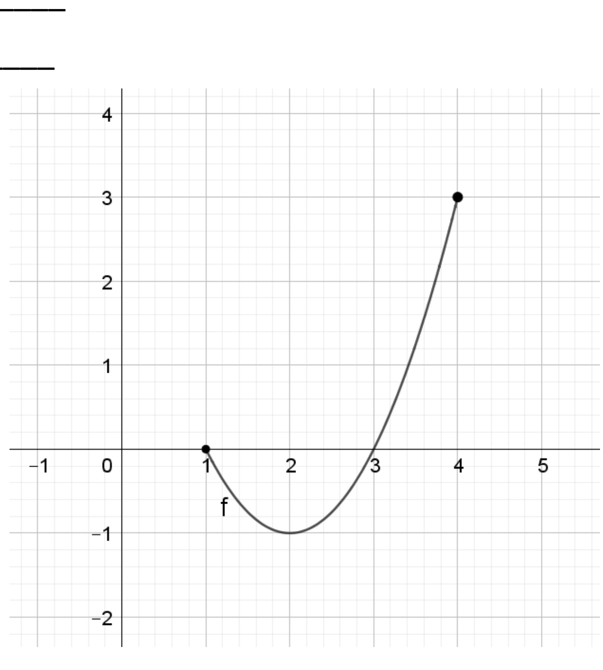
[;] intervallumon:

Max. hely.:_______ Max. érték:_______

Min. hely.:_______ Min. érték:_______

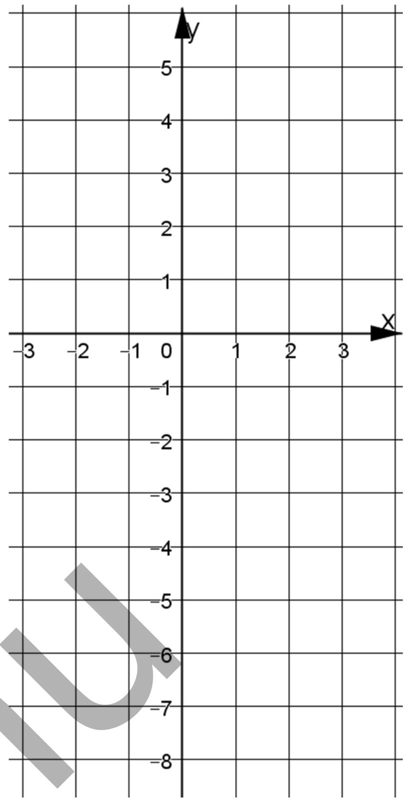
Mi az értékkészlete?

R_g=



d) Függvényjellemzések gyakorlása

(i) $f(\,)$: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$; $f(x)=\frac{5x}{2}-3$



D_f=

Típus:

ZH:

y tengelymetszet:

Fixpont

Menet – táblázat:

Inverz

inverz: $f^{-1}(\,)$: y=

R_f=

(ii) $g(\ ): [-1\ ;\ 5] \to \mathbf{R};\ g(x) = \dfrac{12x - 2x^2 - 18}{3x - 9}$

Kikötés:

Definíció:

$g(\ ): [-1\ ;\ 5] \to \mathbf{R};$ y=

D_g=

Típus:

ZH:

y tengelymetszet:

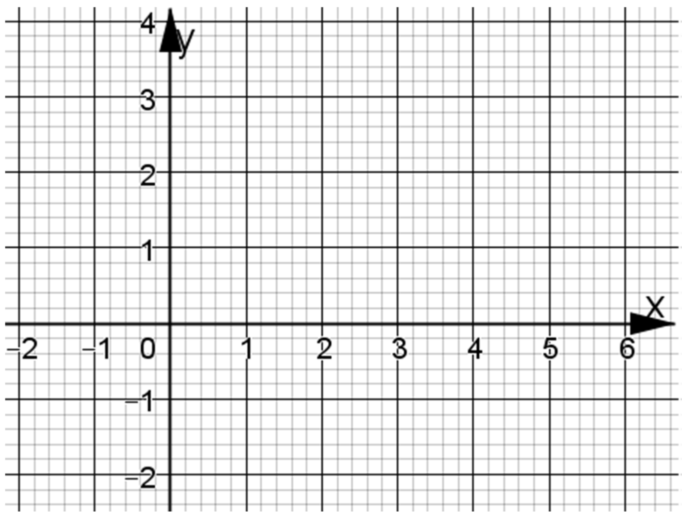
Fixpont:

Menet – táblázat:

Inverz

inverz: $g^{-1}(\ )$: y=

R_g=



(iii) $h(\ ):[-3;2]\to\mathbf{R}$; $h(x)=\dfrac{2x^2+3x-2}{x+2}$

Ez valójában az $f(\ )$: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$; $f(x)=\dfrac{2x^2+3x-2}{x+2}$ fv.

leszűkítése a [–3;2] intervallumra: $h(\ )=f(\ )\Big|_{[-3;2]}$

Kikötés:

Definíció:

$h(\ ):[-3\ ;\ 2]\to\mathbf{R}$; y=

D_h=

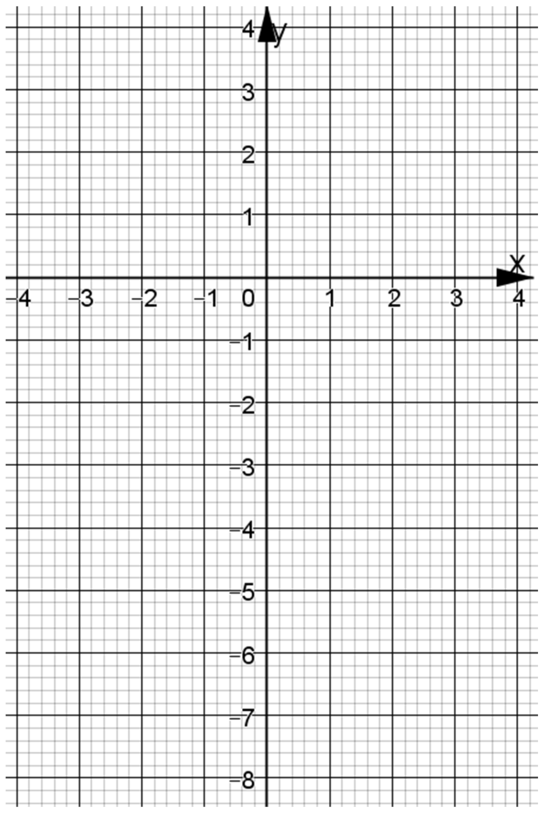
Típus:

ZH:

y tengelymetszet:

Fixpont:

Menet – táblázat:



Inverz

inverz: $h^{-1}(\ )$: y=

R_h=

(iv) $f(\,):[-2;2]\to\mathbf{R};\ x\mapsto \dfrac{3x^2-2x-1}{x-1}-x$

Ez valójában a $g(\,)$: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$; $g(x)=\dfrac{3x^2-2x-1}{x-1}-x$ fv. leszűkítése

a [–2;2] intervallumra: $f(\,)=g(\,)\Big|_{[-2;2]}$

Kikötés:

Definíció:

$f(\,):[-2\,;\,2]\to\mathbf{R}$; y=

D_f=

Típus:

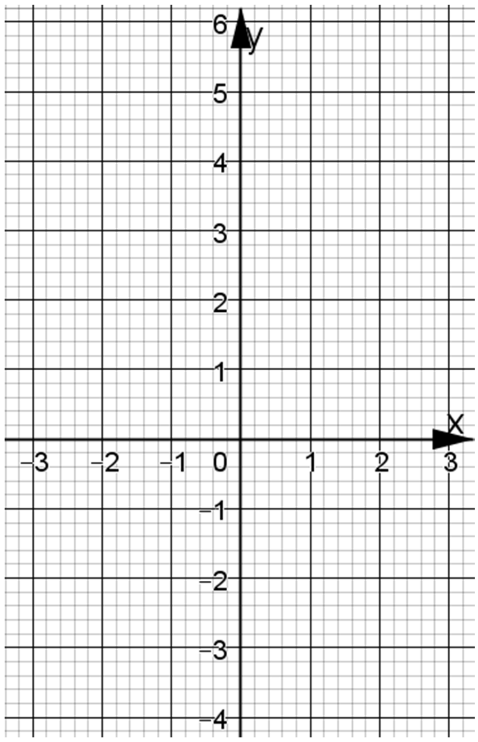
ZH:

y tengelymetszet:

Fixpont:

Menet – táblázat:

Inverz



inverz: $f^{-1}(\,)$: y=

R_f=

(v) $g(\ ):[-3;2]\rightarrow\mathbf{R};\ x\longmapsto\frac{4x^2-4x+1}{1-2x}-x$

Kikötés:

Definíció:

$g(\ ):[-3\ ;\ 2]\rightarrow\mathbf{R};\ y=$

$D_g=$

Típus:

ZH:

y tengelymetszet:

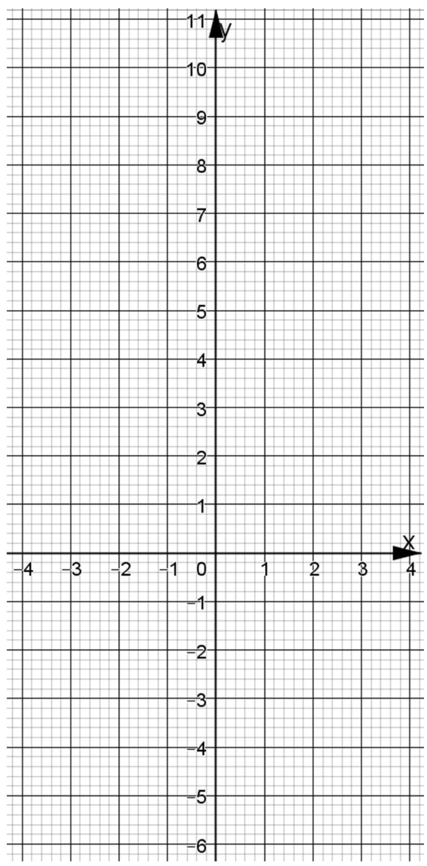
Fixpont:

Menet – táblázat:

Inverz

inverz: $g^{-1}(\ ):\ y=$

$R_g=$



IV/7) Melyik hozzárendelési szabály lineáris, vagy tehető lineárissá. Amelyik olyan, írjuk is fel a függvényt.
Vigyázat, a lineárissá tehetőnél figyeljünk az értelmezési tartományra!

$\frac{1}{3}$(x–4) (x–3)(x+1)

$\frac{4x^2-4x+1}{2x-1}$ (–2x+1)–(3x–3)

$\frac{5}{x+1}$+4 $\frac{3x^2-12}{3x+6}$

$\frac{x^2+3x+2}{x}$

IV/8) Hogy változik a fv, ha egy számmal szorozzuk, vagy osztjuk a hozzárendelési szabályt?
Sajnos sok gyerek gátlástalanul megteszi.
Pedig megváltozik a gép!

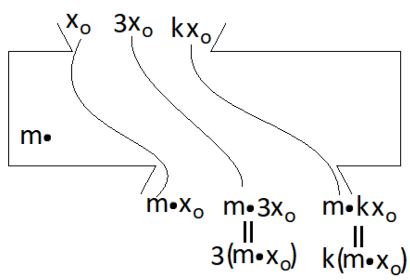
Nézzünk egy ilyet: y=6x–4 és y=3x–2
A fv. meredeksége a fele lett…
Pedig csak leosztottam 2-vel…
Miért is jut ilyen eszünkbe?
Hát az egyenletmegoldásnál szabad osztani kettővel:
6x–4=0 /:2
3x–2=0

IV/9) Az egyenes arányosság

a) Def.: Az y=mx (m≠0) hozzárendelésű függvényeket „egyenes arányosságnak" nevezzük. Tehát az „egyenes arányosság" egy függvény.

Vagyis ha $\frac{\textit{függő mennyiség}}{\textit{független mennyiség}} = \textit{állandó}$ $\left(\frac{\textit{függő változó}}{\textit{független változó}} = \textit{állandó}\right)$

(Látható, hogy ahányszorosára nő v. csökken a fgtln változó, annyiszorosára nő v. csökken a függő változó, hiszen a hányadosuk állandó.
Vagyis mondhatjuk azt, hogy „ha az argumentumot háromszorosára növelem, akkor a függvényérték is a háromszorosa lesz"



b) Mely két adat között van egyenes arányosság (ha életből vett, akkor „ideális eset”)

- Sebesség – idő alatt megtett út
- Idő – állandó sebességgel megtett út
- Életkor – tapasztalat
- Négyzet oldala – kerülete
- Lipóti kenyér súlya - ára
- Négyzet oldala – területe
- Fok és ívmérték (radián)
- Tabletták száma – C-vitamin tartalom
- Életkor – testsúly
- Eltelt idő – épített autópálya hossz
- Életkor – fizetés
- sebesség – légellenállás
- buliban töltött idő – elbutulás mértéke
- cserepek száma – lefedett tető-négyzetméter

c) Pl.: adott állandó sebességnél: eltelt idő és megtett út.

50 km/h sebességgel haladó autó mennyit utat tesz meg:

1 óra alatt:

2 óra alatt:

5 óra alatt:

22 óra altt

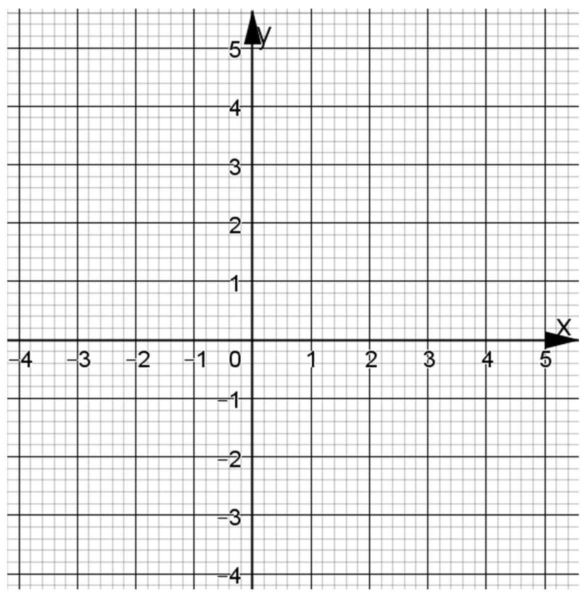
0,1 óra alatt:

0,2 óra alatt:

d) Az egyenes arányosság grafikonja:

$f(\ ):\mathbf{R}\to\mathbf{R};\ y = ax \quad (a \neq 0)$

Látjuk a definíción, hogy a fv. képe lineáris és áthalad az origón.



e) Gyakorlása:

Ha 1 mól metán 16 g, akkor 23 mól metán hány g?

Egy ember 3 óra alatt 20 vödör almát szed.
Mennyit szed

9 óra alatt? 11 óra alatt 2 óra alatt?

15° hány radiánnak felel meg?

Ha 5 kg kristálycukor 7 Euro, akkor 62 kg hány Euro?

Ha 15 kg méz 110 Euro, akkor 60 Euro-ért hány kg-ot kapok?

$\frac{2\pi}{5}$ radián hány foknak felel meg?

Függvények és Egyenletek: B:
Lineáris, vagy lineárisra, vagy azok szorzatára visszavezethető egyenletek.

I. Bevezetés: egyszerűbb lineáris egyenletek

I/1) Egyenlet = egy igaz állítás egy általunk még nem ismert számra.

$2{,}5(4x - 8) - 5(4 - 2x - 3x) + 2(5 - 4x) = 14 - 2(-11x + 2)$

Bontsuk fel a zárójelet, de mondjuk végig „plusz 2,5-ször plusz 4 iksz az + 10 x. Plusz 2,5-ször mínusz 8 az mínusz húsz. Mínusz 5 ször plusz 4 az mínusz 20…”:

Majd összevonunk:

Majd cél, hogy az egyik oldalon legyen az ismeretlen, a konstans a másik oldalon.

Vagyis először „kibontjuk” az ismeretlent a zárójelből, majd a szokásos polinom-alakra rendezzük. Akkor jó, ha elsőfokú lesz.
VisszaHelyettesítés:

Az egyenlet egy állítás: „gondoltam egy számra, és az állítás igaz rá, amit aztán egyenlettel írtunk fel”
Ha az első sor igaz arra a számra, akkor a következő sor is igaz.
Ha a második sor igaz, akkor a harmadik sor is igaz. Stb.
x=8
Vagyis ha az első sor igaz, akkor az x=8 is igaz.
De nekünk az kell, hogy az x=8 az a szám, amire gondoltunk és kimondtuk az állítást.
Vagyis: vissza kell helyettesíteni az első sorba.

Ezért egyáltalán nem szerencsés azt mondani, hogy ellenőrzés.
Jobb a visszahelyettesítés szó: ha az x=8 igaz, akkor az első sor is igaz.

Vagyis: az első sorból lépésenként az következik, hogy az x=8 lehet egyedül a megoldás. De nekünk nem ez kell. Hanem az, hogy az x=8 megoldás-e.
A visszahelyettesítésből az következik, hogy az x=8 az megoldás.

Így kiderült: az x=8 a megoldás, és más megoldás nem lehet.

Jellemezd, ábrázold: *f( )*:[–5;5]$\rightarrow$**R**; y=$\dfrac{2x^3-8x}{-3x^2-6x}$

Kikötés:

Definíció: *f( ):*[–5 ; 5] $\rightarrow$**R**; y=

D_f=

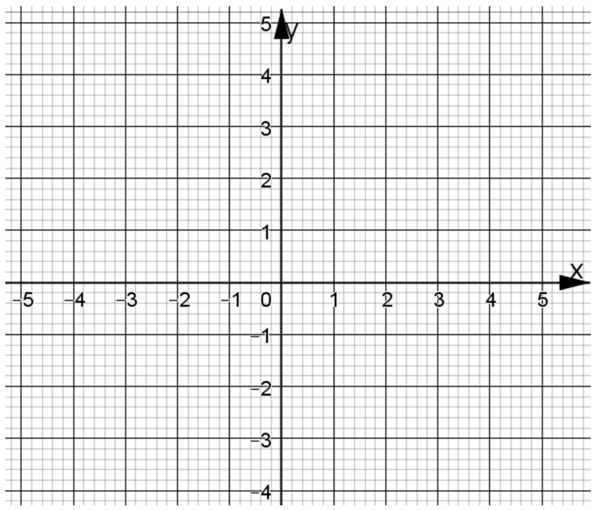
Típus:

ZH:

y tengelymetszet:
Fixpont:

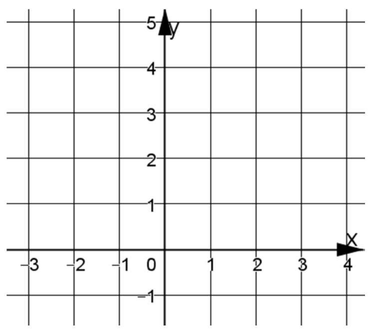
Menet – táblázat:

Inverz



inverz: f^{-1}( ): y=
R_f=

Írd föl azt a lineáris fv-t, mely grafikonja a következő két pontra illeszkedik.
A(3; 4) B(–2;2)



I/2) Egyenletek fő megoldási menete:

a) kikötések
b) úgy összevonni, hogy x^2-ből, x-ből, konstansból csak 1-1 db. legyen
   megoldás közben ekvivalencia figyelés
c) Ha első fokú: két oldalra rendezni: $ax=b$
d) ha másod fokú: egy oldalra rendezni („nullára redukálni), majd szorzattá alakítani!
e) Visszahelyettesítés!

* $12x^4 – 44x^3 + 31x^2 + 42x – 45$

I/3) Néhány gyakorlás

a) $5x=7x$

b) $–(7m+13)+3–3(m–4)=1–(2m–1)–8$

c) $5(x –2) – 2(3 – x) = –(4 –5x) – 2(– 2x + 3)$

d) $3(2 – 5x) – (2x + 7) = –2(3x – 4) – 3(3 – 5x)$

e) $3x–5(2x+3)=4–(5x+2)–3(3–x)$

f) $2(1-3x)-(5-2x)=-3(3-2x)+5(-3x-2)$

I/4) Látszólag másodfokú egyenletek:

Figyelem – emlékezzünk:

$(x-1)^2 \neq x^2-1$, hanem: $(x-1)(x-1)=$

$(x+1)^3=$

$(2x-3)(2x+3)=$

Oldd meg:

$(3-2x)(3x+1)-2x(5-x)=3(x-5)-2x(2x-5)+2$

I/5) Zárójelezés!!!!

a) $-\big(4(2x-1)(2x+1)\big)+\big(2(3x-2)(2x+3)\big)=\big(5(x+1)(x-1)\big)-\big((3x-2)^2\big)$

b) $-(x-2)^2-3(x-1)(x+1)+2=3x(2-x)-(x+2)(x-4)+3(2-x)$

c) $-(2x-3)^2+3x(5-4x)-4(7x-3x(2x-1)) = (3x-2)(3x+2)-(x-1)^2-5(2-3x)$

II. Főbb típusok

II/1) Törtes lineáris egyenletek

a) Egy kis számelmélet (ismétlés)

Számelmélet alaptétele: bármely egynél nagyobb természetes szám egyértelműn bontható fel prímtényezők szorzatára sorrendben való különbözőség erejéig.

Vagyis két (egynél nagyobb) természetes szám akkor és csak akkor egyezik meg, ha kanonikus alakjuk megegyezik.

Adott két szám, prímtényezőkre bontva:

$a=2^5\cdot5^3\cdot7^2\cdot11= 2156000$ $b=2^3\cdot3^2\cdot7^3\cdot11= 271656$

Mondj osztóit a *b*-nek (kanonikus alakban):

Mondj közös osztókat:

Lnko:

Lkkt:

Módszer 2 v. több szám legkisebb közös többszörösének kiszámításához: vesszük az összes előforduló prímtényezőt, és összeszorozzuk őket a szereplő legmagasabb hatványon.

$[12;15]=$

$[2\cdot3^2\cdot13;\ 2^2\cdot3^2\cdot5^3\cdot7^3\cdot11;\ 3^2\cdot7\cdot13] =$

Emlékeztető:
Egy szám osztóit és osztóinak számát: „Fa-struktúrával” határozzuk meg:
Először KANONIKUS ALAK – majd a fa-struktúra.

Két szám lnko-ját minden közös osztó osztja, és az lnko osztói közös osztói a két számnak.
Vagyis két szám közös osztói pontosan az lnko osztói (azok mind és csak azok – ettől „kitüntetett közös osztó” az lnko!)

Adjuk meg fa-struktúrával a következő két szám összes (pozitív) osztóját:

$a=2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11$ $\quad$ $b=2^2 \cdot 5 \cdot 7^3 \cdot 13$

b) Törtes lineáris egyenletek

(i) $\frac{3x}{2}-\frac{3-2x}{3}=-\frac{1-8x}{4}-1$

(ii) $\frac{3x-3}{12}-\frac{5x-10}{15} = -(x+1) - \frac{3-x}{2}$

(iii) $\frac{2}{7}(3x-7)-\frac{5(4x-1)}{49}=\frac{3}{14}x-\frac{20+18x}{196}$

(iv) $\frac{4x-3}{14}-\frac{3x+1}{6}-2=2+\frac{2-5x}{21}$

(v) $\frac{4x-1}{0,2}-\frac{3(5-2x)}{0,3}=\frac{8x-3}{0,5}+20x$

II/2) Több zárójel

a) $5(2-3(3x-2))=3(-19x-4(5-x))$

b) $x+2[x-3(x-4)]=24-3x$

II/3) Magasabb fokú, de *lineáris tényezők szorzatára* visszavezethető egyenletek:
Főcél: egy oldalra rendezni, szorzattá alakítani!
polinomegyenletnél (vagy azzá alakíthatónál) hány gyököt várunk?
Egy polinomegyenletnek max. annyi gyöke (megoldása van), ahányad fokú.

a) $(2x-3)(x-3\cdot(x+6))\left(\frac{x}{4}-\frac{3-x}{3}\right)=0$

A bal oldal egy tag, többtényezős szorzat. Ekkor a zárójeleket csak egy agyalágyult bontja föl. Örülünk, hogy már valaki szorzattá alakította a valójában harmadfokú kifejezést!
A bal oldal: egy tag, sok tényező - a jobb oldal 0. Ez a legjobb!
Egy szorzat akkor és csak akkor 0, ha valamelyik tényezője nulla.

b) Teljes négyzet:

(i) $(3x-2)^2 = -5$

(ii) $(5x+3)^2=36$

(iii) $(x+10)^2=0$

c) $x^2=x$

Hibás gondolatmenet:

$x^2=x$ /:x

$x=1$

Miért?

Ismeretlent tartalmazó tényezővel nyakló nélkül nem osztunk: hiszen elveszik egy olyan gyök, amikor az ismeretlent tartalmazó tényező 0 volt.

Emlékezzünk az fentebbi példára: $(2x-3)(x-3\cdot(x+6))\left(\frac{x}{4}-\frac{3-x}{3}\right)=0$

Itt nem leosztottunk, hanem megállapítottuk, hogy mindegyik tényező lehet 0.

Vagyis:

$x^2=x \Leftrightarrow$

Másod, vagy magasabb fokú egyenletek úgy oldunk meg, hogy egy oldalra rendezzük (0-ra redukáljuk), majd szorzattá alakítjuk.

Egy szorzat akkor és csak akkor 0, ha valamelyik tényezője 0.

d) $4(x-1)^2=-3(x-1)$ AKI $(x-1)$-gyel OSZT: GYEHENNÁRA KERÜL.

ISMERETLENT TARTALMAZÓ TÉNYEZŐVEL NEM OSZTUNK. SOHA. ☠☠☠☠

Vagyis:

e) $x^2=25$

Hibás gondolatmenet: $x=5$ Miért?

Eleve számíthatunk arra, hogy egy másodfokú kifejezésnek 2 gyöke van.

(Két egyszeres v. egy kétszeres vagy két komplex ☺ !)

Vagyis: megint egy oldalra kell rendezni, majd szorzattá alakítani.

f) $4x^3=36x$

g) $(x+1)^2=4$

$-3x^2+24x=-195$

h) $20x^2=15-20x$

i) $(5x-1)(x-3)-(3x+1)(x-3)=4x(x-3)$

j) $(3x-1)(2-x)-2x+4=(x+1)(x-2)$

k) $-3x^4-6x^3+3x^2=-6x$

II/4) A nevezők kezelése: kikötések, közös nevezők, szorzattá alakítások, egyszerűsítése.

Egyszerűsítsünk a kikötések mellett: CÉL: SZÁMLÁLÓ-NEVEZŐ: 1 TAG, A FŐEGYÜTTHATÓ ⊕

$$\frac{x^3-x}{x^3-2x^2+x}=$$

$$\frac{5x^2-3x}{25x^3-9x}=$$

$$\frac{6x^3-3x^2-3x}{4x^2-2x^3-2x}=$$

$$\frac{3x^3-12x}{2x-x^2}=$$

II/5) Algebrai törtes egyenletek Figyelem: csakis 1 tag tényezőit egyszerűsítjük, csakis tényezővel:

☠💣 $\frac{3x+1}{x} \neq \frac{3\cancel{x}+1}{\cancel{x}}$ =4 ☹👎 Ugyanis: a számláló 2 tag!

EGYSZERŰSÍTENI CSAK AKKOR SZABAD, HA A SZÁMLÁLÓ ÉS A NEVEZŐ IS EGY TAG. EKKOR AZONOS TÉNYEZŐVEL LEHET EGYSZERŰSÍTENI (Vigyázat: kikötés!)

Tehát jól: $\frac{3x+1}{x} = \frac{(3x+1)}{x}$ Így már 1 tag, de lám nem ugyanazok a tényezők, tehát NEM lehet egyszerűsíteni!

Egyenletet csak akkor szorzunk ismeretlent tartalmazó tényezővel, ha már nem tudunk egyszerűsíteni!

a) $\frac{3x+2}{x-1} = -1$ Kik.: x≠

b) $\frac{x^2-9}{3-x} = -3$ Kik.: x≠

c) $\frac{2x^2-18}{3x+9} = -5$ Kik.: x≠

d) $5 - \frac{3}{x-2} = \frac{2x+1}{4-2x}$ Kik.: x≠ FIGYELEM: A FŐEGYÜTTHATÓ + LEGYEN!!!

e) $\frac{2x+2}{4-2x}+\frac{x-3}{2-x}=\frac{15}{3x-6}-\frac{x+1}{x-2}-2$ Kik: x≠

f) $\frac{\left(2x^2-28x+98\right)\left(3x-54\right)}{x^2-324}=0$ Kik.: x≠

g) $\frac{3-2x}{2x-1}-\frac{6-2x}{x-4}=1$ Kik: x≠

Ezentúl se feledjük a kikötéseket!

h) $$\frac{6x+1}{3x+2}-\frac{3x+3}{x^2-1}=\frac{2x}{x-1}$$

i) $$\frac{7}{x^2-4x+4}-\frac{2}{x^2+4x+4}=\frac{10}{2x^2-8}$$

j) $$\frac{4x+2}{x-3}-12=\frac{16x-20}{6-2x}$$

k) $\frac{2x+1}{3x+1} : \frac{2}{x} = \frac{x+1}{3}$

l) $\frac{5x^2 - 30x + 45}{6 - 2x} = 6x - 1$

m) $\frac{7}{2x^2 - x} + \frac{8}{x} = \frac{1}{2x-1}$

n) $\dfrac{7x-21}{x+1}:\dfrac{2x-6}{3x^2-3}=6x-12$

o) $\dfrac{3x+1}{3-3x^2}-\dfrac{5}{2x+2}=-\dfrac{6}{3x-3}$

p) $\dfrac{3}{5-10x}-\dfrac{3x}{8x^2-2}=-\dfrac{5}{6x-3}$

q) $12\cdot x^4 + 2x = 8\cdot x^3 + 3\cdot x^2$

r) $36\cdot x^4 + 4 = 25\cdot x^2$

s) $60\cdot x^3 = 88x^2 + 20x$

t) $$-\frac{28}{18-2x^2}+\frac{5}{15-5x}-\frac{8-2x}{-2x-6}=1:\frac{6+2x}{14}$$

u) $$\frac{6x^2+7x-5}{8x^2-8x+2}-\frac{5x^2+17x-12}{2x^2+7x-4}=\frac{3x^2-14x+11}{2x-2}$$

v) $5x^4=15-10x^2$

II/6) Alapvető hibák egyenletmegoldásnál

- **Rosszul írjuk le a példát…** ☹. *(Ezért kár volt fölkelni.)*
- **Kimarad a kikötés és a VH.** ☠ *(Ez csak odafigyelés kérdése. Így majd a Radnótisok és a Patrónások megelőznek bennőtöket a tudomány országában.)*
- **Eltűnő előjelek és átalakuló betűk, számok**: ☝ *(Ha trehány vagy és élvezed, hogy fájdalmat okozol magadnak, akkor mazochista vagy, mért nem bökdösöd még közben magad egy tűvel is. Élvezed, nem?)*
- **Nem egyszerűsítesz.** *Újra csak mazochizmus… A köbön.*
- **Egyenletet úgy szorzol, hogy elfelejted minkét oldal minden tagját beszorozni**. 👎 *(Ha válogatsz, mit szorzol meg, mit nem, akkor rádsütik, hogy rasszista vagy…)*
- **Törtet úgy szorzol, hogy nemcsak a nevezőt tünteted el, de a számlálót is megszorozod!** 💣
- **„Hová tűnt a sok jó gyök?”** 🔔 („Sag mir wo die Blumen sind”)
  Sajnos gyököt vesztünk, ha ismeretlent tartalmazó tényezővel osztunk: pl.:

  Lássunk egy ilyet:

  $3x(2x-3)=5x(2x-3)$ /:$(2x-3)$
  $3x=5x$
  $0=2x$
  $x=0$
  És az $x=3/2$ hová tűnt?

  Vagy: $3x(2x-3)=5x(2x-3)$ /:x
  $6x-9=10x-15$
  $6=4x$
  $x=3/2$
  És az $x=0$ hová tűnt?

  Helyesen megoldva:

  $3x(2x-3)=5x(2x-3)$
  $0=5x(2x-3)-3x(2x-3)$
  $0=(2x-3)(5x-3x)$
  $0=(2x-3)(2x)$

  I.
  $2x-3=0$

  II.
  $2x=0$ stb.

  Vagy:

  $3x(2x-3)=5x(2x-3)$

  I.
  $x=0$
  $3\cdot0(2\cdot0-3)=5\cdot0(2\cdot0-3)$
  $0=0$
  Vagyis $x=0$ megoldás

  II.
  $x\neq0$ (Ez nem kikötés: hanem eset!)
  $3x(2x-3)=5x(2x-3)$ /:$x\neq0$
  $3(2x-3)=5(2x-3)$
  $6x-9=10x-15$ stb.
  $6=4x$
  $x=3/2$

II/7) $a^n-b^n=$

$(x-7)(x+7)=$

$(x-3)(x^2+3x+9)=$

$(x-5)(x^3+5x^2+25x+125)=$

$(x-2)(x^4+2x^3+4x^2+8x+16)=$

$(x-3)(x^5+3^1\cdot x^4+3^2\cdot x^3+3^3\cdot x^2+3^4\cdot x+3^5)=$

$(x-5)(x^6+5^1x^5+5^2x^4+5^3x^3+5^4x^2+5^5x^1+5^6)=$

Vedd észre: az egyik kitevője egyesével csökken, a másiké 0-ról egyesével nő.

$(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b^1+a^{n-3}b^2+\ldots+a^{n-k}b^{k-1}+\ldots+a^2b^{n-3}+a^1b^{n-2}+b^{n-1})=$

$x^3-y^3=$

$x^3-1=$

$(x-1)(x^3+x^2+x+1)=$

$x^5-1=$

$x^6-1=$

„In medio stat virtus”: Vagyis ha lehet a két tényező fokszáma legyen egyenlő, vagy közeli egymáshoz!

$x^6-1=$

$1-x^5=$

$x^4-1=$

„In medio stat virtus”

$x^4-1=$

$(3x-1)(9x^2+3x+1)=$

$8x^3-1=$

$(2x-3)(4x^2+6x+9)=$

$(3x-2)(\qquad\qquad\qquad)=$

$27x^3-8=$

$243x^5-32=$

$x^{12}-2^{12}=$

III. Grafikus megoldás

III/1) Oldd meg grafikusan

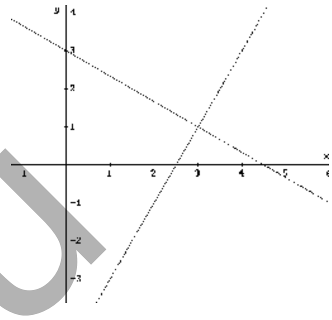
$$2x-5=\frac{-2x+9}{3}$$

tanm_fuggvenyek_egyenletek_B_3_1.ggb

Kérdés, mely *x*-ekre lesz igaz az fenti egyenlet. Vagyis melyik az az *x*, amelyet mind a bal oldalba, mind a jobb oldalba behelyettesítve, „bedobva” ugyanazt az értéket adják.

Nézzük, az összes lehetséges *x*-re a bal oldal miket ad, és miket ad a jobb oldal.

Azonban ez már azt jelenti, hogy fv-ként írjuk fel a két oldalt.



b( ):**R**→**R**; *y*=2*x*–5

j( ): **R**→**R**; $y=-\frac{2}{3}x+3$

A képről nagyjából úgy látszik: *x*=3 jó.

De biztos ez? Vissza kell helyettesíteni.

Lehet-e más megoldás.

1. ötlet:
Ha egy oldalra rendezünk: az egyik oldal lineáris, a másik konstans 0: (8/3)*x*–8=0
Igenám, de ez az elsőfokú fv. sz. m. nő, vagyis csakis egy zérushely van, hiszen a zérushely előtt –, azután + a fv.

2. ölet:
Az eredeti 2 fv-nél a bal oldal sz.m.n., a jobb sz.m.cs.: vagyis, ha *x*=3-ban közös értéket vettek föl, akkor az *x*=3 előtt az egyik ennél a közös értéknél (1) nagyobbat, a másik kisebbet; az *x*=3 után fordítva.

(3. ötlet: 1 fokú egyenletnek max. 1 megoldása van: De csak erre hivatkozni: nem fogadom el)

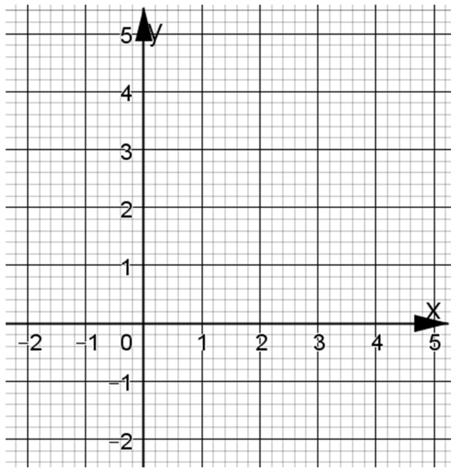
Tehát: <u>*x*=3</u> az egyedüli megoldás.

III/2) Általában:

- Mindkét oldalt átírni ismert fv. hozzárendelési alakba (legkényelmesebb 1 oldalra rendezni az egészet, a másik oldal: konstans 0.)
- ábrázolás
- leolvasás.
- visszahelyettesítés
- tisztázása annak, hogy miért nem lehet több megoldás
- Figyelem, nem szerencsés, ha mindkét oldal ugyanúgy monoton.
- Mire jó a grafikus mo? itt talán nem olyan fontos, de vannak egyenletek, ahol nagyon sokat segít. Itt gyakoroljuk.

III/3) Gyakorlatban

$3-x=2x-1$



b( ):R→R; y=−x+3
j( ): R→R; y=2x−1

Úgy látszik: x= ________ jó.
Visszahelyettesítés:

Lehet-e más megoldás.
Nem, mert a baloldal ____________, a jobboldal pedig _____________

IV. Mikre jó az egyenletek – pl.: néhány szöveges egyenlet
Most egyismeretlenes egyenletekkel dolgozunk. Később egyszerűbb lesz egyenletrendszerekkel, ahol több ismeretlent is használhatunk.

IV/1) Gondoljatok egy számot, szorozzátok meg 2-vel, a szorzathoz adjatok hozzá ötvenet, a kapott számot osszátok el kettővel és a hányadosból vegyétek el a gondolt számot. Igaz-e, hogy az eredmény mindig 25 lesz?

IV/2) Egy kétjegyű számban a tízesek helyén álló szám 6-tal nagyobb az egyesek helyén álló számjegynél. Ha mindkét számjegyet eggyel növelem, majd felcserélem őket, akkor az így kapott és az eredeti szám összege 121. Melyik az eredeti szám?

IV/3) Egy apának, az anyának és a lányának az életkora összesen 85 év. Az apa 5 évvel idősebb, a lány pedig 25 évvel fiatalabb az anyánál. Hány évesek külön-külön?

IV/4) Mekkorák az egyenlőszárú háromszög szögei, ha az alapon fekvő szöge 36°-kal nagyobb a szárak szögénél? (Melyik is ez a háromszög???)

IV/5) Ha egy szám 15%-ához hozzáadunk 9/5-ödöt, akkor a szám 18%-át kapjuk. Melyik ez a szám?

IV/6) 60 kg 25%-os sóoldatunk van. Hány liter (kg) tiszta vizet kell hozzáönteni, hogy 20%-os oldatot kapjunk?

IV/7) A boltban 28 %-os (tömeg %) permet- és 63 %-os permetlé van. Azonban 43 %-os oldatra van szükség, mert ez az engedélyezett sűrűség, és ebből 14 kg kell. Hogyan keverje ki az eladó a szükséges oldatot?

IV/8) Kompetencia-mérések példái

a) Egy gyógytea adagolása a következő: 1 bögre (0,25 liter) vízhez 2 kanál teafüvet kell hozzáadni. Hány kanál teafű szükséges 1 liter főzet elkészítéséhez?

b) (Figyelem: LKKT): Zalán vitaminkúrát tart, három különböző vitamint szed. D-vitamint 2 naponta, A-vitamint 3 naponta, E-vitamint 4 naponta vesz be. Ma reggel mindegyik vitaminból bevett egyet. Legközelebb hány nap múlva kell ismét mindhárom vitamint bevennie?

c) Egy presszóban a kávégépnek 2,5 literes a víztartálya. Legfeljebb hány adag presszókávé főzhető ezzel a kávégéppel egy teli tartály vízből, ha egy adag kávé elkészítéséhez 50 ml víz szükséges?

d) Attila permetlét szeretne készíteni gyümölcsfái permetezéséhez rovarok és gombák ellen, ehhez a permetszereket vízben kell feloldani.
A következő útmutató olvasható a két szer csomagolásán:
Gombák elleni por
Alkalmazás: 5 gramm 10 liter permetlé készítéséhez.
Tasak tartalma: 20 gramm
Rovarok elleni oldat
Alkalmazás: 30 ml 7 liter permetlé készítéséhez.
Üveg tartalma: 150 ml
Mennyit mérjen ki Attila a GOMBÁK ELLENI PORBÓL, ha 14 literes permetezőgépét szeretné megtölteni permetlével?

Attila egyszerre szeretné használni a két permetszert. A lehető legtöbb permetlét szeretné előállítani a rendelkezésre álló 20 gramm gomba elleni és a 150 ml rovar elleni permetszerből. A permetlé elkészítéséhez az útmutató alapján mindkét szerből megfelelő mennyiséget tesz egy edénybe, majd felönti vízzel. Legfeljebb hány liter permetlét tud így készíteni?

e) Egy városban fölmerült, hogy szobor kerüljön a város főterére, ezért szavazást írtak ki a kérdésben. Ahhoz, hogy a szobor elkészüljön, a szavazók legkevesebb 70%-ának kell igennel szavaznia. Legkevesebb hány igen szavazat kell ahhoz, hogy a szobor megépülhessen, ha a szavazáson 13 860 fő vett részt?

V. Ismétlés

V/1) Egyenletek

a) $\frac{4x+2}{x-3}-12=\frac{16x-20}{6-2x}$

b) $\frac{2x+1}{3x+1}:\frac{2}{x}=\frac{x+1}{3}$

c) $6x^3-24x=2x^4-8x^2$

d) $\frac{x+1}{2-2x^2}-\frac{2x-1}{x^2-1}+\frac{6}{x+1}=\frac{1}{2x-2}$

e) $\frac{3x-1}{x}:\frac{5}{x}=(3x-1)(2-x)$

V/2) Egyszerűsíts

a) $\frac{2x^2-x}{3x^2-x}=$

b) $\frac{x^2-x-6}{2x^2-7x+3}=$

V/3) Egyenlet

a) $\frac{x+2}{x+6}:\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{x}\right)=\frac{2x}{3}$

b) $(x-1)^3+2=x^3+3x-2$

c) $\left(\frac{2x}{3}-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{5}{3}-\frac{3}{2}x\right)=\left(\frac{3x}{2}-\frac{7}{6}\right)\left(\frac{7}{8}-\frac{2}{3}x\right)$

d) $\frac{6x+5}{x+5}-\frac{4x-3}{x-3}=2$

e) $5x-\frac{2}{x+1}=x^{2}-\frac{2}{x+1}$

V/4) Egyszerűsíts

a) $\dfrac{2x^2+3x-2}{\dfrac{1}{x}-2}=$

b) $\dfrac{x-y}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}}=$

V/5) Szöveges gyakorló

a) Ossz fel 2:7 arányban 180 gombóc fagyit!

b) Egy tanuló iskolai kirándulásra a szüleitől pénzt kapott. Ha a kirándulás minden napján, kivéve az utolsót, 150 forintot költött volna, akkor az utolsó napra 100 forintja maradt volna. Ezért minden nap csak 100 forintot költött, és így az utolsó napra 350 forintja maradt. Hány napig tartott a kirándulás?

c) Egy 6750 kg-os farakásban 200 db (fenyőfa vagy tölgyfa) gerenda van. Egy fenyőfa gerenda tömege 30 kg, a tölgyfáé 45 kg. Hány fenyőfa és hány tölgyfa gerenda van a farakásban? (Melyik példára emlékeztet ez a feladat?)

d) Egy 8 tagú társaság egy turistaházban szállt meg. 3 nappal később egy 6 tagú társaság csatlakozott hozzájuk, és még 7 napot töltöttek együtt. Közös számlájuk 183 000 forintot tett ki. Mibe került egy fő egy napi szállása?

V/6) Százalékszámítás

a) Százalék: **„Nincs százalék, csak százados törttel való szorzás"**

- Mennyi 150-nek a 60%-a?

- Minek a 42%-a 105?

- Mit növeltem 30%-kal, hogy 156 lett?

- Húsz gombapörkölt közül 12 friss, 5 romlott, a maradék mérgező.
  A gombapörköltek hányad része friss?_______
  egyszerűsítve: _________ százalékban: ________

  A gombapörköltek hányad része romlott?______
  egyszerűsítve: _________ százalékban: ________

  A gombapörköltek hányad része mérgező?______
  egyszerűsítve: _________ százalékban: ________

- A 70 évfolyam-DVD-ből csak 13 maradt meg. Hány százalék fogyott el?

- Tavaly 200 tyúkunk volt, idén 23%-kal több, azaz ___________

- A 180 összpontból 162-őt értél el, ami _________százalék.

b) Változás

- Megnőtt az eredetileg 170 forintos kenyér ára 20%-kal, de azután a nagy tiltakozásra lecsökkenték 20%-kal. Mennyi most az ára?

- Hány százalékkal növekedett meg a falu létszáma, ha 120-ról 170 –re nőtt?

- Hány százalékkal csökkent a 190, ha ma már csak 110?

- Egy cipő ára megnőtt 43%-kal, így ma már 23000. Mennyi lehetett tavaly?

- A csirkeállomány lecsökkent 22%-kal, így csupán 9 750 van. Mennyi lehetett tavaly?

c) Gyakorlás

- 200-nak a 10%-a:_______ 25%-a:__________

  40%-a:_________ 75%-a:_______________

- Mi az a szám, aminek a 25%-a 40?

  És aminek a 60%-a 120?

- Hány százalékot számolunk, ha valaminek a…
  kétötödét vesszük?

  0,02-szeresét vesszük?

  háromnyolcadát vesszük?

  0,123-szorosát vesszük?

  hat ötödét számoljuk?

  0,4-szeresét vesszük?

  1,12-szeresét vesszük?

VI. 5-ösöknek

VI/1) $n \in \mathbf{N}$. p prím. Oldjuk meg: $n^4+n^2+1=p$. Segítség: egész számos feladatoknál az egyik legerősebb eszköz a szorzattá alakítás.

VI/2) $x,y,z \in \mathbf{N}$. Oldd meg: $x^2yz+xy^2z+xyz^2=1463$ Segítség: egész számos feladatoknál az egyik legerősebb eszköz a szorzattá alakítás.

VI/3) p és q pozitív prímek. $p|q^2-1$ és $q|p^2-1$. Mi a két prím? Segítség: egész számos feladatoknál az egyik legerősebb eszköz a szorzattá alakítás.

VI/4) $a,b \in \mathbf{N}$ $2ab+a-4b-32=0$ Vigyázz, ezt nem lehet szorzattá alakítani. Mégis, valamiféle szorzatra szükség van!

VI/5) Egy Milka csoki 200 Ft-ba kerül. A csomagolásában van egy kis kártya. 10 kártyáért lehet kapni egy Milka csokit, amiben persze továbbra is ott van egy kártya. Kész idegbaj. Most már tényleg tudni szeretnénk, hogy valójában hány Ft-ba kerül egy tábla Milka csoki tisztán?

VI/6) Valaki pozitív egészeket ír egy lapra. Hány felírt szám esetén lehetünk biztosak abban, hogy kiválasztható közülük három, amelyek mind azonos számjeggyel kezdődnek.

VI/7) Az A és a B városból (távolságuk 20 km, egyenes út van köztük) elindul egy gyalogos és egy kerékpáros. A gyalogos 5 km/h-val, a kerékpáros 20 km/h-val halad. Induláskor egy döglégy a gyalogos orráról elindul a kerékpáros orráig 40 km/h-val, majd vissza a gyalogoshoz és így tovább. Hány km-t tesz meg szegény döglégy, míg összetalálkozik a gyalogos és a kerékpáros – és légydög lesz az orrukon.

VI/8) Egy körre fölrajzoltunk 2020 fehér és egy piros pontot. Az összes lehetséges sokszögek közül, melyek csúcsait ezek a pontok alkotják, melyikből van több: amelyeknek van piros csúcsa, v. amelyeknek nincs? Vagy tán egyenlő? Vagy egyik sem? Vagy ma nincs véleményed?

VI/9) Nyuszika 10 nyusziugrással van előrébb Vuk-tól. „Fogócskáznak." Míg Vuk 3-at ugrik, addig Nyuszika 5-öt. Vuk ugrása azonban 2-szer nagyobb, mint Nyuszikáé. Hány Vugrás után lesz Nyuszikából tepsifüles (Vuk vacsora)?

VI/10) Hány olyan 6 jegyű páros szám van, amelyben pontosan 1 db. 5-ös számjegy szerepel. És amelyben legalább egy db. 5-ös számjegy van? És amelyikben egy számjegy sincs? Na?

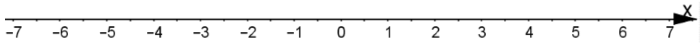
VI/11) Egy vázában 75 fehér és 150 fekete babszem van, (mellette „talonban" rengeteg fekete). Találomra kiveszünk kettőt. Ami köztük fekete, azt lerakjuk a váza mellé, a maradékot (ha van) visszatesszük. Ha mindkettő fehér: azokat messze eldobjuk és berakunk helyettük egy feketét. Hogyan változik a vázában a babszemek száma? Milyen színű lesz az utolsó babszem? Ha fehér, szeret, ha fekete, nem szeret.

Függvények és Egyenletek: C
Lineáris, v. lineáris tényezőkből álló egyenlőtlenségek, nevezetes szorzatok

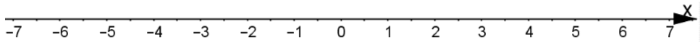
I. Bevezetés

I/1) Jelöld be azokat a számokat a számegyenesen (mindegyikhez külön számegyenest használj!)

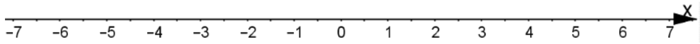
a) amelyek $\leq$ 5



b) amelyek 3-szorosa > 4



c) Amelyek –2-szerese $\leq$ 5



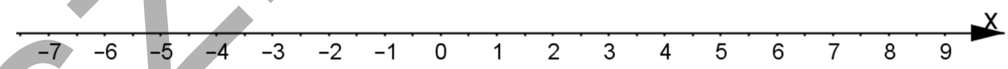
I/2) Az **egyenlőtlenségek végeredményei** általában: nyílt, zárt félig nyílt intervallumok, ritkán 1-1 konkrét szám, illetve az intervallumok és diszkrét halmazok uniói, különbségei.

Ezért itt **nincs értelme a visszahelyettesítésnek**. Csakis ellenőrzésnek, amely igazából a tévedés miatt jó, az ellenőrzés csak a saját hibáink megtalálása miatt van. Az ellenőrzés nem a szokott módon megy: hanem a megtalált intervallumok szélső pontjaival, és egy-egy belső ponttal.

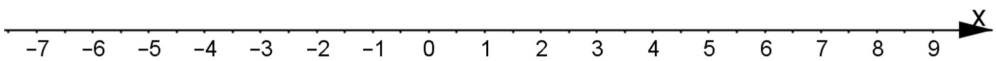
Akkor mi a megfelelője az egyenleteknél szokásos visszahelyettesítésnek? Itt végig ekvivalens átalakítást kell alkalmazni.

I/3) Határozd meg azokat az *x*-eket *intervallummal*, és *jelöld számegyenesen*, és melyekre igazak a következő állítások

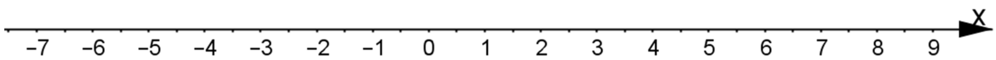
a) $x \leq 4 \wedge x < 2$



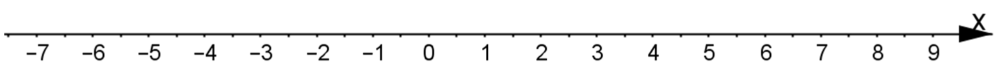
b) $x \leq 4 \vee x < 2$



c) $x \leq 7 \wedge x > -3$



d) $x < 3 \vee (x \geq 5 \wedge x < 8)$



II. Lehetséges, „nyakló nélkül" végrehajtható átalakítások az egyenlőtlenségeknél, illetve célok (egy oldal, szorzat)

II/1) A lényeg: ekvivalens átalakítások legyenek

a) Alapműveletek

- **Hozzáadás, elvétel**: ha mindkét oldalhoz ugyanannyit adunk v. veszünk el, a reláció nem változik.
- Ugyanígy a **pozitív számmal** történő **szorzás** (osztás).
  Vagyis ami kisebb volt, kisebb marad, **ami kisebb maradt az kisebb volt**, stb.
  „Mérleg elv – megmaradnak a relációk a lépés után."
  Figyelem, vegyük észre, hogy **mindkét irányt** elmondtuk:
  ezek tehát: ekvivalens átalakítások!
- Negatív számmal történő szorzás, osztás
  Ami kisebb volt az nagyobb lett, **ami nagyobb lett az kisebb volt**, stb.
  „Tükrözés – megfordulnak a relációk a lépés után!" (Még később lesz róla szó!!!!)
  Figyelem, vegyük észre, hogy **mindkét irányt** elmondtuk:
  ezek tehát: ekvivalens átalakítások!

$x-3<2$	$x+3 \geq -5$	$-3x\geq 6$	$\frac{x}{2}+1\geq -3$	$7-\frac{x}{5}\leq 4$
$\Updownarrow$	$\Updownarrow$	$\Updownarrow$	$\Updownarrow$	$\Updownarrow$
			$\Updownarrow$	$\Updownarrow$

b) Ismeretlent tartalmazó tényezővel osztás-szorzás: csakis, ha eljutunk oda. (Csak amikor odaérünk, akkor robbantjuk fel a hidat ☺.)
Hatványozás – gyökvonás = Gyehenna tüzén lassan forgatva…

II/2) „Beszorított" - „kettős egyenlőtlenségek" kezelése

$$3 < -2x + 3 \leq 10$$

II/3) Őrültségek az egyenlőtlenségek végeredményeinél

$x>2 \wedge x<1$:

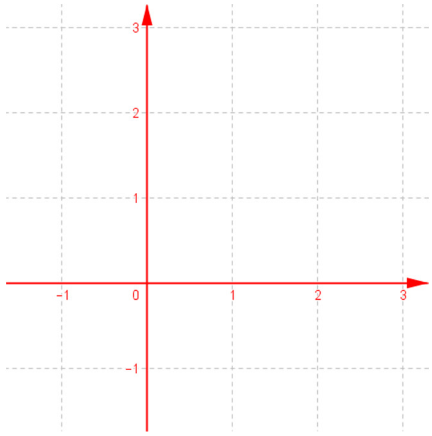
$x\geq 3 \wedge x<5$:

$x<7 \vee x\geq -3$:

II/4) Nagyon kényelmes „magasabb fok”: egy oldalra rendezve, szorzattá alakítva:

a) Lineáris fv. mikor ad negatív, 0 illetve + értéket:

f( ): **R**→**R**; y=–2*x*+1



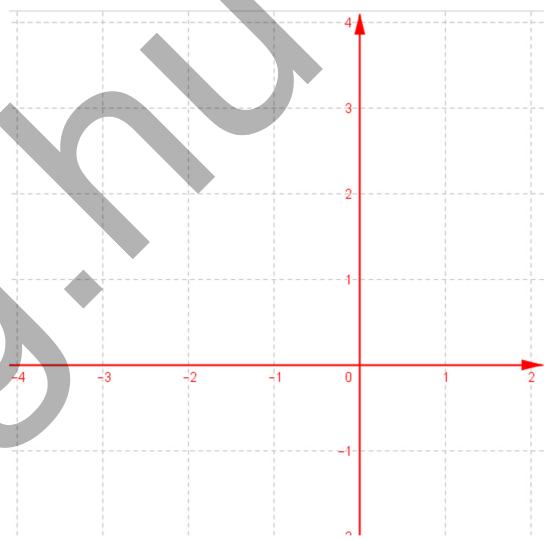
SZÍNES LEGYEN
A KÉT KOORDINÁTA TENGELY

Vagyis:
–2x+1>0 megoldása:

–2x+1≤0 megoldása:

Rajzoljuk be az előjel grafikonját!

g( ): **R**→**R**; y=x+3

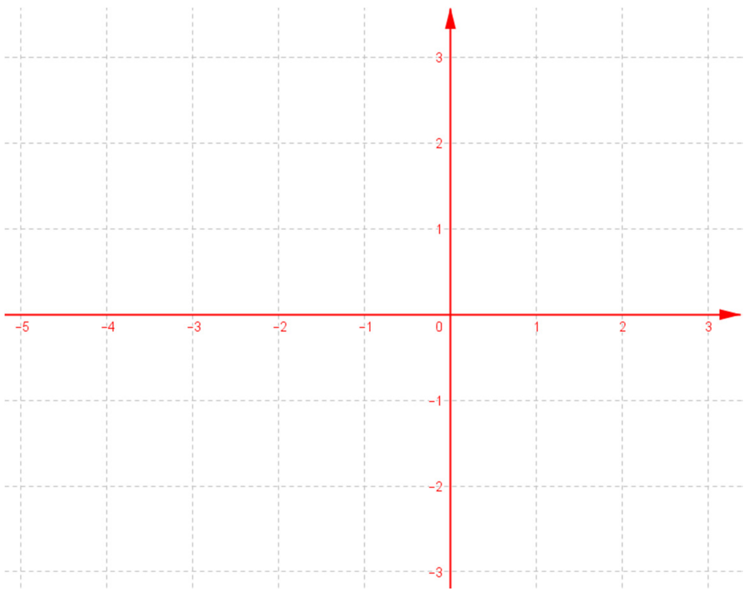


Rajzoljuk be az előjel grafikonját!

Előjel**grafikon**nal:

b) (–2x+1)(x+3)≤0

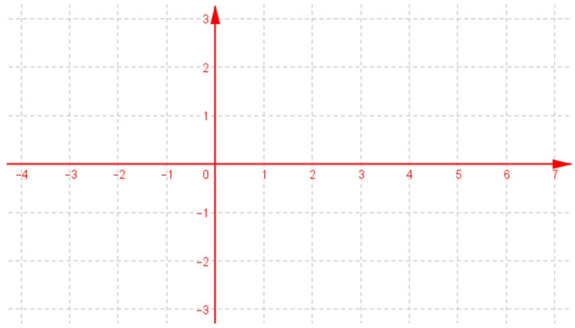
Figyelem:
Ez NEM GRAFIKUS MEGOLDÁS! A ZH-eket pontosan számoljuk.
Ez ELŐJEL-GRAFIKON!



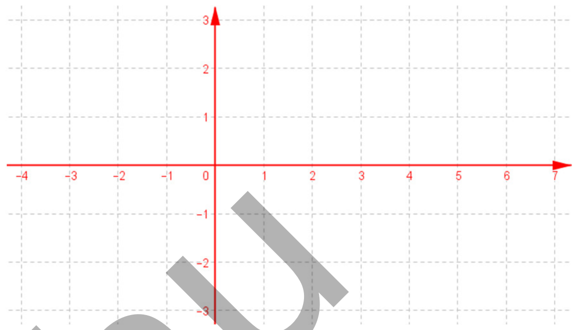
II/5) Rajzold föl a függvényt és az előjelgrafikont

a) Függvényeknél

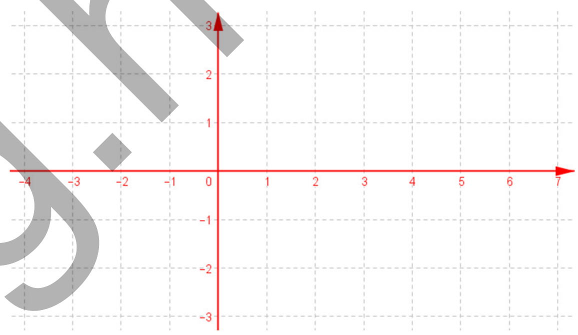
- f( ): **R**→**R**; y=3x–1



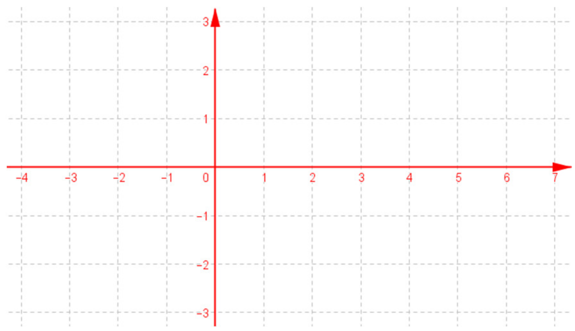
- g( ): **R**→**R**; y=–2x+2



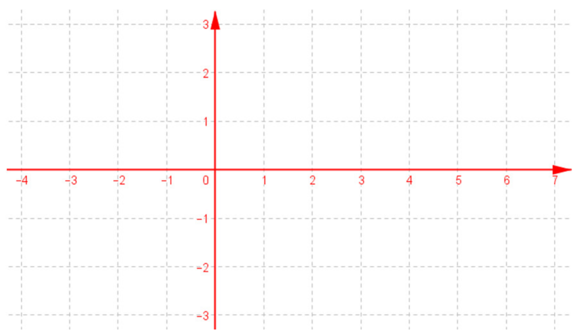
- h( ): **R**→**R**; y=$\frac{1}{2}x$–2



- h( ): **R**→**R**; y=$-\frac{2}{3}x$–1



- h( ): **R**→**R**; y=–1,5x



b) Szorzatok – a tényezők előjelét figyelve:

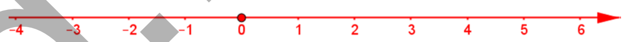
(i) $x(2x-4)>0$

$x\in$

(ii) $(x-4)(1-x)\leq 0$

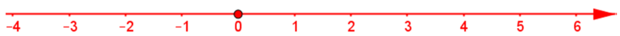
$x\in$

(iii) $(3-x)(2x+3) <0$



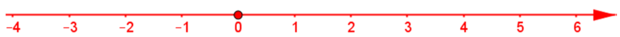
$x\in$

(iv) $-16x^2+9\geq 0 \Leftrightarrow$



$x\in$

(v) $2x^2 > x+6 \Leftrightarrow$



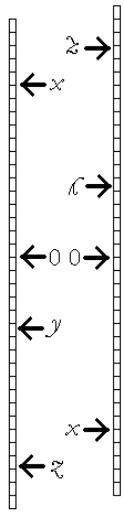
$x\in$

III. Az egyenlőtlenségek megoldásának buktatói és gyakorlás

III/1) Negatív számmal történő osztás-szorzás: szabad, néha kell, de óvatosan!!!!

Hibásan	Jól	Magyarázat Gyakorlatilag a két oldal átcserélése
$-2x \geq 3$ /:(–2)	$-2x \geq 3$ /·(–1)	$-2x \geq 3$ /–3
$x \geq -3/2$	$2x \leq -3$	$-3-2x \geq 0$ /+2x
	$x \leq -(3/2)$	$-3 \geq 2x$

Próbáld ki a végeredményt néhány számmal…



A negatív számmal történő szorzás: olyan, mintha mindent tükröznénk. Türközünk középpontosan a 0-ra, vagyis mintha feje tetejére állítanánk a vonalzót.
Ami lentebb volt, az fentebbre került és fordítva.

Vagyis: ha egyenlőtlenséget negatív számmal osztunk v. szorzunk, akkor a relációjel megfordul.

Oldd meg:

3x–5 ≥ 4x–7

–3x<0

–5x < –30

(x–1)(x+1) ≤ (3–x)(x+5)

$(5-2x)^2 < -(3-2x)(3+2x)$

III/2) Ismeretlent tartalmazó tényezővel, vagy ismeretlennel történő osztás, szorzás: nagyon veszélyes: I. II. III. részre esik szét általában – INKÁBB NE!!!

HIBÁS MEGOLDÁS:

$\frac{3}{x-1} \le 2 \quad \Leftrightarrow \quad 3 \le 2x-2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{2} \le x-1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{5}{2} \le x$ (2,5≤x).

Nézzünk néhány elveszett, illetve hibás megoldást:

Elvezett az x=–3, vagy az x=3 ? Ezek pedig jók!

Oldjuk meg újra: Először is: kikötés: $x \neq 1$ $\frac{3}{x-1} \le 2$ Kikötés: x≠1.

1. Mo.: ESETEKRE BONTÁS – *egyszer megnézzük, de nem javasolt*!

I. II. III.

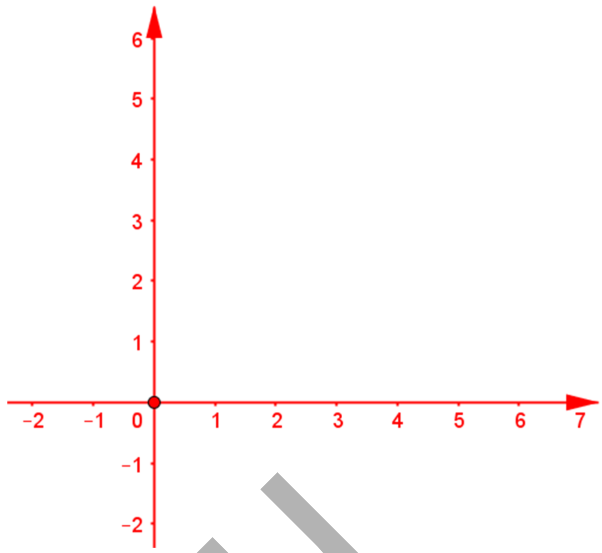
Végig ekvivalens átalakítást végeztünk!!! $\boxed{x \in \quad\quad\quad\quad}$

Vagyis: egyenlőtlenséget ismeretlent tartalmazó tényezővel nyakló nélkül nem osztunk, szorzunk.

2. Mo.: ELŐJEL GRAFIKON: A javasolt megoldás:

Algebrai törtes egyenlőtlenségeknél egy oldalra rendezünk, majd szorzattá alakítunk.

$$\frac{3}{x-1} \le 2 \Leftrightarrow$$

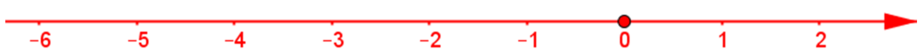


Egy szorzat akkor csak akkor negatív, ha páratlan tényezője negatív, a többi pozitív. Előjel grafikon: (előtte a számláló és nevező fv-ét érdemes megnézni még a kezdetekben!)

Előnye: százszor egyszerűbb, nehezebb elszúrni. Csak az előjel-grafikonra legyen felírva, hogy előjel-grafikon, és csak abszcissza legyen.

Gyakorlás:

$$\frac{x}{x+2} \ge 2 \Leftrightarrow$$



III/3) Reciprok: soha. ☠☠☠☠☠☠☠☠☠

$$\frac{2}{x-1}<\frac{3}{2x+6}$$

Hibásan:

Nézzük meg az 5-öt: ott nem igaz! De a –3 és az 1 között jó! A –21 pedig elveszett.
Mi is a veszély: Mintha kétszer szoroznánk föl ismeretlent tartalmazó tényezővel…

Vagyis egyenlőtlenségnél TILOS reciprokot venni.

Vagyis Mo.: mint korábban.
Kik.:

$$\frac{2}{x-1}<\frac{3}{2x+6} \quad \Leftrightarrow \quad 0<$$

Előjelgrafikon:

Mo.: x∈

Ne feledjük azonban:

$$0<\frac{-x+15}{2(x-1)(x+3)} \quad \Leftrightarrow \quad 0>\frac{}{2(x-1)(x+3)}$$

III/4) MÉG EGYSZER VÉSSÜK AZ ESZÜNKBE:

- Csakis ekvivalens átalakításokkal dolgozunk!!!
- Negatív számmal történő szorzásnál megfordul a relációjel
- Ismeretlent tartalmazó tényezővel, vagy ismeretlennel történő osztás, szorzás: nagyon veszélyes- DE SZABAD: ESETEKRE BONTÁSSAL I. II. III. részre esik szét általában!!!!: **LEGINKÁBB EGY OLDALRA, SZORZATTÁ ALAKÍTVA.**

IV. Gyakorlás

IV/1) $-2(x-3)-1 \leq \frac{x-1}{2}+5$ Nyugodtan szorozzuk 2-vel az egész egyenlőtlenséget!

IV/2) $1-\frac{4x-1}{6}<1{,}5-\frac{x-3}{3}$ Nyugodtan szorozzuk 6-tal az egész egyenlőtlenséget!

IV/3) $(x-1)^2-3<(x+1)^2-4(x-1)$

IV/4) $\frac{4x^2-25}{6x-15} \leq 3-\frac{x^2-3x}{2x}$

Kik.:

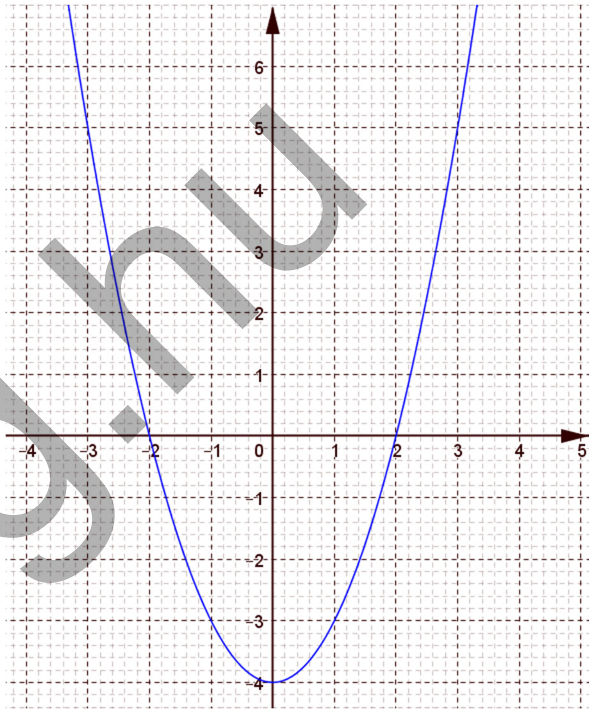
IV/5) $-4(5+x)+3 \geq 6-4x$

V. Grafikus megoldás

V/1) Általában: egyenlet grafikus megoldása

Olvasd le a koordináta-rendszerben a megoldást, és add meg a megoldás-intervallumokat!

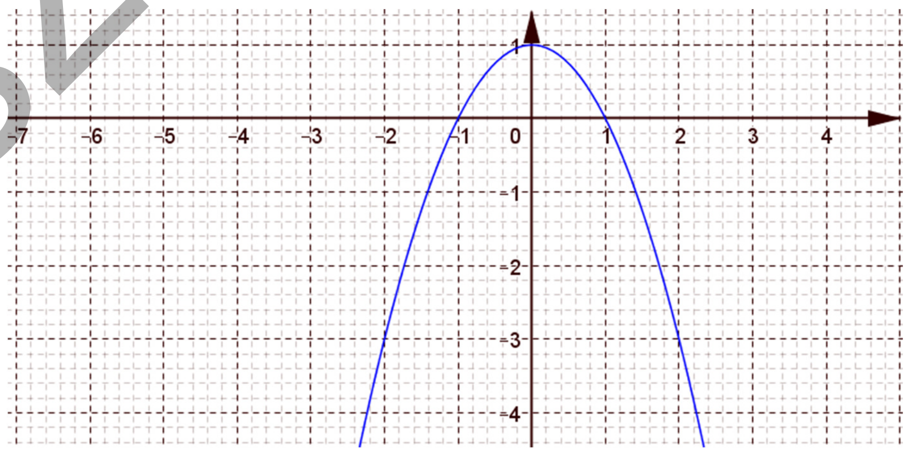
$x^2-4 \leq x+1$



Mo: x∈

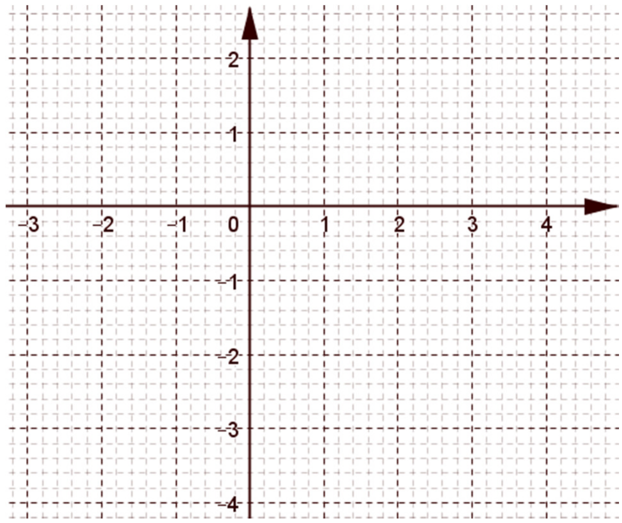
$-\frac{x^2}{2}+1<-\frac{x}{3}-2$

Mo:



x∈

x–2≥2x–3



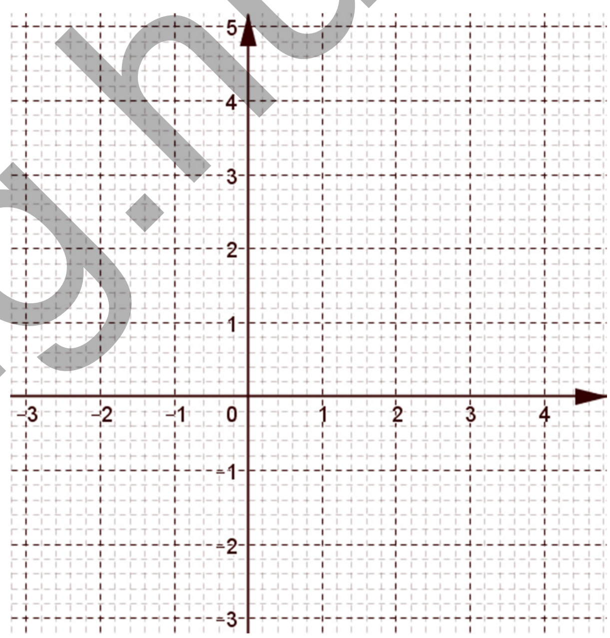
x∈

V/2) Gyakoroljuk

a) $2x-1 \leq 3$

b( ):**R**→**R**; y=2*x*–1
j( ): **R**→**R**; y=3
Mely *x*-ekre vesz fel a *b( )* fv. 3-at, vagy annál kisebb számot?

Nézzük meg a grafikonját:



A leolvasás nem elég:

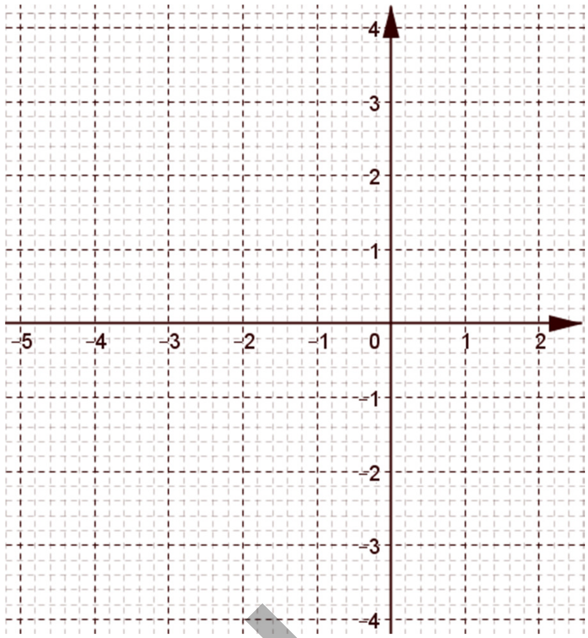
- meg kell nézni a metszéspontot;
- meg kell mutatni, hogy több a menet miatt jó a megoldásunk.

Add meg a megoldás-intervallumot!

b) $-3x-4 < x+3$

$b(\ )$:$\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}$; $y=-3x-4$
$j(\ )$: $b(\ )$:$\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}$; $y=x+3$

Nézzük meg a grafikonját:



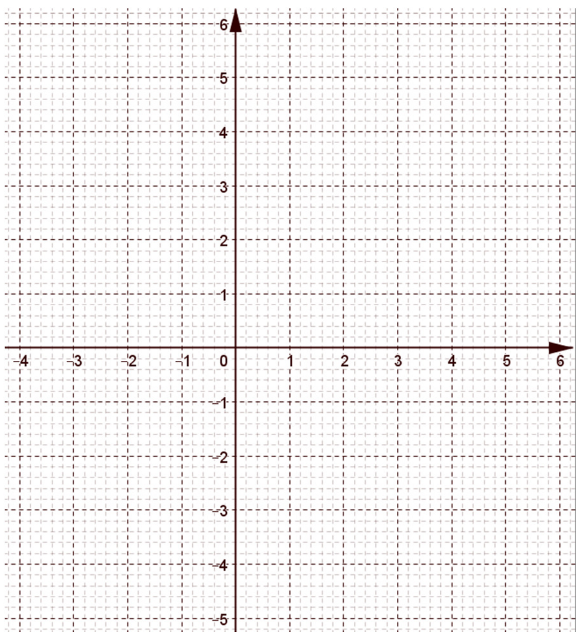
A leolvasás nem elég:

- meg kell nézni a metszéspontot;
- meg kell mutatni, hogy több a menet miatt jó a megoldásunk.

Add meg a megoldás-intervallumot!

c) $\frac{2}{3}x+2 \geq \frac{2}{3}x-4$

Ábrázoljuk.
Vegyük észre, hogy:



Vagyis úgy tűnik, hogy

Mikor lesz biztos?

Ha kimondjuk:
azonos a két fv-nek a ____________
tehát ✓

VI. Szorzatok

VI/1) Alap

$(-x^2-1)(7-2x)\cdot x\cdot(x+2)\geq 0$

Vegyük észre, hogy az első tényező:

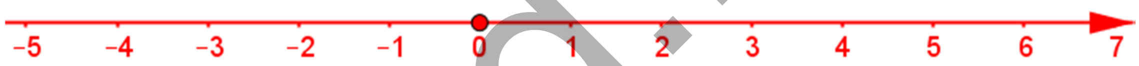
Így: $(-x^2-1)(7-2x)x(x+2)\geq 0 \iff$

Gyakorlatilag most kezdődik a példa.

Egy szorzat akkor és csak akkor negatív ....

....

A 0-val vigyázni kell!



x∈

(Ne feledd az ekvivalencia jelet!)

Vedd észre: a mivel lüke voltam és nem szoroztam meg az egyenletet –1-gyel, ezért a 7–3x grafikonja fordítva áll a szokásostól.

Bölcsebben így kellett volna:

$(7-2x)x(x+2)\geq 0$

$\Updownarrow$

VI/2) Másodfok – de először még szorzattá kell alakítani – előjelgrafikon! SZÍNES a tengely!

$-2(x+2)^2 > -18$

$-(x-5)^2 \leq -3x+15$

$-x^2-x<-2$

VII. Tört

VII/1) Alap

Egy tört – amely alattomban azért valójában szorzat (hiszen 8-cal osztani azt jelenti, hogy 1/8-cal szorzunk) – **akkor és csak akkor 0, ha a számlálója nulla; nevezője nem lehet 0!**

A törteknél is a cél: egy oldalra rendezni (0-ra redukálni az egyenletet), és tényezőkre bontani (vagyis egy tört van csak és a számlálója is, nevezője is egytagú, tényezőkre bontva.

Egy tört akkor és csak akkor negatív, ha páratlan tényezője (a számlálóban és nevezőben együtt) negatív – a többi pozitív.

Vagyis: a törtet tényezőkre bonjuk, s utána majdnem úgy viselkedik, mint egy szorzat, csak a nevező nem lehet 0.

VII/2) Alap

Oldd meg: $\frac{5-a}{2-4a} \geq 0$

VII/3) Figyelem: ....

....

....

Oldd meg: $\frac{3}{x-1} \leq 2$

VII/4) Több-tényezős algebrai tört…

$$\frac{3-2x}{2x^2-18} \le 0$$

VII/5) $\frac{x+3}{2x-4} \ge 2$

VII/6) $\dfrac{4-x^2}{(x+3)(x-1)}<1$

VII/7) $\dfrac{x^2-4x+6}{3-2x}<-1$

Hogy néz ki egyébként a számláló előjel grafikonja?

VII/8) $\dfrac{5}{x-1} > \dfrac{6}{x-5}$

VIII. Teljes köb, 4. hatvány, Pascal Δ és még két új típus:

VIII/1) Hatványozás és a Pascal háromszög

Számold ki, vonj össze:

$(a+b)^0=$

$(a+b)^1=$

$(a+b)^2=$

$(a+b)^3=$

$(a+b)^4=$

Utak a városban, avagy a **Pascal Δ.**

0 0 0 **1** 0 0 0
0 0 **1** **1** 0 0
0 **1** **2** **1** 0
1 **3** **3** **1**
1 **4** **6** **4** **1**
1 **5** **10** **10** **5** **1**
1 **6** **15** **20** **15** **6** **1**
1 **7** **21** **35** **35** **21** **7** **1**

$(a+b)^0=1$
$(a+b)^1=a+b$ (együtthatók: 1 1 ; a tagok fokszáma mindenhol: 1)
$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ (együtthatók: 1 2 1 ; a tagok fokszáma mindenhol: 2)
$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ (együtthatók: 1 3 3 1 ; a tagok fokszáma mindenhol: 3))
$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$ (együtthatók: 1 4 6 4 1 ; a tagok fokszáma: 4))
$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$ (együtth.: 1 5 10 10 5 1 ; a tagok foksz.: 5))

$$1$$
$$1a + 1b$$
$$1a^2 + 2ab + 1b^2$$
$$1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$$
$$1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$$

Most vizsgáld meg a fenti „háromszöget”: minden sorban a számok úgy alakulnak, hogy egy szám a felette levő kettő szám összege.

Most kitakarva a Pascal-háromszöget: írd föl magad a Pascal háromszög első hét sorát!

Könnyebb kiszámolni két tag összegének, különbségének hatványait:
a Pascal Δ megfelelő sorából kell nézni az együtthatókat!

Ne feledd: minden tag foka annyi, ahányadik hatványra emeltünk!

$(a+b)^3 =$

$(x+1)^3=$

Mi van, ha két tag különbségét nézzük? Akkor az (a+b) olyan, mintha (a+(–b)) lenne:

$(a-b)^3=(a+(-b))^3=$

$(x-1)^3 = (x+(-1))=$

Vedd észre, hogy nagyon kényelmes, mert egyszerűn csak váltakozik az előjel…

A következőket nagyon figyelmesen!

(Egyébként a Pascal Δ-et mindig érdemes jobbra magadnak leírnod!)

$(x+2)^3 =$

$(x-4)^3=$

$(2x-5)^4 =$

Gyakoroljuk

$(x-y)^3 =$

$(3x+2)^3 =$

$(2x-7)^3=$

$(2x-5)^4=$

Végezd el az alábbi műveletet:

$(a+b+c)^2=$

VIII/2) Szorzattá alakítások: x^n-y^n

a) Végezd el a műveletet, majd vond le a következményt…

$(x-y)(x+y)=$

$(x-y)(x^2+xy+y^2)=$

Vagyis: $x^3-y^3 =$

$(x-y)(x^3+x^2y+ xy^2+y^3)=$

Vagyis: $x^4-y^4 =$

$x^5-y^5 =$

Mutasd is meg:

$x^6-y^6 =$

Mutasd is meg:

VEDD ÉSZRE A KÖVETKEZŐKET:

Mindenhol $(x-y)$-t emelünk ki. A második tényező minden tagja eggyel kisebb fokú, mint az eredeti szorzattá alakítandó alak, vagyis a tagonként a fokszám állandó. Végül pedig tagonként az első tényező fokszáma egyesével csökken, a másodiké egyesével nő.

b) Gyakorlása

$x^3-1=$

$x^3-27=$

$x^4-16=$

DE figyelem: „In medio stat virtus”

$x^5-32 =$

$27x^3 - 125=$

$x^4-625=$

DE figyelem: „In medio stat virtus”

c) Általában:

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+a^2b^{n-3}+ab^{n-2}+b^{n-1})$

$x^5-1=$

$x^3-27=$

$32x^5-1=$

$x^6-729=$

„In medio stat virtus”…

VIII/3) Szorzattá alakítások: $x^{2k+1}+y^{2k+1}$.

Páratlan kitevősek összege: **váltakozó előjel a második tényező tagjai között!**
$a^{2k+1} + b^{2k+1} = (a+b)(a^{2k}-a^{2k-1}b+a^{2k-2}b^2+\ldots+a^2b^{2k-3}-ab^{2k-2}+b^{2k-1})$
Figyelem, csak páratlan fokszámmal működik. x^4+y^4 nem alakítható így szorzattá!
Figyelem: $x^3+y^3 \neq (x+y)^3$.

$(x+y)(x^2-xy+y^2)=$

Vagyis: $x^3+y^3 =$

$(x+1)(x^2-x+1) =$

Vagyis: $x^3+1=$

$(x+2)(x^4-2x^3+2^2\cdot x^2-2^3\cdot x+2^4)=$

Vagyis: $x^5+32=$

x^4+y^4 nincs szokásos

$x^6-y^6=$

$x^5+1=$

$2x^3+54=$

$2^{30}-1=$

IX. Emlékeztető: Alapvető hibák egyenlőtlenség megoldásnál

Melyek ugyanazok mint az egyenleteknél

- Rosszul írjuk le a példát…
- Kimarad a kikötés (VH nem kell…)
- Eltűnő előjelek és átalakuló betűk, számok
- Ha egyenletet szorzunk, akkor elfelejtjük minkét oldal minden tagját beszorozni
- Törtet úgy szorzunk meg - hibásan, hogy nemcsak a nevezőt tüntetjük el, de a számlálót is megszorozzuk!

Pl. $\frac{x-3}{2}-\frac{3x-1}{2}=\frac{5x}{2}\quad /\cdot 2$

$2(x-3)-(3x-1)=5x$

Az egyenleteken kívül még, ahol az egyenlőtlenségeket elronthatjuk:

- negatív számmal szorzásnál nem figyelünk
- könnyedén szorzunk ismeretlent tartalmazó tényezővel – pedig tilos!!!
- reciprokot veszünk…
- Elfelejtjük az ekvivalenciát
- Elfeleltjük felírni a végeredményt. pl.: $\Leftrightarrow x\in [-5;\,3{,}4[$

Függvények és Egyenletek: D
Lineáris egyenletrendszerek és szöveges típusfeladatok

I. Bevezetés

I/1) 2 változó, 2 független összefüggés

tanm_fuggvenyek_egyenletek_D_1_1 téglalap két összefüggés.ggb

Mekkora annak a téglalapnak a területe, amelynek a kerülete 34 cm, és az egyik oldal 3 cm-rel nagyobb, mint a másik.

Mo.:

x+y=

Fejezzük ki az x függvényében y-t: y=

$f(\ )$:]   ;   [$\rightarrow$ **R**; y=

Ábrázoljuk, és olvassunk le megoldás lehetőségeket.

Az új összefüggés:

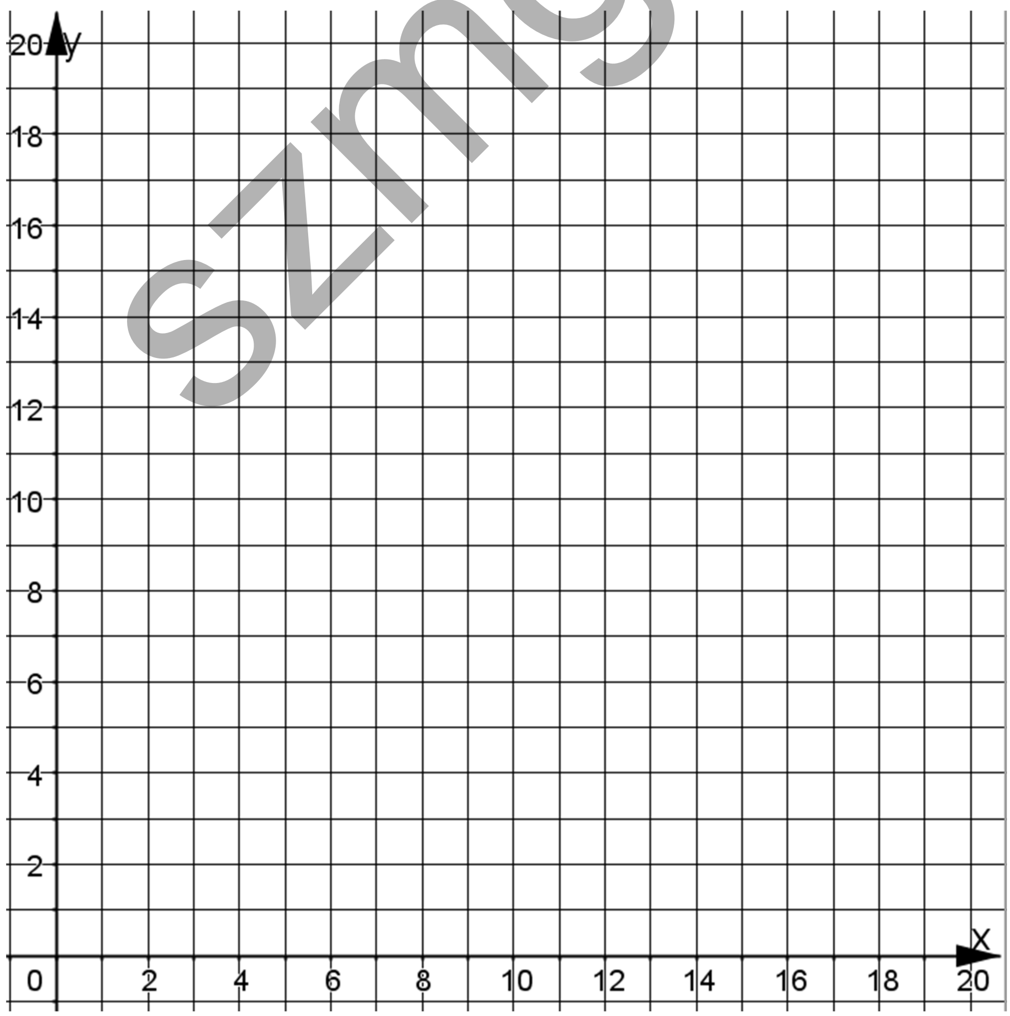
x–y=

Fejezzük ki az x függvényében y-t: y=

$g(\ )$:]   ;   [$\rightarrow$ **R**; y=

Melyik az a pont, mely (x;y) koordinátái mindkettő összefüggésnek eleget tesznek?

Leolvasható, és ELLENŐRZENDŐ: (x;y)=(;)



De ezt akár ábra nélkül is megoldhattuk volna:

$x+y=17$

$\underline{x-y=3}$

Az első egyenlet úgy rendezem, hogy:

y= VAGYIS: **KIFEJEZTEM *y*-T AZ *x*-BŐL.**

Majd a második összefüggésbe **BEHELYETTESÍTEM az y-t:**

A grafikus ábrázolás: *Láthatjuk, hogy egy összefüggés esetében végtelen sok megoldáspárt kaphatunk!*

I/2) Definíció: az

$\boldsymbol{a_{11}x + a_{12}y = a_{13}}$	$\mathbf{5x - 3y = 7}$
$\boldsymbol{a_{21}x + a_{22}y = a_{23}}$	$\mathbf{8x + y = 17}$

alakú egyenletpárt, ahol $a_{ij} \in R$, kétismeretlenes lineáris egyenletrendszernek nevezzük.

Rendezd a következő egyenletrendszereket a fenti alakra
Szépen nézzen ki, egymás alatt minden, pontosan

$4-3y+5y = 6x+9-2x+3y$	$5x=6y$
$\underline{7=3x-4y+11}$	$\underline{3y-4=6+7y}$

II. Lineáris egyenletrendszerek megoldási módszerei

II/1) Grafikus: az egyik ismeretlen fv-ében felírjuk a másikat. (Általában így kell, majd koordináta-geometriában lesz más módszer is.)

$2x - y = 3$
$\underline{x - 14 = -2y}$

Az első egyenletnél y-t kifejezve x-ből:

***y*=**

Ha pl.: *x*=5, akkor mennyi az *y*? y=

x=1, akkor mennyi az y? y=

y= *f*( ): **R**→***R***; *y*=

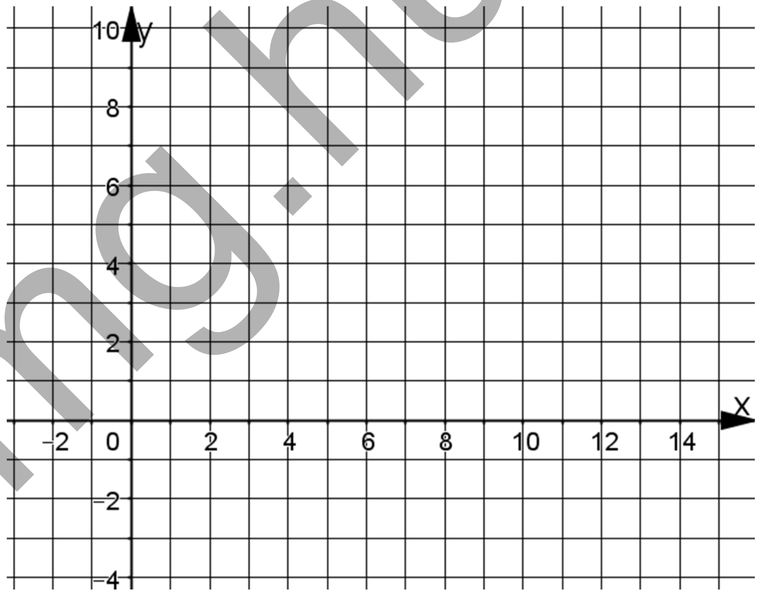
Az *f*( ) fv. P(*x*;*y*) pontjainak koordinátáit így is írhatjuk: P(*x*;). Vagyis látható, hogy: ***Azon és csak azon pontok* vannak az *f*( ) fv. grafikonján, melyek pontjainak *x*, *y* koordinátái megoldásai az egyenletnek.**

A 2. egyenletből:

y=

g( ): **R**→***R***; *y*=

Közös koordináta-rendszerben ábrázolva:



Az *f( )* grafikonjának (*x*;*y*) koordinátájú pontjai az első, a *g( )* grafikonjának (*x*;*y*) koordinátájú pontjai a második egyenletnek a megoldásai.

Melyik az a pont, melynek koordinátái kielégítik mindkét összefüggést?

Nyilván leolvasható: (*x*;*y*)=(;) Vagyis x= ; *y*=

Természetesen itt is kell a **Visszahelyettesítés**, illetve annak megmutatása, hogy több megoldás nem létezik:

II/2) Algebrai módszerek 1.: A behelyettesítő módszer

Figyelem: nagyon el lehet számolni az egyenlőtlenségeket, és nem szeretjük a visszahelyettesítést… (Pedig kötelező a VH ☹)
VAGYIS: L A S S A N, O D A F I GY E L V E

a) $2x - y = 3$
$\underline{x + 2y = 14}$

Most a 2. egyenletnél x-et fejezzük ki y-ból:

Behelyettesítve az első egyenletbe:

y=
x=
VH:

y= x=

b) $$\left.\begin{array}{l} \frac{2}{3}x - \frac{5}{4}y = -1 \\ \frac{y+1}{2} - \frac{5}{4} = \frac{x-1}{5} \end{array}\right\}$$

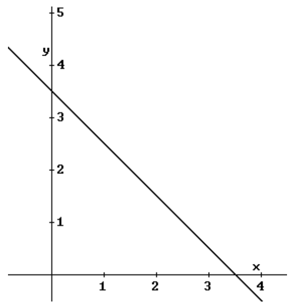
c) $$\left.\begin{aligned} \frac{a-3}{3}-2\left(\frac{a-b}{3}\right)=a-2 \\ \frac{a+b}{2}-\frac{b}{6}=\frac{4a-2b}{8} \end{aligned}\right\}$$ Mo.: a=3/4 b=0 VH!

d) $$\left.\begin{aligned} \frac{x+2}{3}-3=\frac{y-5}{4} \\ \frac{x-1}{3}+\frac{y+2}{2}=1 \end{aligned}\right\}$$ x=5/2 y=–1

Összefüggő egyenletek:

$y = 3,5 - x$ elso( ):$\mathbf{R} \to \mathbf{R}$; y=

$\underline{2x + 2y = 7}$ masodik( ): $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$; y=



Vegyük észre, hogy a két fv- ugyanaz, és a két grafikon fedi egymást:
Mit jelent ez? Azt, hogy: A **két egyenlet „egymás következménye”**, vagyis ekvivalensek egymással, más szóval *a két egyenlet nem független.*
„Nem mond újat az egyikhez képest a másik.”

$y=3,5-x \;\Leftrightarrow\; 2x+2y=7$, hisz csak egy kétszeres szorzó van közöttük.
Ilyenkor azt mondjuk, hogy végtelen sok ($x;y$) pár megoldás van: ($x;3,5-x$).

Behelyettesítéssel:

$y=3,5-x$
$\underline{2x+2y=7}$

Azonosság, vagyis összefüggő egyenletek
Vagyis az az ($x;y$) pár, amely igazzá teszi az első egyenletet, igazzá teszi a másodikat is.
Így a megoldás: y=3,5–x.

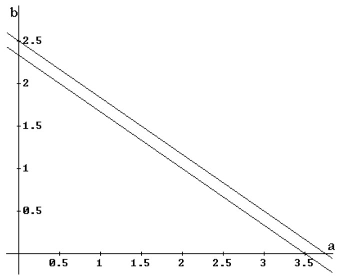
Olyan, mintha azt mondtam volna, hogy „Gondoltam két számra. Az összegük tíz; A duplájuk összege 20.”
A második állításommal gyakorlatilag ugyanazt mondtam, mint az elsővel.

Ellentmondó egyenletek

2a+3b=7 elso( ): $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$; b=–2a/3+7/3

$\underline{4a+6b=15}$ masodik( ): $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$; b=–2a/3+5/2

Látható, hogy nincs olyan (a;b) pontpár, amely mindkét egyenletet igazzá tenné.
Ezt hívjuk ellentmondó egyenletrendszernek.



Ha behelyettesítéssel próbáljuk megoldani az egyenletrendszert:
1. 2a+3b=7
2. 4a+6b=15

Szabályos lépésekkel ellentmondáshoz jutottunk, tehát $\nexists$ olyan (a ; b) számpár, amely egyszerre kielégítené a két egyenletet.

Olyan, mintha azt mondtam volna, hogy „Gondoltam két számra. Az összegük tíz; A duplájuk összege 30.”
A második állításommal „agyonütöttem az elsőt”, mert a duplájuk összege biztos hogy 20.

II/3) Algebrai módszerek 2: Egyenlő együtthatók módszere

Figyelem: nagyon el lehet számolni az egyenlőtlenségeket.

a) $5x + 4y = -19$ $\quad$ x=–2; y=–9/4

$\underline{3x - 4y = \quad 3}$

b) $6x + 5y = -3$

$4x - 3y = 17$

Az első egyenletet megszorzom ………-el, a másodikat ………. :

akkor a két egyenletben az **x-ek együtthatója ugyanannyi lesz**: …………….

(A ……….. és a ……………. LKKT-e a …………….)

FIGYELEM: tartsuk a formát: x-ek, y-ok, konstansok egymás alatt!

c) $-6x - 3y - 3 = 0$

$\underline{15x - 4y = 27}$

d) $$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x+3}{2}-\dfrac{y-2}{3}=2 \\ \dfrac{x-1}{4}-\dfrac{y+1}{3}=4 \end{array}\right\}$$

e) $(x-7)(2y-4)=2(x+8)(y-11)$ $x=-3$, $y=5$
$\underline{(3x-1)(y+1)=(x-3)(3y-5)}$

f) $(4x-3)(y+6)=2(x+1)(2y+5)$
$\underline{(7-x)(6y+11)=(-2x-1)(3y+8)}$

A jobbaknak: Oldd meg az egészek halmazán: $9x^2=1085+4y^2$

II/4) Módosított Gauss-féle elimináció (az egyenlő együtthatók módszerének továbbvitele) 3 ismeretlenes egyenletrendszernél.:

- *Egy oldalra* az ismeretlenek, *abc* sorrendben, másik oldalon a konstans.
- *Nagyon szépen, táblázatszerűn nézzen ki!*
- Az egyik egyenlet egyik ismeretlenével a másik kettőből „kiejtjük” azt.
- Így kapunk egy kétismeretlenes egyenletrendszert.
- (ha már jobban megy, lehet ötletelni)

a) „Forma dat esse rei” – (A forma adja a dolog lényegét - avagy ha nem tartod a rendet, elveszel!)

$$\left.\begin{aligned} 3y+2x&=z-1\\ z-3x&=2y+6\\ 2y+x&=3z-2 \end{aligned}\right\}$$

b)

$$\left.\begin{aligned} 3x+y&=2z-6\\ z+2y&=2x+1\\ 4x-2y&=6y-1 \end{aligned}\right\}$$

II/5) Új ismeretlen bevezetése

a) $\left.\begin{array}{l}\dfrac{2}{x-y}+\dfrac{6}{x+y}=1{,}1\\[2mm]\dfrac{4}{x-y}-\dfrac{9}{x+y}=0{,}1\end{array}\right\}$ KIKÖTÉS: (x=7; y=3)

b) $\left.\begin{array}{l}x-\dfrac{1}{y}=-\dfrac{1}{6}\\[2mm]3x-\dfrac{5}{y}=-\dfrac{3}{2}\end{array}\right\}$ KIKÖTÉS: (x=1/3; y=2)

c) $\begin{array}{l}\dfrac{2}{x+4}+\dfrac{3}{1-y}=\dfrac{5}{2}\\[2mm]\dfrac{5}{x+4}-\dfrac{5}{4}=\dfrac{5}{2y-2}\end{array}$ KIKÖTÉS: (x=–8; y=0)

III. Példák az lineáris egyenletrendszerek használatához

III/1) Szövegesek átírása többismeretlenes egyenletrendszerré

a) Egy háromjegyű szám első és harmadik jegyének összege 8. A második számjegye az elsőnél egy 1-gyel nagyobb. Ha felcseréljük az első és a harmadik számjegyet, akkor 594-el nagyobbat számot kapunk, mint az eredeti. Mi az eredeti szám?

b) Péter, János és András éveinek száma együtt 28 év. Péter és János együttes életkora András életkorának 10-szerese plusz 6 év. Péter annyival idősebb Jánosnál, amennyi épp András. Hány évesek?

c) Két pozitív szám úgy aránylik egymáshoz, mint 4:3-hoz. A nagyobbik kétszerese 5-tel kisebb a kisebbik 3-szorosánál. Melyik ez a két szám?

III/2) ……………………………………… figyelés!

$(2x-3y+5)^2+|x-2-y|=0$

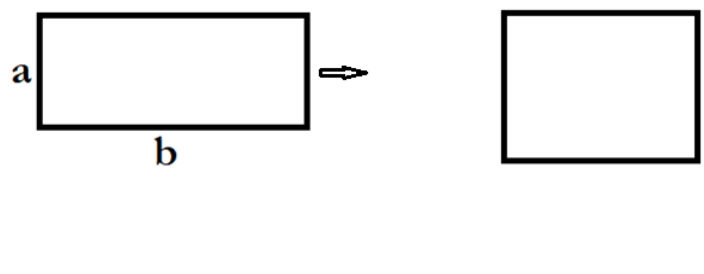
IV. Egyéb szöveges egyenletek:
Cél: átírni egyismeretlenes, vagy két- ill. **többismeretlenes** egyenletté/egyenletrendszerré
IV/1) Egyszerűbb, csak „átkódolandó” szövegek.

a) Egy farmon tyúkok és disznók laknak. 61 fejük van és 176 lábuk. Melyikből mennyi van?

b) 2 egész szám aránya 2:3. Ha az összegükből elveszünk 5-öt, 65-öt kapunk. Mi a két szám?

c) Ha egy kétjegyű szám számjegyeit felcseréljük, akkor az eredetinél 36-tal kisebb számot kapunk. Az eredeti szám első jegye kétszerese a második jegynek. Mi ez a szám?
Az első nehézség: felírni az első feltételt:
A *második nehézség*: az első feltételt átírni egyenletté!

d) Egy téglalap egyik oldalát 25%-kal megnöveltük. Hány százalékkal kell csökkenteni a szomszédos oldalt, hogy a terület ne változzék?



e) 6 osztályosba felvételi: 2015. január 17: Aladár egy tábla csokit szeretne venni, de ehhez 60 Ft-ja hiányzik. Bélának ugyanehhez a csokihoz 45 forintja hiányzik. Együtt annyi pénzük van, hogy vehetnek egy ilyen tábla csokit, és még marad 10 Ft-juk. Hány forintja van Aladárnak?

f) Három szám összege 100. Ha az elsőt elosztjuk a másodikkal: a hányados 5, a maradék 1. Ha a harmadikat osztjuk az elsővel: a hányados és a maradék ugyanaz, mint az előbb. Melyik ez a három szám?

IV/2) Százalékos és keveréses feladatok

Alap: Nincs százalék, csak valaminek százados törttel történő szorzása.
Hány százalékkal nőtt, ami 30 kg-ról 41 kg. lett?

a) Mi a jobb: apámnak felemelik először 20%-kal a fizetését, majd a következő hónapban még 20%-kal, vagy hogy rögtön 40%-kal emelik.

b) Egy bolt egy cipő árát először 40%-kal, majd a kialakult árat még 20%-kal csökkentette. Hány százalékkal csökkent az eredeti ár?

c) Egy arany-ezüst ötvözetben 30 % arany van. Ha még 10 g ezüstöt adunk hozzá, 25 %-os lesz az arany aránya. Hány gramm arany és ezüst volt kezdetben az ötvözetben?

d) Van valamennyi kg 25 %-os oldatom. Hozzáöntök 10 kg 50 %-os oldatot, és 40%-osat kapok. Hány kg volt az eredeti oldat?

e) Hány kg 20 %-os sóoldathoz hány kg 5%-os sóoldatot kell összeönteni, hogy 20 kg 10 %-os oldatot kapjunk?
Mo.: Egyenletrendszerrel:
x kg 20% és y kg 5%-os.

IV/3) Munkavégzéses feladatok

a) Egy csoport 8 óra alatt végez el egy bizonyos munkát. A másik 12 óra alatt. Az gyorsabb csapat elkezdi a munkát, és egy óra múlva csatlakozik a lassabb. Összesen mennyi idő végzik el a munkát?
Kötelező a forma tartása

b) Egy kád az egyik csapból 30 perc alatt telik meg, a másikból 25 perc alatt. Először kinyitjuk az első csapot, majd rá 5 perccel megengedjük a másikat is. Összesen hány perc alatt telik meg a kád?
Kötelező a forma tartása

c) Apa 1,5 óra alatt 30 maszkot készít, a felesége 2 óra alatt 30-at. Hány óra alatt készítenek 105 maszkot?
Kötelező a forma tartása

d) Apa vakcinát gyárt sutyiban. A munkát 12 óra alatt végzi el egyedül. A fiával együtt 10 óra alatt végeztek. Mennyi idő kell a fiának ahhoz, hogy egyedül elvégezze a munkát?
Kötelező a forma tartása

e) Egy medence az egyik csapból 4 óra alatt telik meg, a másikból 6 óra alatt. A kifolyón 8 óra alatt lehet teljesen leengedni. Ha megnyitjuk az első csapot, és csak két óra múlva a másikat, de akkor azt is észrevesszük, hogy a lefolyó nyitva maradt, ezért azt elzárjuk, akkor összesen hány óra alatt telik meg a medence?
Kötelező a forma tartása

IV/4) Sebesség, utazás

a) Egy kerékpáros 20 km/óra sebességgel haladt 1 órán keresztül, majd megállt 2 óra pihenőre, és még 2 órán keresztül 30 km/óra sebességgel haladt. Mekkora az útra vonatkoztatott átlagsebessége?

b) Egy kocsi vidékre megy. A városban 30 percig araszol kifelé 12 km-t. Utána a pályán 170 km/h-val száguld 42 km-t, majd 70 km-t tesz meg 1 óra alatt. Mekkora az átlagsebessége.

Szokásos hiba: sebességek számtani közepe: $\frac{24+170+70}{3}\approx 88$

c) Két város távolsága 30 km. Egy kerékpáros megállás nélkül teszi meg oda-vissza az utat. 20 km/óra sebességgel halad odafelé, visszafelé pedig 30 km/óra sebességgel jön. Mekkora az útra vonatkoztatott átlagsebessége?

d) A 2 km/óra sebességű folyón két hajóállomás távolsága 12 km. A hajó sebessége 10 km/óra. Mekkora az útra vonatkoztatott átlagsebessége, ha megállás nélkül teszi meg oda-vissza az utat a két kikötő között?

e) A 6 km/óra sebességű folyón két hajóállomás távolsága 12 km. A hajó sebessége 15 km/óra. Mekkora az útra vonatkoztatott átlagsebessége, ha megállás nélkül teszi meg oda-vissza az utat a két kikötő között?

f) Egy folyón állandó sebességgel halad egy motorcsónak. Felmegy 20 km-t majd rögtön visszafordul. Összesen 3 óra alatt teszi meg az oda-vissza utat.
Ezek után 10 km-t megy lefelé és csak 5-öt jön visszafelé: erre 1 óra kellett.
Mekkora a csónak és a víz sebessége?

g) Egy folyó 4 km/h-val folyik. A csónak 6 km/h-val halad a vízhez képest. Kiesik egy labda, de csak 2 óra múlva veszik észre. Rögtön visszafordulnak. A visszafordulástól kezdve mennyi idő alatt érik el a labdát?

h) Egy róka 50 m-ről meglát egy nyulat. Elkezdi üldözni. A róka másodpercenként 4-et ugrik, ugrásainak hossza 0,8 m. A nyúl másodpercenként 6-ot ugrik, de csak félmétereseket. Utoléri-e, és ha igen, mikor éri utol a róka a nyulat.

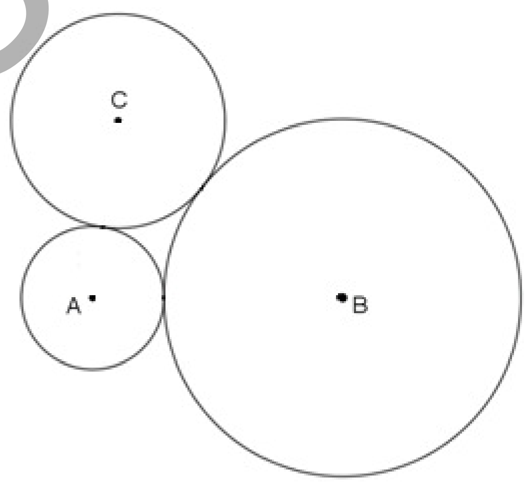
IV/5) Lineáris függvény megadása a grafikonjának két pontjából

Adott egy lineáris fv. grafikonjának 2 pontja: A(–1;2) és B(2;–3). Írd föl a fv-t és jellemezd!

1. Mo.: meredekséggel

2. Mo.: egyenletrendszerrel

IV/6) Adott egy 5; 7 és 8 cm oldalú Δ. A csúcsok mint kp. körül három, páronként egymást érintő kört rajzolunk. Mekkorák a körök sugarai?



Függvények és Egyenletek: E
Paraméteres egyenletek „avagy a képlet-gyártás"

I. A képletet gyártunk – hogy a másiknak ne kelljen egyenleteket megoldani…

I/1) Képletek a természettudományban

Fizika: Út – gyorsulás -idő $s = \frac{a \cdot t^2}{2}$

Kémia: M (moláris tömeg), n (anyagmennyiség), m= tömeg. Ekkor: m=n·M

I/2) Permet keverés

Alapállás: Hatóságilag a permetlé megengedett tömegszázaléka: 12%.

Vagyis pl. 100 kg permetből: 12 kg a vegyszer.

Vagy mondjuk 250 kg-ból:

Igenám, de a boltban csak 40%-os oldatot tartanak.
Végül van még az eladó lány: Ramóna.

a) Juliska néni jön a boltba, és kér **75 kg** permetet (nyilván 12%-osat).
Hogyan keverje ki Ramóna a permetet?
Ramóna tanácstalan. Ramóna hívja a barátját, aki felállít egy egyenletet, és megoldja – é s elmondja, hogy ennyi vegyszert mérjen ki és mennyi vizet.

De alig lép ki Juli néni a bolt ajtaján, betoppan Marika néni, és neki **45 kg** kell permet kell. Ramónát kiveri a víz, nem tudja kikeverni a vegyszert, kirúgják az állásából, mehet kapálni. Ramóna újra hívja a barátját, aki felállít egy egyenletet, és megoldja, és közli az eredményt: mennyi vegyszer és mennyi víz kell.

b) De a falusiak csak jönnek és jönnek, hogy vegyék a permetet. Ramóna pedig sajnos nem matematikus. Ramóna barátja pedig nem ér rá mindig.

Vagyis kell egy képlet, hogyha mondjuk jön Jóska bácsi, és *p* kg tömegű permetet akar, akkor **mennyi vegyszert és vizet keverjen** be Ramóna.

Ramónának kell egy képlet, amelyik megmondja, hogy a kívánt *p* kg. tömegű permet „függvényében”, mennyi 40%-os oldatot keverjen be, és aztán mennyi vizet rakjon hozzá.
Ramóna szomorú. A barátja nem ért ehhez. Segítsünk rajta ☺.
Gyártsunk Ramónának egy képletet.

c) De az élet bonyolódik: *bármilyen töménységű oldatot* kérhet ezentúl a vevő, és persze bármennyit: Ez már végképp meghaladja Ramóna kompetenciáját. És a barátjáét is, Ronaldóét. Vagyis az üzletvezetőnek matekoznia kell…

Mivel nem tudjuk előre, hogy hány kg. és milyen töménységűt rendelnek. Legyen p kg, és q %-os az oldat, melyet Ramónának ki kell kevernie a 40%-os oldatból.

I/3) Valójában egy lineáris fv. inverze is: képlet az ősképhez

I/4) Egyéb paraméteres egyenlet: **cél „a paraméter függvényében kifejezni az ismeretlent”.**
Vagyis: x= és a jobb oldalon csak paraméter van és valós szám. pl: $x=3p^3-14p+2$

a) $2x+a=4$ a=param.
„Cél: a paraméter függvényében kifejezni az ismeretlent.”

Vagyis mindig meg tudjuk mondani az ismert műveletek használatával – mint valami képletből kiszámolva –, hogy mennyi az *x*.

b) $ax=b-3x$ a,b paraméterek

c) $bx+3=4b+2$ b=param.

II. A paraméteres egyenletek általában

II/1) A paraméteres egyenletek megoldásának alapelve:

CÉL: A paraméteres egyenleteknél a paraméter(ek) függvényében kell kifejezni az ismeretlent. Ezért úgy kell rendezni az egyenletet, hogy végül az egyik oldalon csak az ismeretlen álljon, egy – a paraméter(eke)t tartalmazó – kifejezés, de az ismeretlen már semmiképp. Vagyis „Képletet kapjunk az ismeretlen könnyű kiszámításához”.

Az egyenlet megoldása után kigyűjtöm egy táblázatba, hogy a paraméter(ek) mely értékeire értelmetlen a kifejezés, mely értékeire $\nexists$ megoldás, és mely értékekre létezik, és akkor azok függvényében mennyi az ismeretlen. Vagyis a végén megvizsgáljuk, hogy mik-és-mik a megoldások, ha a paraméter „bejárja” a valós számok halmazát.

II/2) Gyakorlás

a) $px+9=p^2+3x$

x-et akarom kifejezni, ezért úgy rendezem az egyenletet, hogy az egyik oldalon csakis olyan tagok legyenek, melyekben van x, a másik oldalon a paraméter, illetve a konstansok.

b) $2p^2x-p-2=20px-50x$ p=param

c) $2px-2 = 3x$ p=param

d) $a^2x=a$

e) $\frac{3px-3x}{p-2}=2+2p^2-4p$ Kik:

f) $4p^2x^2 - x = x^2 + 2px$

g) $\frac{a+1}{x-5} = 2a+1$ Kikötés:

h) $\dfrac{a+x}{b}-\dfrac{x-b}{a}=2$ Kik.:

II/3) Egyenlőtlenséghez vezető paraméteres egyenletek

a) Mely *p* paraméterekre lesz nemnegatív megoldása a következő egyenletnek?

$2px–4p = 5x–3$

b) Mely p paraméterek esetén lesz 4–nél nem nagyobb a következő egyenlet megoldása:

$p^2x+6px+9 = p^2-9x$

c) Mely *p* paraméterekre lesz 3-nál nem kisebb megoldása a következő egyenletnek?

$4px-2p = 4p^2x+x-1$

II/4) Paraméteres egyenlőtlenségek

a) $3ax+2 \geq 0$

b) $2px \leq p-x$

III. Százalékszámítás ismétlés. **„Nincs százalék, csak valaminek egy százados törttel történő szorzása."**

III/1) Közös feladatok

a) A 120 a 40-nek hány %-a? A 85 a 20-nak hány %-a?

b) A 15 a 95-nek hány %-a? A 4 a 60-nak hány %-a

a) Minek az 5%-a a 7? A 19 hány %-a a 475-nek

b) A 475-öt hány %-kal kell csökkenteni, hogy 399 legyen?

c) Egy áru árát 30%-kal megemelték, majd újra megemelték 30%-kal. Hány százalékkal nőtt az eredeti ár.

d) Egy áru árát 20%-kal csökkentették, majd újra csökkentették 20%-kal. Hány százalékkal csökkentették összesen?

III/2) Egyéni feladatok

a) Mekkora volt egy árucikk eredeti ára, ha 35%-os árengedménnyel 22425 Ft-ért megkaptuk?

b) Ha egy négyzet egyik oldalát 20%-kal csökkentjük, a másikat pedig a 20%-kal növeljük, akkor a négyzet területe 49 négyzetcentiméterrel csökken. Mekkora volt a négyzet eredeti területe?

c) Egy tartályban található folyadék 28%-át kiöntötték, így 972 liter folyadék maradt benne. Hány liter folyadékot öntöttek ki a tartályból?

d) Három szám összege 1410. Az első szám a másodiknak 40%-a, a második pedig a harmadiknál annak 30%-ával nagyobb. Melyik ez a három szám?

e) Egy készülék árát hány százalékával növelték meg, ha Aladár kiszámította, hogy a megnövelt árat egyhatodával kellene csökkenteni ahhoz, hogy az eredeti árat visszakapjuk?

f) Egy készülék árát januárban 40%-kal csökkentették, majd februárban újabb 40%-kal lejjebb szállították. A nagyobb reklám kedvéért úgy próbálták beállítani, mintha ez által az eredeti árat 80%- kal csökkentették volna. Aladár azonban kiszámította, hogy a valóságos 80%-os árcsökkentés a februárinál 40 000 Ft-tal alacsonyabb árat eredményezett volna. Mennyi volt a készülék eredeti ára?

IV. Ismétlés

IV/1) Apa 12 óra alatt vágná fel a tűzifát. A fia 16 óra alatt vágná föl ugyanazt. Mennyi idő alatt készül el a munka, ha együtt kezdik ugyan, de 4 óra múlva a fia beleun, és az apa egyedül kell, hogy befejezze.

IV/2) Oldd meg: $\frac{x}{p-2}+3=2x$

IV/3) $a^2x^2 - x = 2ax^2 + x^2$

IV/4) Mely p paraméterekre lesz a megoldás kisebb, mint 1.

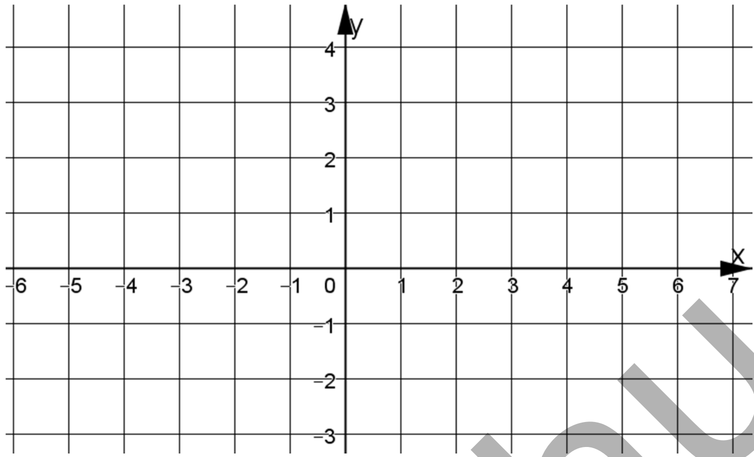
$2p^2x - p^2 + 4 = 3px + 2x$

Függvények és Egyenletek: F
Speciális lineáris függvények

I. A konstans fv.

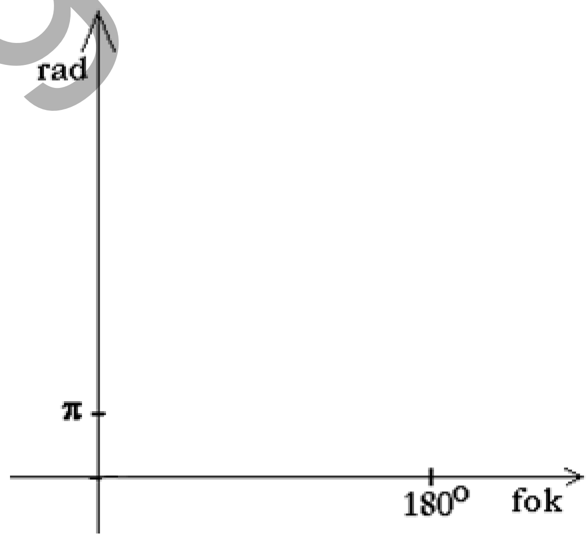
I/1) Def.: c( ): $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$; $x\mapsto c$; „Nullad-fokú”

Képe: az abszcisszával párhuzamos egyenes.



II. Az egyenes arányosság

II/1) Def.: Az f( ): $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$; $y=ax$ ($a\neq0$) fv-t egyenes arányosságnak nevezzük.



II/2) Pl.: szög-radián összefüggés

Gyakorlása

120° hány radiánnak felel meg?

3π, $2\pi/5$ és $\pi/8$ hány foknak felel meg?

„Ha a szög 5-szörösére nő, akkor a radián is, vagyis a hányadosok megegyeznek.”
„Hányszorosára változik egy szög?”:
A hányadosuk mondja meg, hogy hányszorosukra változtak.

60°-nak, illetve 45°-nak mekkora ívmérték felel meg?

5 gyerek 2 óra alatt 80 szendvicset készít. Hányat tudna 12 gyerek 3 óra alatt készíteni?

1 gyerek 2 óra alatt:

1 gyerek 1 óra alatt:

12 gyerek 1 óra alatt:

12 gyerek 3 óra alatt:

II/3) Egy egyenes arányosság 4-hez –2-őt rendel. Írd föl a függvényt

III. Az intervallumonként lineáris függvények

III/1) A signum (előjel) és a signum fv.

a) Def.:

sgn(–0,003)= sgn(110)=

sgn(0)= sgn(3^{-2})=

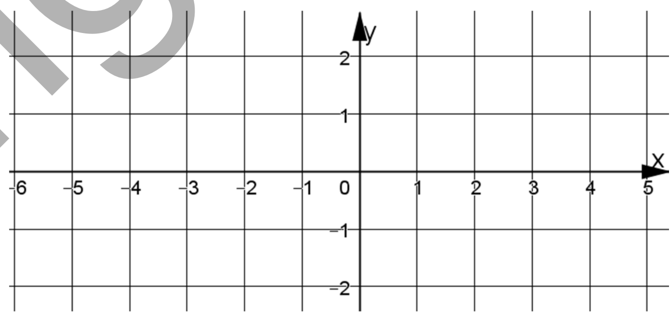
b) A függvény

Def.:

$D_{sgn(\,)}=\mathbf{R}$

Zérushely: x=

Menet



Injektivitás:

$R_{sgn(\,)}$=

c) A sgn( ) fv. transzformációi

(i) Add meg a $-\mathrm{sgn}(x)+3$ hozzárendelésű függvény grafikonjának transzformációját az eredeti sgn( ) fv. grafikonjából és ábrázold!

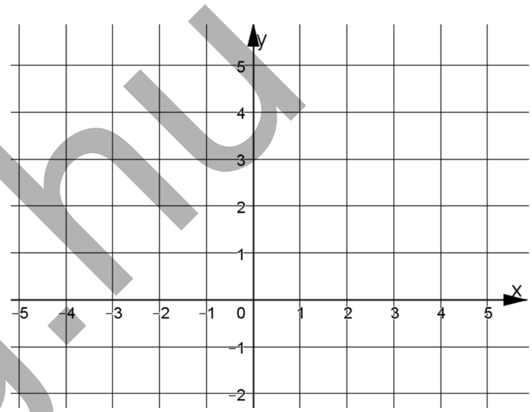
sgn( ): **R**→**R**; y=

g( ): **R**→**R**; y=

h( ): **R**→**R**; y=

f( ): **R**→**R**; y=–sgn(x)+3 ≡

A trafó:



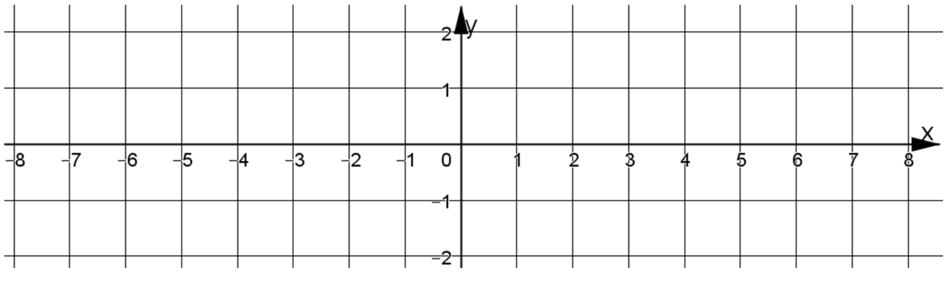
(ii) Ábrázold és jellemezd a sgn(x+2) hozzárendelésű függvény!

Az **argumentumot** figyelve kell nézni, hogy mikor -1, 0 és +1 az érték! Egyenlőtlenség az argumentumra.

b( ): **R**→**R**; y=x+3
k( ): **R**→**R**; y=sgn( ) ≡

g( ): **R**→**R**; y=sgn(x+3) ≡

A trafó:



(iii) Add meg a $2\cdot \mathrm{sgn}(x)-3$ hozzárendelésű függvény grafikonjának transzformációját az eredeti sgn( ) fv. grafikonjából és ábrázold!

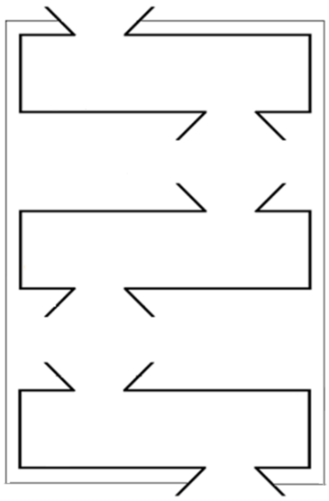
sgn( ): $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$; y=

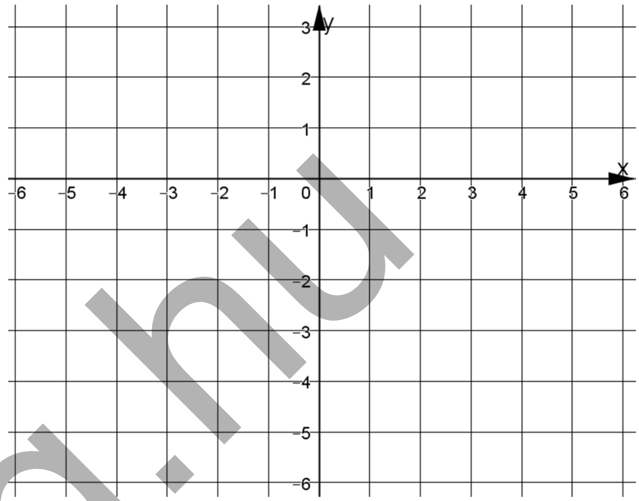
f( ): $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$; y=

g( ): $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$; y=

h( ): $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$; $y=2\cdot \mathrm{sgn}(x)-3$ ≡

A trafó:





(iv) Külső-belső függvény gyakorlása

a( ): $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$; $y=\mathrm{sgn}(x)$

b( ): $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$; $y=x+3$

c( ) : $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$; $y=-2x$

Írd föl a hozzárendelési szabályokat:

$a\circ b\equiv a(b(\ ))\equiv$ $\qquad$ $c\circ a\equiv c(a(\ ))\equiv$

$b\circ c\circ a\equiv$ $\qquad$ $c\circ a\circ c\equiv$

Rajzolj gépeket, és add meg a fv-kompozíciót:

$-2\cdot \mathrm{sgn}(x)$ $\qquad$ $\mathrm{sgn}(-2x+3)$,

d) Egyenletek, egyenlőtlenségek

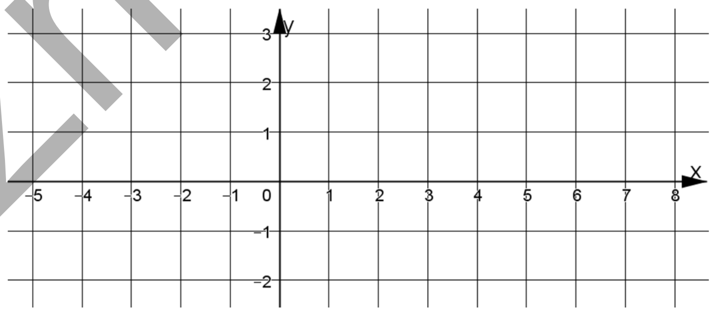
(i) sgn(3–2x)=–1.
Vegyük észre, hogy ez az argumentumra egy ………………………………….

(ii) sgn(x) < 1,2

(iii) $\operatorname{sgn}(2x-3) < \frac{x}{3}$

I. II. III.

Ábrázoljuk is:



(iv) sgn(3x–1)=x^2–2x+1

I. II. III.

III/2) Az egészrész és az egészrész függvény

a) Def.: Egy $x \in \mathbf{R}$ szám egészrésze az x-nél nem nagyobb egészek közül a legnagyobb. (Az a legnagyobb egész szám, amely nem nagyobb az x-nél.)

Jele:

$[5]=$ $\quad [4,3]=$ $\quad [-1]=$ $\quad [-2,4]=$

$[0]=0$ $\quad \left[\frac{18}{5}\right]=$ $\quad \left[-\frac{27}{8}\right]=$ $\quad \left[6,\dot{9}\right]=$

A definíció alapján:

$x-1 < [x] \leq x$

Ugyanis: Ha $x \in \mathbf{Z} \Rightarrow [x]=x$.

Ha azonban kisebb egy egész számnál, akkor nála nagyobb nem lehet az $[x]$

Az egészrész függvény által meghatározott érték az (argumentum–1)-nél nagyobb, az argumentumnál kisebb egyenlő.

pl.: $[x]=5 \Leftrightarrow x \in$

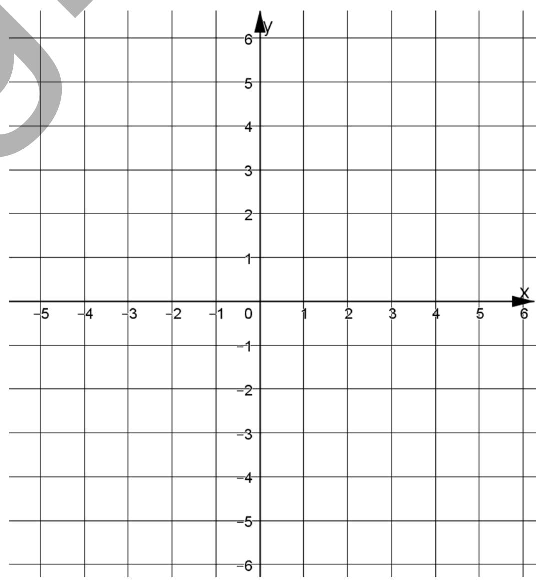
Egyenlet:

$[5x] = -22 \Leftrightarrow$

b) $\operatorname{int}(\ ): \mathbf{R} \to \mathbf{Z};\ x \mapsto [x]$

$D_{\operatorname{int}(\ )} = \mathbf{R}$

Zérushelyek: $x \in$



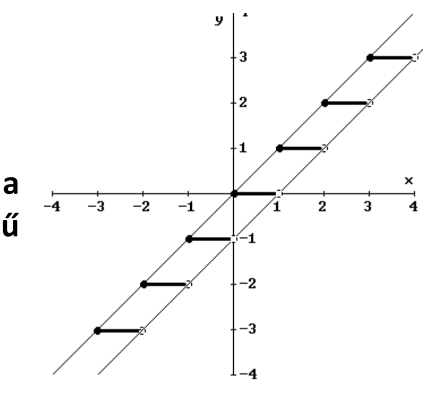
$$\operatorname{int}(\ )\Big|_{[a;a+1[\ a\in\mathbb{Z}} \equiv \operatorname{const}(a)\Big|_{[a;a+1[\ a\in\mathbb{Z}}$$

Menet:

$R_{\operatorname{int}(\ )}=$

Injektivitás:

Az előző pontnál érdemes megfigyelni, hogy a függvény képe az *x*–1 és az *x* hozzárendelésű függvények képe közé szorul be.



c) Egészrészt tartalmazó függvények, egyenletek

(i) Ábrázold: az int(x)+2 hozzárendelésű függvényt

Trafó:

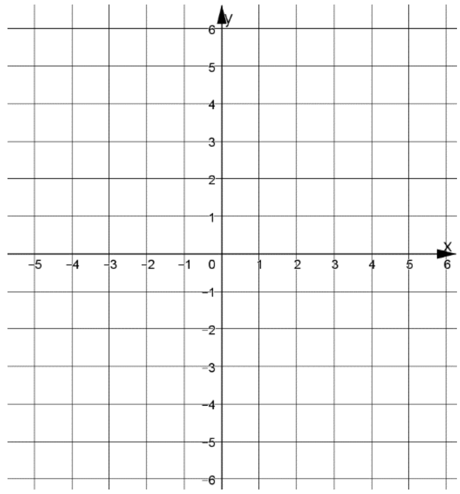
D =

Zérushelyek: $x\in$

Menet:

R =

Injektivitás:



(ii) Ábrázold a $[x–0,2]$ hozzárendelésű függvényt!

Trafó:

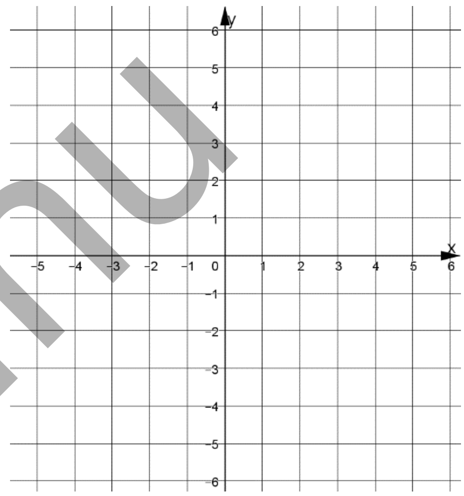
D=

Zérushelyek: $x\in$

Menet:

R_f =

Injektivitás:



(iii) Oldd meg: $[x]=x$

(iv) Alappélda: $[x]=3x+2$ ***tanm_fuggvenyek_egyenletek_F_3_2_c.ggb***

1. mo:

$[x]\in Z \Rightarrow$

2. mo.:
$x-1 < [x] \leq x$

(v) $3[2x+2]-1=4x+3$

III/3) Törtrész és törtrész függvény (tanm_fuggvenyek_egyenletek_F_3_3.ggb)

a) Def: $\{x\}:=x-[x]$

$\{5,3\}=$ $\{0,8\}=$ $\{6\}=$ $\{-4\}=$

$\{-4,3\}=$ $\{-0,672\}$ $\left\{\frac{44}{7}\right\}=$ $\left\{-\frac{23}{5}\right\}=$

b) A függvény: frac( ):**R**$\rightarrow$

Segít a definíció: $\{x\}:=x-[x]$

$D_{frac}=$

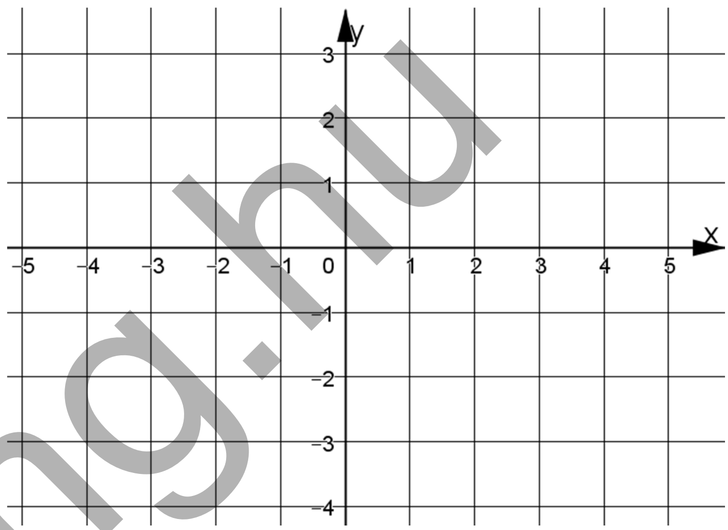
Periodikus

Zérushely:

Menet:

Injektivitás:

$R_{frac}=$



c) Törtrészes egyenletek, egyenlőtlenségek. Nagyon fontos az értékkészlet figyelés!

(i) Mivel egyenlő:
$[sgn^2(x)]=$ $sgn(\{x\})=$

(ii) $\{x\}=0,8$

(iii) $\{x\}=-0,2$

(iv) Alappélda: $\{3x\}=0{,}6$

(v) $\{-2x+3\}=0{,}6$

(vi) $\operatorname{sgn}\{x\}=[x]$

III/4) Az abszolútérték: Kalandozások a matematikában 8. oszt./144.o-

a) Def: |x|=

Ez szemléletesen azt mutatja meg, hogy milyen távol van az adott szám a 0-tól.

|5,3|= |−6,2|= |0|= $\left|-4,\dot{9}\right| =$

Ősképkeresés:

$|x|=2$

A definíció ekvivalens a következő definícióval:
$|x| := \operatorname{sgn}(x)\cdot x$

Áll.: |a|=|–a|

Vegyük észre: $x^2=$

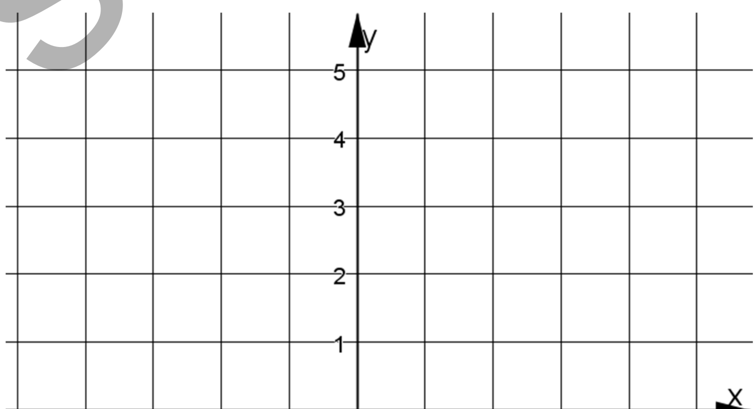
b) A függvény
abs( ): $\mathbf{R}\to\mathbf{R}^+_0$; $x\mapsto|x|$

$D_{abs}=\mathbf{R}$.

Két intervallumra kell leszűkíteni, és azon a két intervallumon két különböző lineáris fv-ként viselkedik.

<table>
<tr><td colspan="2">] ; [</td><td colspan="2">[ ]</td><td colspan="2">] ; [</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="3">abs() ≡ fv.</td><td colspan="3">abs() ≡ fv.</td></tr>
<tr><td colspan="3"></td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td></tr>
</table>

ZH:
menet:
Nem injektív.
Alulról korlátos.



Figyelem: „abszolútértéknél töréspont ott van, ahol az argumentum jelváltó”!

Definíciók függvényjellemzéshez:

… $x_0 \in D_f$ az f( ) fv. minimum (maximum) helye és f(x_0) a fv. min. (max.) értéke, ha $\forall x \in D_f \Rightarrow f(x_0) \leq (\geq) f(x)$.

… f( ) fv. páros, ha $\forall x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$ és $f(x)=f(-x)$

Pl: x^2 fv., vagy $|x|$ vagy x^4 fv.

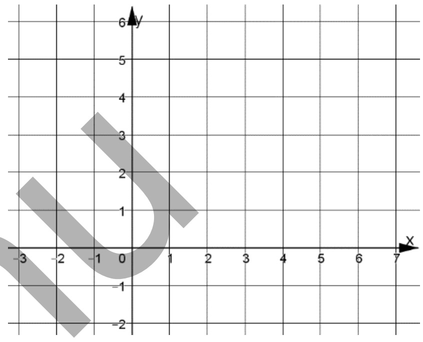
… f( ) fv. páratlan, ha $\forall x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$ és $f(x)=-f(-x)$

Pl: x fv., vagy x^3 fv.

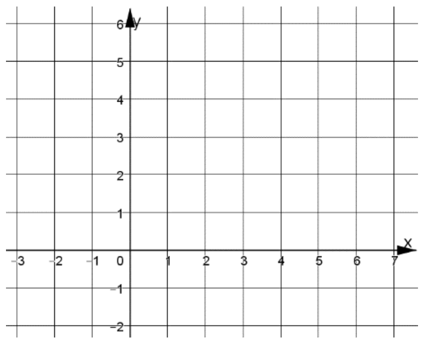
c) Egyszerűbb fv-ábrázolások, egyenletek

(i) Ábrázold és jellemezd: f( ):**R**→**R**; $y=|x-2|$

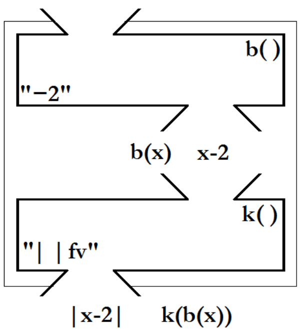
- Intervallumonkénti – **töréspontok szerinti** – ábrázolás:
  Argumentum-töréspont - keresés:
  I. II.

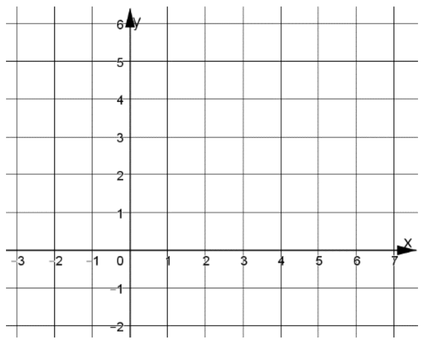


- A belső függvény trafója: **Függvényérték trafó** (az abs. értékkel!)
  b( ): **R**→**R**; *y*=
  k( ): **R**→**R**; *y*=
  k∘b=k(b( ))=
  Az *b( )* függvény képe lineáris.
  A *k( )* függvény egy abszolútérték függvény, vagyis a nemnegatív értékeket nem trafózza, a negatív értékeknek az ellenkezőjét veszi. Vagyis ami az *x* tengely alatt van, azt **„tükrözi az *x* tengelyre”.**



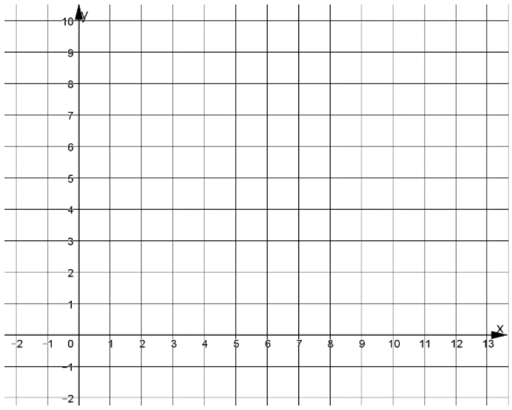
- függvénykompozíciós ábrázolás:
  Argumentum trafó
  Csak röviden:





(ii) Egyenlet: $|x-1| = \frac{1}{2}x+4$

Egyenletmegoldás mindig: Intervallumonkénti – töréspontok szerinti!



I. II.

(iii) $2\left|\frac{x}{2}-1\right|-3=-2x+7$

tanm_fuggvenyek_egyenletek_F_3_4_c_4_abs_egyenlet.ggb

Egyenletmegoldás mindig: Intervallumonkénti – töréspontok szerinti!

I. II.

d) Összetettebb egyenletek: Abszolútértékek összege, különbsége

(i) $|10-2x|+|3x-2| = \frac{x}{2}+12$

tanm_fuggvenyek_egyenletek_F_3_4_c_4_abs_egyenlet.ggb

Először is bölcsebb a következő formára hozni:

$|\qquad\qquad|+|3x-2| = \frac{x}{2}+12$

Egyenletmegoldás mindig: Intervallumonkénti – töréspontok szerinti!
Keressük meg a töréspontokat: <u>Jobb az előjel grafikont nézni.</u>

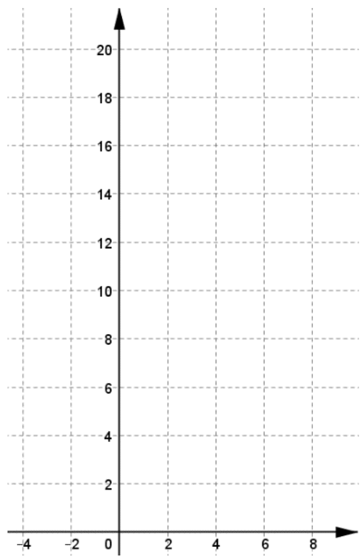
Ezek után csak 3 szétválasztás van:

I. II. III.

Nézzük meg a baloldal intervallumokra szűkített függvényeit:

I.	II.	III.
(bo.: szűkített fv.)	(bo.: szűkített fv.)	(bo.: szűkített fv.)

VEGYÜK ÉSZRE: f( ): **R**→**R**; f(x)= |3x–2|+|2x–10| függvény a kisebbik törésponttól balra szig. m. cs. illetve a nagyobbiktól jobbra szig. monoton nő.



(ii) $-|2-x|+|-2x-7|=x+5$

tanm_fuggvenyek_egyenletek_F_3_4_c_4_abs_egyenlet.ggb

Először is bölcsebb – lenne – a következő formára hozni:

| |+| | = x+5 Még a sorrend is számítana…

De most ügyetlenek vagyunk, és az eredetit nézzük – és senyvedünk.

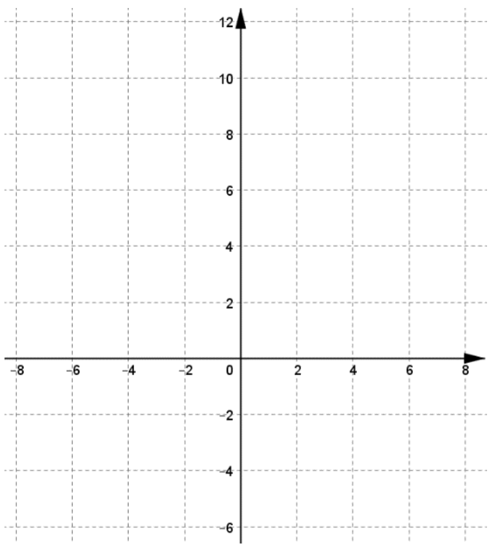
Egyenletmegoldás mindig: Intervallumonkénti – töréspontok szerinti!
Keressük meg a töréspontokat: Jobb az előjel grafikont nézni.

Ezek után csak 3 szétválasztás van:

I. II. III.

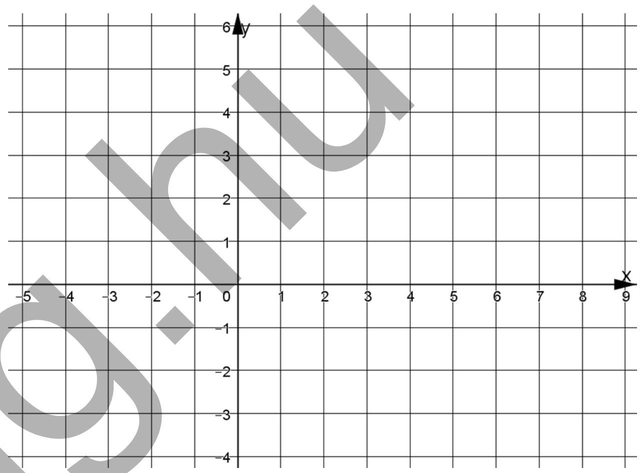
Nézzük meg a baloldal intervallumokra szűkített függvényeit:

I.	II.	III.
(bo.: szűkített fv.)	(bo.: szűkített fv.)	(bo.: szűkített fv.)

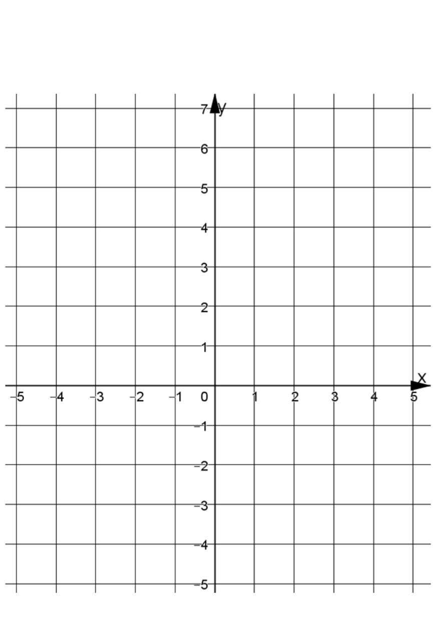


e) Összetettebb egyenletek: Egymásba-skatulyázott abszolútértékek

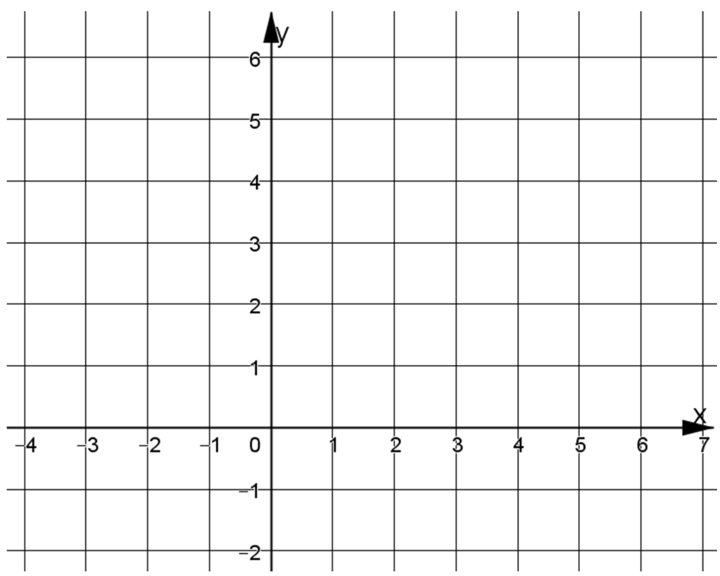
(i) $\left||x-2|-3\right|=\frac{x}{2}+1$ ESETEKRE BONTÁS!



(ii) $4\left||2x+1|-4\right|=2x+17$



(iii) $|1-2x|-|3-x| = x+2$



IV. Függvény-transzformációk

IV/1) Egy újabb geometriai transzformáció: merőleges affinitás

tanm_fuggvenyek_egyenletek_F_4_1_meroleges_aff.ggb

a) Def:

adott t egyenes (tengely) és $\lambda \in \mathbf{R} \setminus \{0;1\}$

$t^{\lambda}(\ )$: $S \to S$; $P \mapsto P'$

ahol: $P \in t \Rightarrow P \equiv P'$

$PP' \perp t$

$\lambda > 0 \Rightarrow$ P és P' ugyanabban a félsíkban vannak

$\lambda < 0 \Rightarrow$ P és P' két különböző félsíkban vannak

$d(t;P') = |\lambda| \cdot d(t;P)$

Jelölés: $t^{\lambda}(P) = P'$

b) Tulajdonságok (szokástól eltérőn előre vesszük, mert nem egyértelműek)

(i) Illeszkedéstartó

(ii) Nem távolságtartó és nem is szögtartó

(iii) Egyenest egyenesbe visz (majd belátjuk – a kp-os hasonlósági tarónál)

(iv) Általában nem szimmetrikus, kivéve ha $\lambda = -1$ (Ebben az esetben: tengelyes tükrözés)

(v) Körüljárás-tartás: λ pozitív igen, negatív: megfordítja

(vi) Kölcsönösen egyértelmű (injektív) (egy pontnak csak egy ősképe van)

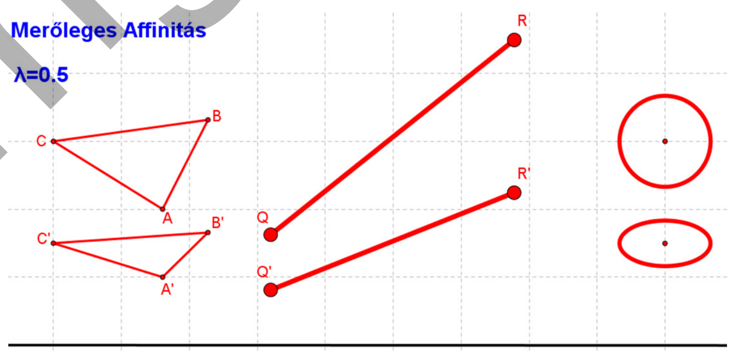
(vii) Általában nem szimmetrikus

(viii) Fixpont, fix egyenes, fix alakzatok (ha $\lambda \neq 1$); Invariáns egyenesek, invariáns alakzatok

(ix) Speciális esetek:

$\lambda = 1$: Azonosság

$\lambda = -1$: Tengelyes tükrözés



c) Szerkessz ilyet:

Pont, Egyenes: t-re merőleges és t-re nem merőleges; Szakasz, Kör

IV/2) Függvénykompozíciók és az inverz függvény

a) Külső-belső függvény

f( ): **R**→**R**; y=sgn(x)

g( ): **R**→**R**; y=x+2

h( ) : **R**→**R**; y=–3x

Mit csinál az „f( )" függvény?: A bedobott argumentumnak veszi a szignumát.

Mit csinál a „g( )" függvény?: A bedobott argumentumhoz hozzáad 2-őt.

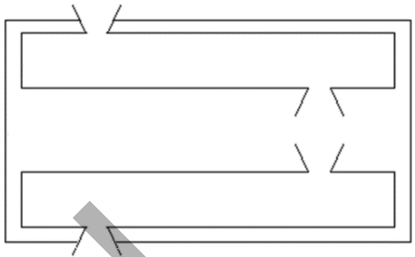
Mit csinál a „h( )" függvény?: A bedobott argumentumnak veszi a –3-szorosát.

fog: fog≡

Írd be a gépbe a „működésüket":

Az elkészült függvény

c( ): **R**→**R**; y=

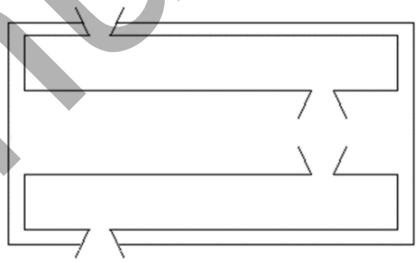


gof: gof≡

Írd be a gépbe a „működésüket":

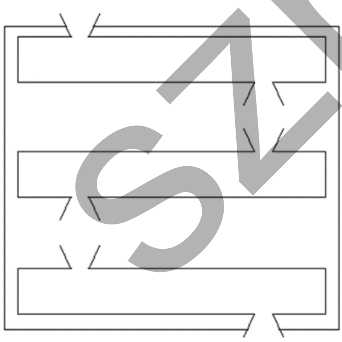
Az elkészült függvény:

d( ): **R**→**R**; y=sgn(x)+2

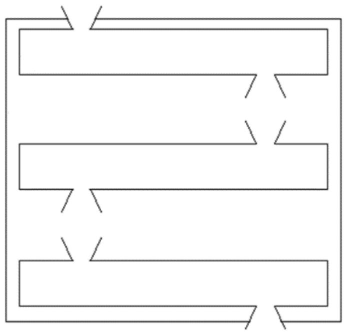


Írd föl a következő függvényeket kompozíciókkal, géppel:

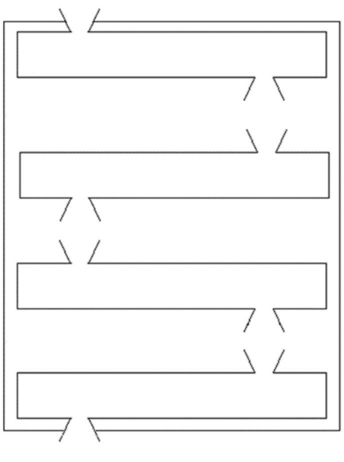
–3·sgn(x+2)=



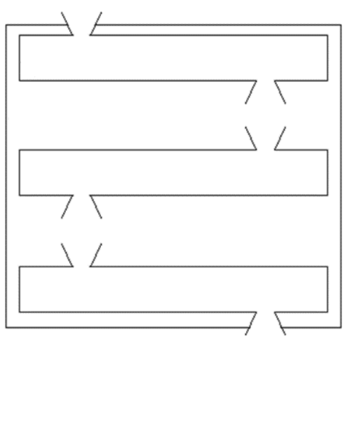
sgn(x+2)+2=



–3·sgn(–3x+2)=



–3x+4=



b) Inverz függvény

Csakis mely függvényeknek lehet inverze: az injektív (kölcsönösen egyértelmű) függvényeknek!

$f(\ )$: **R**→**R**; $y=2x-3$

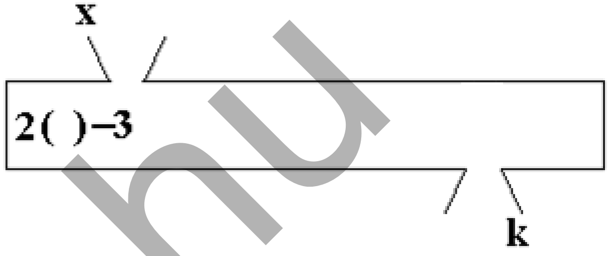
Kérdés: Mit kell bedobni a függvénybe, hogy alul k „pottyanjon” ki?

Legyártjuk a „visszafelé tekerős” függvényt az eredetiből:

Invertáljuk:

$f^{-1}(\ )$: **R**→**R**; $y=$

Vagyis ha __________________-t dobok be a fv-be, akkor k értéket ad.



IV/3) A külső függvény lineáris, a belső a „trafózandó”, pl: sgn( ), frac( ), int( ), abs( ).

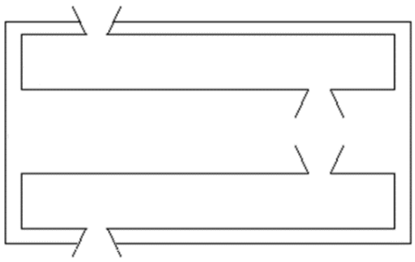
fv_trafo__kulso_fv__függvényérték_trafó_F_4_3.ggb

a) g( ): **R**→**R**; y=sgn(x)+2,5

b( ) : **R**→**R**; y=

k( ) : **R**→**R**; y=

g( )≡

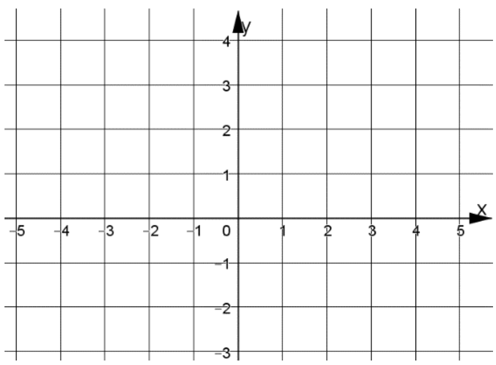


Vagyis a sgn( ) fv minden kiadott értékéhez még 2,5-öt hozzáad a másik függvény.

Képileg: a szignum függvény minden értelmezés-tartománybeli helyhez tartozó érték helyett 2,5 egységgel magasabban található értéket rendel: „feltolja” a fv. képét 2,5 egységgel.

Geometriai transzformációval leírva:

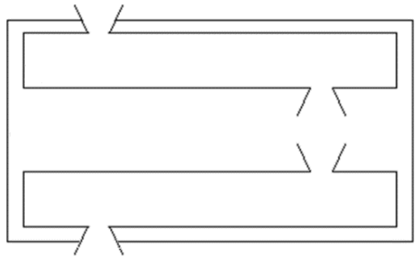
$\text{graf}_{g(\,)} =$



b) g( ): **R**→**R**; y=[x]–3

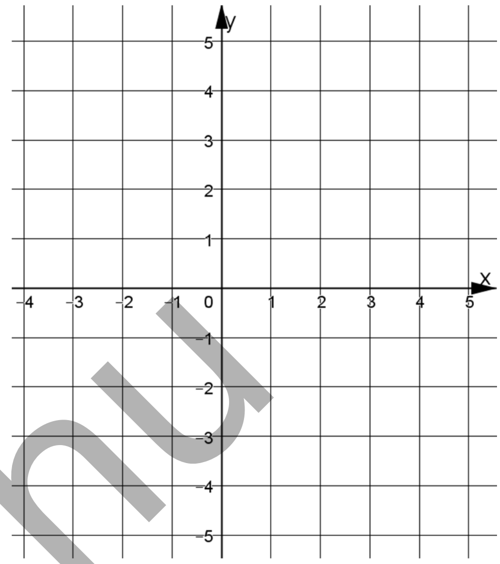
b( ): **R**→**R**; f(x)=

k( ): **R**→**R**; $x \longmapsto$

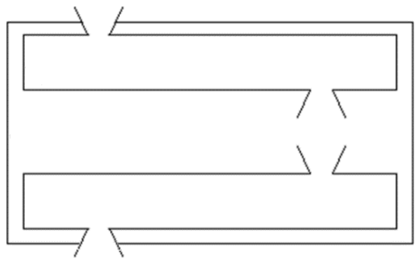


g≡

Vagyis az egészrész fv. minden kiadott értékéből még 3-at levon a másik függvény. Képileg: az egészrész függvény minden értelmezés-tartománybeli helyhez tartozó érték helyett 3 egységgel lentebb található értéket rendel: „letolja” a fv. képét 3 egységgel.



A trafó: graf$_g$ =



c) g( ): **R**→**R**; $y = -\frac{2}{3}\{x\}$

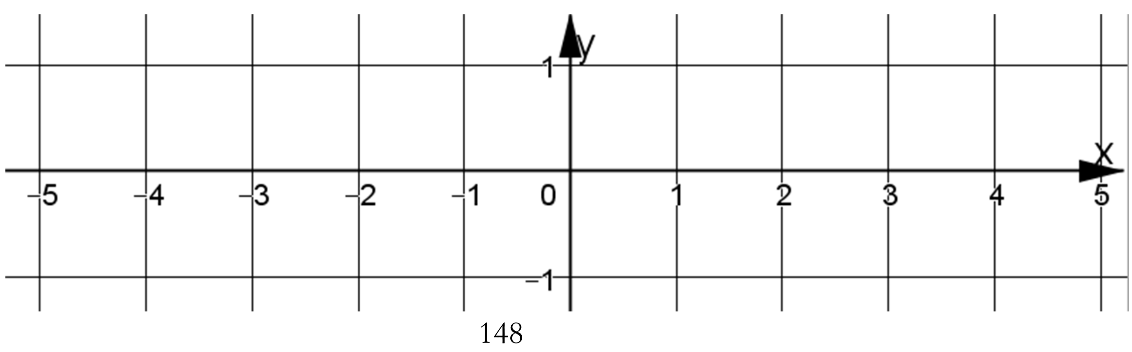
b( ): **R**→**R**; y=

k( ): **R**→**R**; y=

g≡

Vagyis a frac( ) fv. minden kiadott értékének veszi a $-\frac{2}{3}$-át a másik függvény. Képileg: a törtrész függvény minden értelmezés-tartománybeli helyhez tartozó érték helyett annak a $-\frac{2}{3}$-át rendeli: $-\frac{2}{3}$-os merőleges affinitással „tükrözi az x tengelyre, majd „összenyomja” az y tengely mentén/v. „összenyomja az x-tengelyre” az eredeti törtrész fv. képét.

A trafó: graf$_g$ =



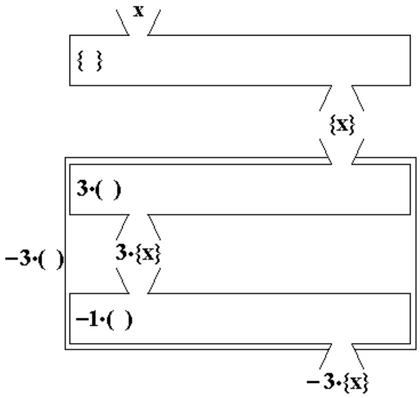
d) g( ): **R**$\to$**R**; y=–3{x}

b( ): **R**$\to$**R**; y=

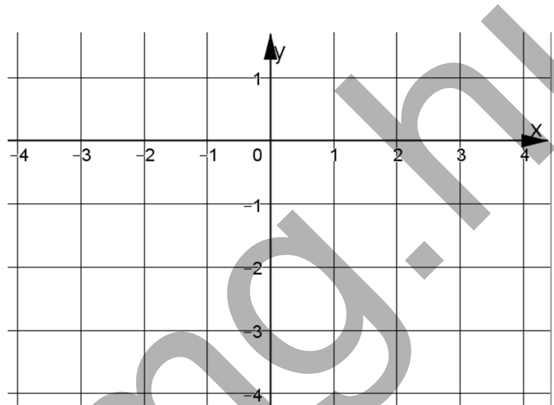
k( ): **R**$\to$**R**; y=

g≡

A trafó: graf$_g$ =



Vagyis a frac( ) fv. minden kiadott értékének veszi a (–3)-szorosát a külső függvény.
Képileg: a törtrész függvény képét a 3-mal szorzó függvény $x^{\lambda=3}$ merőleges affinitással „széthúzza” az y tengely mentén.
Végül a –1-gyel szorzó függvény tükröz az x tengelyre.
Ez persze egyben is megy: –3-mal szorzó függvény: $x^{\lambda=-3}$ merőleges affinitással trafózza a beledobott függvény képét.



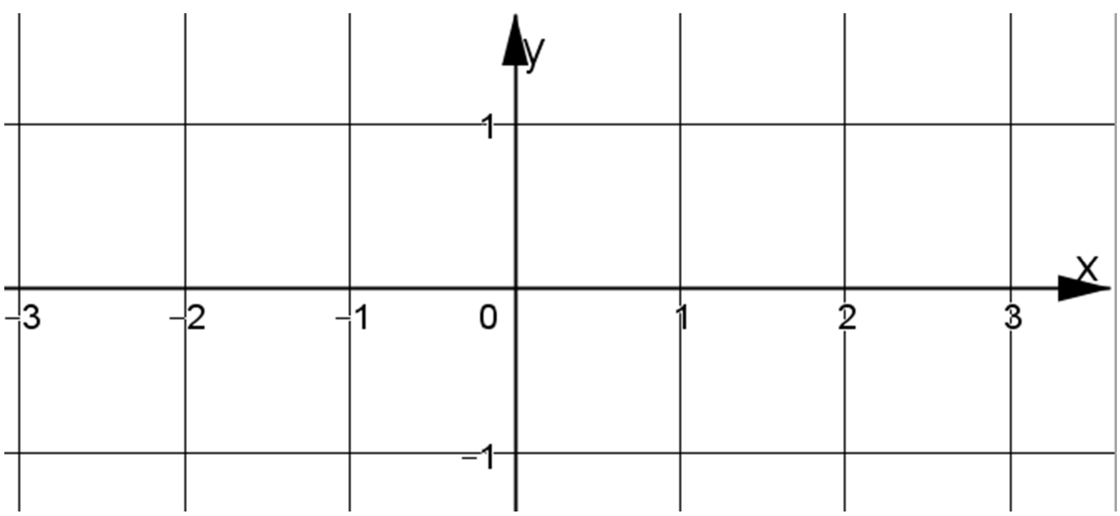
e) f( ): **R**$\to$**R**; $y=-\frac{2}{3}\{x\}+1$

b( ): **R**$\to$**R**; y=

k( ): **R**$\to$**R**; y=

f( )≡

A trafó: graf$_f$ =

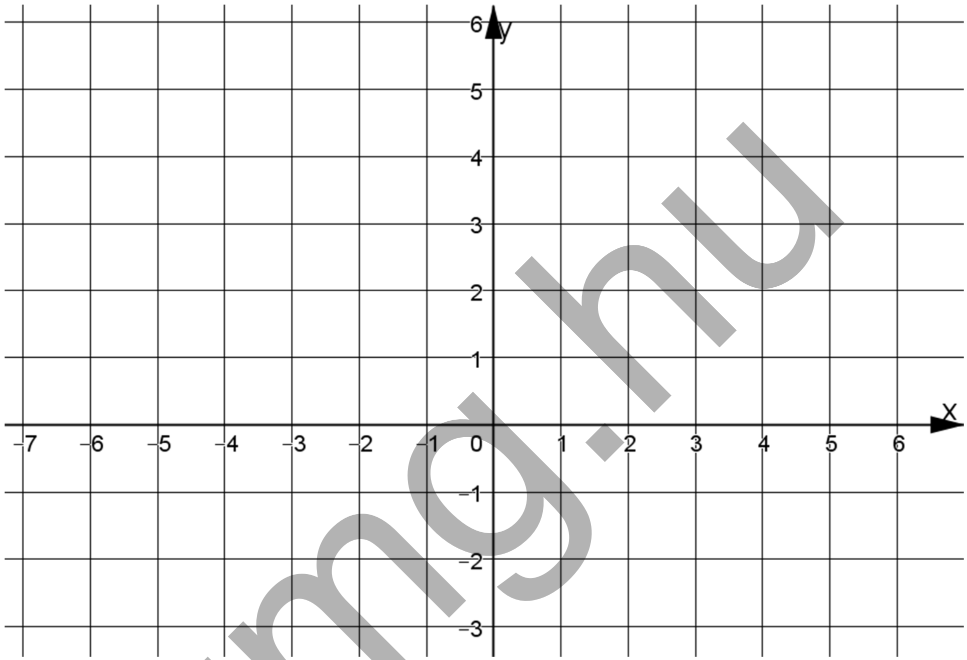


f) g( ): **R**→**R**; $y = \left| |x+3| - 2 \right| + 1$

Egy kicsit tanulmányozhatjuk ezen azt is, hogy hogyan „trafóz” maga az abszolút érték függvény.

Tudjuk, hogy a pozitív értékeket békén hagyja, a negatívokat –1-gyel szorozza. A negatív értékek helyett -1-szeresüket adja, vagyis tükrözi ezeket a III. és IV. síknegyedbe eső pontokat az *x* tengelyre.

Tehát először „feltükrözzük” az *x*+3 grafikonjának *x* tengely alá eső szárát az *x* tengelyre. Majd ezt a V alakot lentebb toljuk 2 egységgel, majd megint a V alak *x* tengely alá eső részét tükrözzük az *x* tengelyre. Végül az így kapott W alakot felemeljük 1-gyel.



Def.: lokális minimum (maximum): … $x_0 \in D_f$ lokális minimumhely (maximumhely), ha $\exists k_\delta(x_0)_\rightarrow \forall x \in k_\delta(x_0) \cap Df \Rightarrow f(x) \geq (\leq) f(x_0)$

g) Összefoglalás: Külső függvénnyel trafózzuk az eredetit – függvényérték trafó

Ha a külső függvény lineáris, akkor a belső függvényt az *y* tengely mentén trafózom.

Ha egynél nagyobb számmal szorzom, akkor az *y* tengely mentén „széthúzom a függvény képét”. Ha 0 és egy közé eső számmal szorzom (vagyis egynél kisebb pozitívval szorzom), akkor az y tengely mentén „összenyomom” a függvény képét.

Negatív számmal történő szorzás: először tükrözöm az x tengelyre, majd mintha pozitívval szoroznék…

Ha hozzáadok vagy kivonok belőle egy pozitív számot, akkor fel illetve lefelé tolom a függvényt.

Egzaktul:

ha a külső függvény: a*x*+b ($a \neq 0$)

(vagyis a függvénykompozíció: a·f( ) + b)

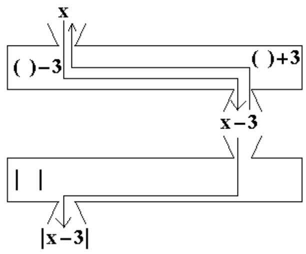
akkor: először: $x^{\lambda=a}$( ) trafó; majd: $E^{v(0;b)}$ trafó: $E^{v(0;b)}(x^{\lambda=a}(graf_{f(\,)}))$

IV/4) A belső függvény a lineáris.

„Változó (argumentum)-transzformáció”

a) $f(\ )$: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$; $y=|x-3|$

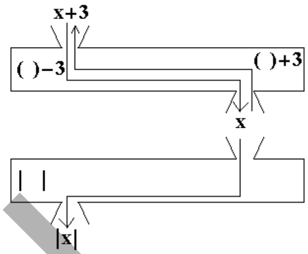
Mielőtt nekilátunk a vizsgálatnak, szögezzük le: ez nem az $|x|-3$ hozzárendelésű függvény. Hiszen pl. az f( ) fv. értékkészlete a nem-negatív számok, az |x|–3 -é pedig lehet –3 tól fölfelé bármi, pl. –2 is.
Mondjuk f(0)=3, és |0|–3=–3



b( ): $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$; y=

abs( ): $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$; y=

f( )≡



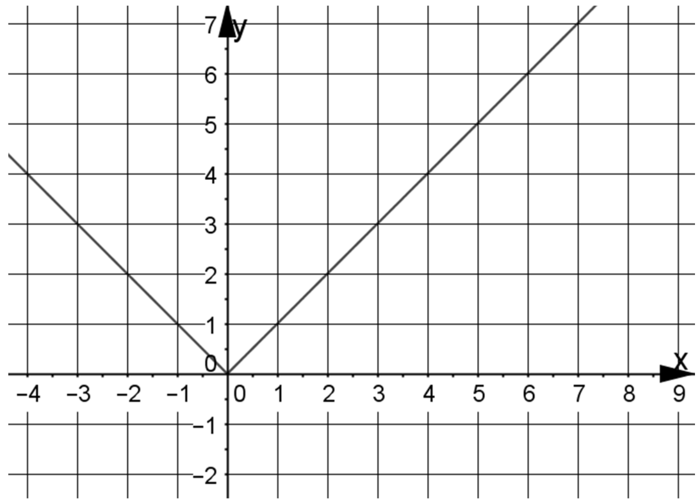
Először is vizsgáljuk meg az abszolútérték függvényt:
A minimum helye, „csúcsa” az x=0 helyen van, és ott 0-t vesz föl.
Hol veszi fel ezentúl a 0 értéket?
Úgy lehetne mondani, hogy „3-mal később, 3-mal nagyobb számnál”, hiszen minden bedobott változóból először le kell vonni 3-at. Vagyis ezentúl az x=3 helyen veszi fel azt a 0 értéket, amelyet korábban az x=0 helyen vett fel.
Hol veszi fel ezentúl a korábban x=2-höz tartozó |2|=2 értéket?
„3-mal később, 3-mal nagyobb számnál”. Hiszen az x–3 belső függvény az 5-ből csinál 2-őt, amelyet be kell dobni az | | fv-be.

Az eredeti fv. x_0 helyen $|x_0|$ értéket vett föl. Az új függvénybe mit kell behelyettesíteni, hogy $|x_0|$ értéket adjon? A belső függvény kimenetébe dobjuk be az x_0 értéket, és nézzük meg, hogy mit kellett ahhoz bedobni, hogy a belső fv. x_0-t adjon, vagyis mi az x_0 belső fv. szerinti ősképe: $b^{-1}(x_0)$

Szumma-szummárum: minden szokásos értéket „3-mal később” vesz föl; a belső függvény inverze is mutatja: az eredeti szám helyett annak a belső függvény inverzével trafózott ősképét kell bedobni a függvénykompozícióba, hogy a szokásos értéket kapjuk.

Tehát a kép jobbra tolódik 3 egységgel:

$\text{graf}_{f(\ )}=E^{\underline{v}(3;0)}(\text{graf}_{abs(\ )})$

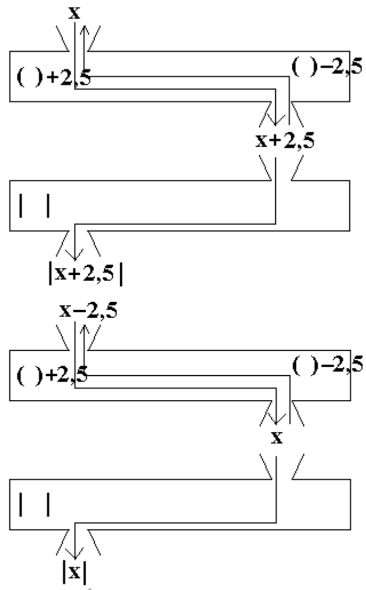


b) $g(\,)$: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$; $y=|x+2{,}5|$

b( ): $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$; y=

abs( ): $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$; y=

g( )≡



Az abszolútérték függvényt: minimum helye, „csúcsa” az x=0 helyen van, és ott 0-t vesz föl. Hol veszi fel ezentúl a 0 értéket?

Úgy lehetne mondani, hogy „2,5-mal korábban, 2,5-tel kisebb számnál”, hiszen minden bedobott változóhoz először hozzá kell adni 2,5-öt. Vagyis ezentúl az x=–2,5 helyen veszi fel azt a 0 értéket, amelyet korábban az x=0 helyen vett fel.

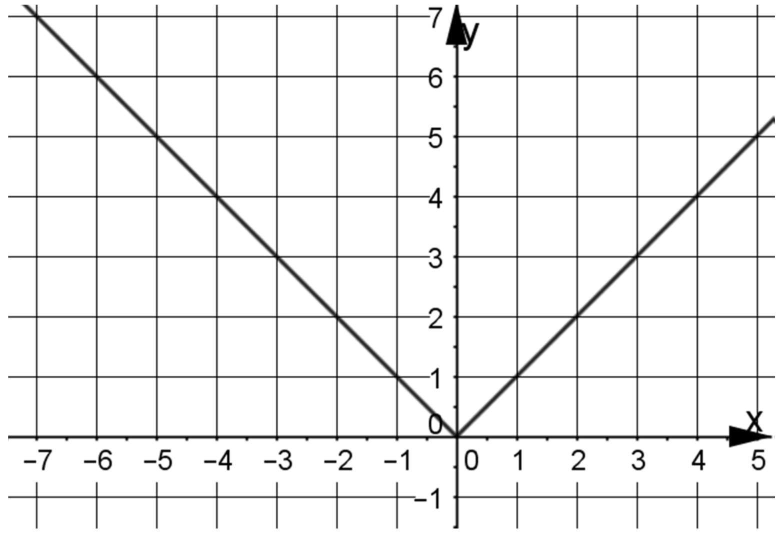
Tehát ha eddig x_0 helyen y_0 értéket vett föl, akkor ezentúl ezt az y_0 értéket az x_0–2,5 helyen veszi fel.

Az eredeti fv. x_0 helyen $|x_0|$ értéket vett föl. Az új függvénybe mit kell behelyettesíteni, hogy $|x_0|$ értéket adjon? A belső függvény kimenetébe dobjuk be az x_0 értéket, és nézzük meg, hogy mit kellett ahhoz bedobni, hogy a belső fv. x_0-t adjon, vagyis mi az x_0 belső fv. szerinti ősképe: $b^{-1}(x_0)$

Szumma-szummárum: minden szokásos értéket „2,5-tel korábban” vesz föl; a belső függvény inverze is mutatja: az eredeti szám helyett annak a belső függvény inverzével trafózott ősképét kell bedobni a függvénykompozícióba, hogy a szokásos értéket kapjuk.

Tehát a kép balra tolódik 2,5 egységgel.

$\text{graf}_{g(\,)}= E^{\underline{v}(-2.5\,;\,0)}(\text{graf}_{abs(\,)})$



c) $f(\ ): \mathbf{R}\to\mathbf{R};\ y=\{x/3\}$

$b(\ ): \mathbf{R}\to\mathbf{R};\ y=$

$\mathrm{frac}(\ ): \mathbf{R}\to\mathbf{R};\ y=$

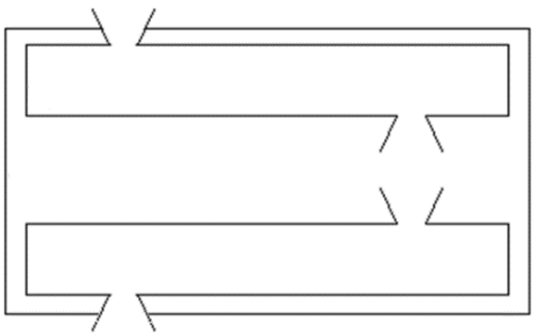
$f(\ )\equiv$

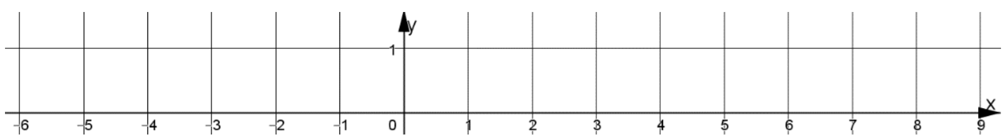
Ha eddig egy mondjuk piros ponttal jelzett y_0 értéket vett fel az x_0 helyen, akkor mit kell bedobni a függvénykompozícióba, hogy ugyanezt az „pirossal jelzett” y_0 értéket vegye föl?
Azt az értéket, amelyre a belső függvény x_0-ad ki, ad át a külső függvénynek: $b^{-1}(x_0)$-t.

Konkrétan:
a belső függvény inverz függvénye: $b^{-1}(\ ) : \mathbf{R}\to\mathbf{R};\ y=3x$
ha x_0-hoz a frac( ), vagyis törtrész { } fv. $\{x_0\}$-t = y_0-t rendel, akkor: $b^{-1}(x_0)$-t, vagyis $3x_0$-t kell bedobni a belső függvénybe, hogy a törtrész-függvénybe x_0 érkezzen, amiből ő y_0-t gyárt. Vagyis:

Így háromszor akkora x-et kell bedobni a függvénykompozícióba, mint a törtrész függvénybe, hogy ugyanazt az y_0-t adja ki a fv. Vagyis az x_0-helyett $3x_0$ helyen veszi föl az y_0 értéket.

Összességében: a belső függvény inverzével trafózzuk az x tengely mentén a külső függvényt.



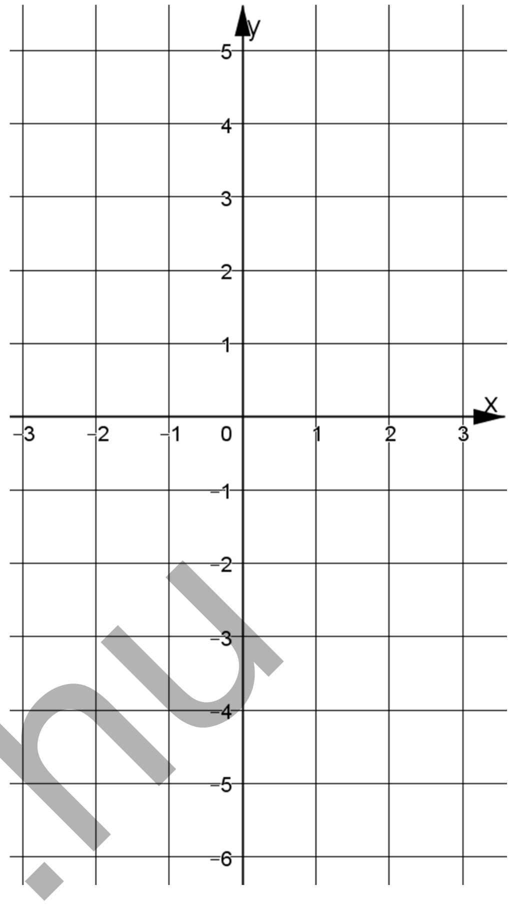


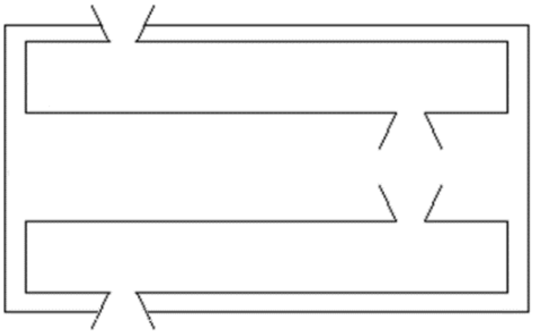
d) $f(\ )$: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$; $y=[2x]$

$b(\ )$: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$; $y=$

$\mathrm{int}(\ )$: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$; $y=$

$f(\ )\equiv$



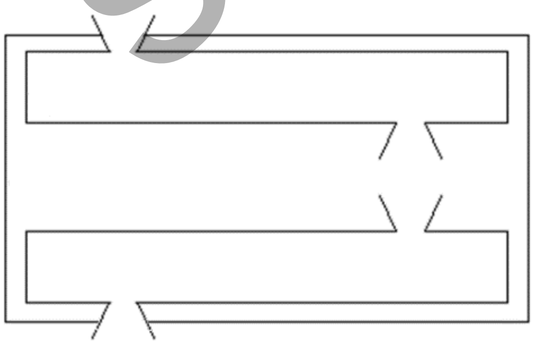


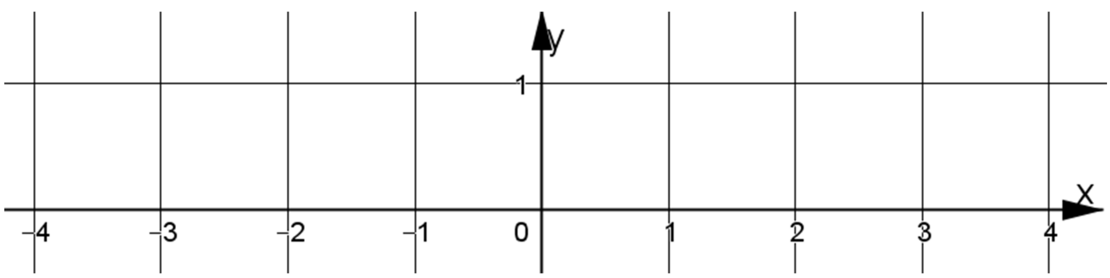
e) $f(\ )$: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$; $y=\{-3x\}$

$b(\ )$: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$; $y=$

$\mathrm{frac}(\ )$: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$; $y=$

$f(\ )\equiv$



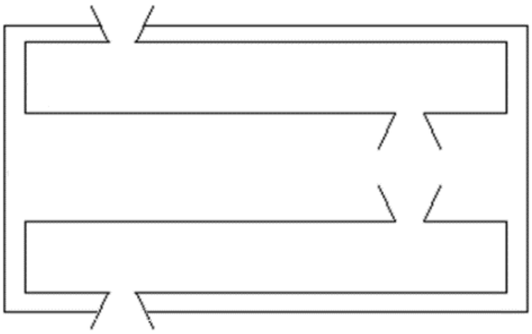


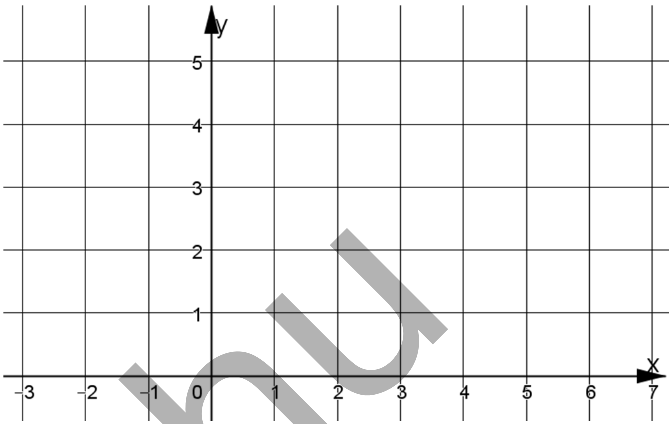
f) f( ): **R**→**R**; y=|2x–5|

b( ): **R**→**R**; y=

int( ): **R**→**R**; y=

f( )≡





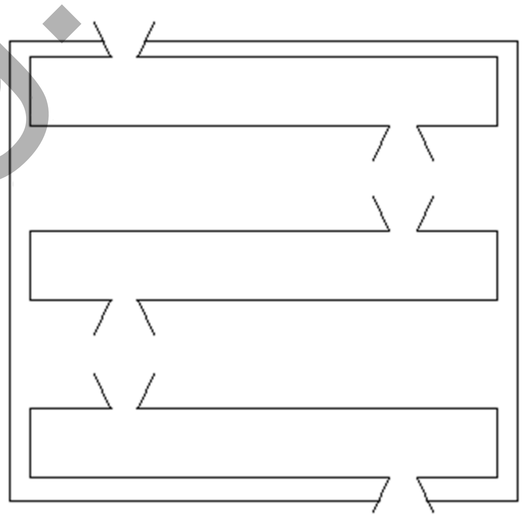
IV/5) *Minden együtt: g*( ): **R**→**R**; y=–1,5·frac(2x–1)+3

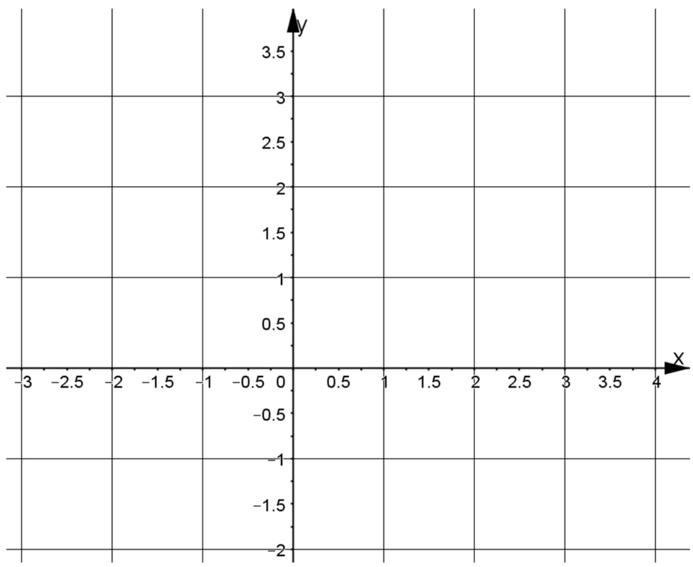
b( ): **R**→**R**; y=

frac( ): **R**→**R**; y=

k( ): **R**→**R**; y=

f( )≡





IV/6) Add meg a trafót, illetve a trafóból az *a*,*b*,*c*,*d* számokat, ha: g( )=$a\cdot$f($c\cdot$x+d)+b és

g( )= $-3\cdot f(x+5)+1$

g( )= $\frac{2}{3}\cdot f\left(x-3\right)-2$

g( )= $-\frac{4}{3}\cdot f\left(\frac{2x}{3}\right)+1$

g( )= $-2\cdot f(2x-3)-4$

$\text{graf}_{g(\,)}\equiv E^{\underline{\mathbf{v}}(0;-3)}(x^{\lambda=-2/3}(\text{graf}_{f(\,)}))$

$\text{graf}_{g(\,)}\equiv E^{\underline{\mathbf{v}}(0;2)}\ (x^{\lambda=0,5}\ (y^{\lambda=-3}(\text{graf}_{f(\,)})))$

$\text{graf}_{g(\,)}\equiv E^{\underline{\mathbf{v}}(0;1)}(x^{\lambda=5}(E^{\underline{\mathbf{v}}(-2;0)}\ (\text{graf}_{f(\,)})))$

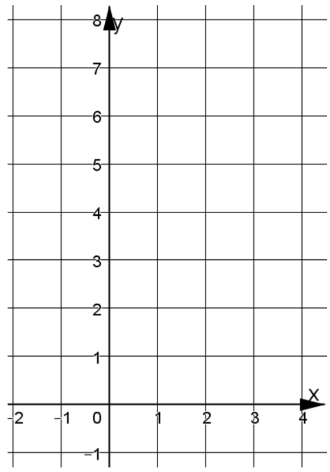
$\text{graf}_{g(\,)}\equiv E^{\underline{\mathbf{v}}(0;-2)}(x^{\lambda=-4}(E^{\underline{\mathbf{v}}(1;0)}(y^{\lambda=1/3}(\text{graf}_{f(\,)}))))$

IV/7) Mit tesz egy lineáris fv. meredekségével az *a*-val történő szorzás?

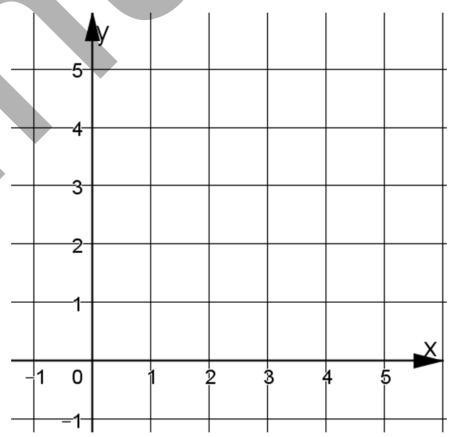
V. Intervallumonként lineáris fv-ek folytatása

V/1) Oldd meg grafikusan is

a) $3|x-1|+2=x+5$

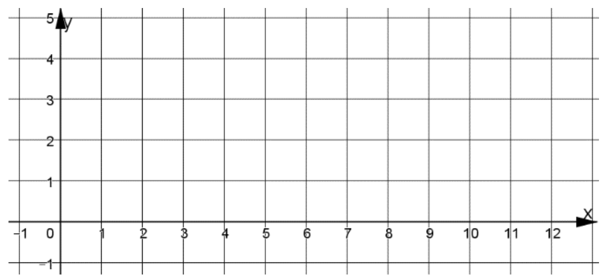


b) $|2x-3|=x/2+1$



c) $\left|-\frac{x}{2}+3\right|-2=x$

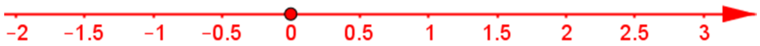
Egyszerűbb: $\left|\frac{x}{2}-3\right|-2=x$



V/2) Több abszolút érték: grafikusan is

a) $|x-1|-|2x-3|=-0,5$

Először is vizsgáljuk meg, mely intervallumokra kell szétszedni a bal oldal függvényét.

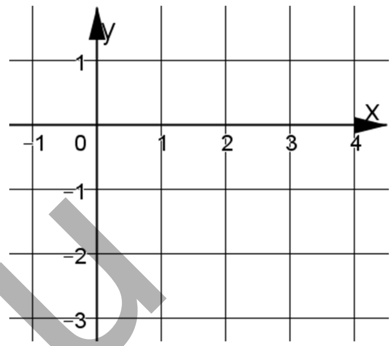


Intervallumonkénti mo. - töréspontok keresésével:

$f\big|_{]-\infty;\quad]}$:

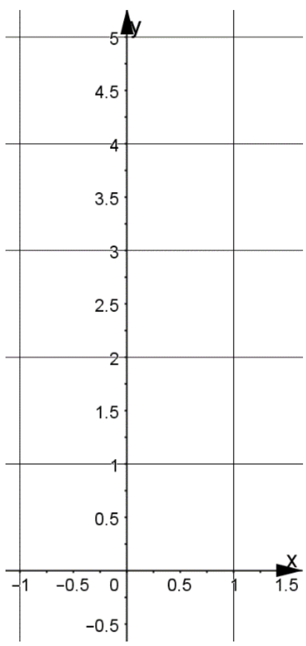
$f\big|_{]\quad;\quad]}$:

$f\big|$:



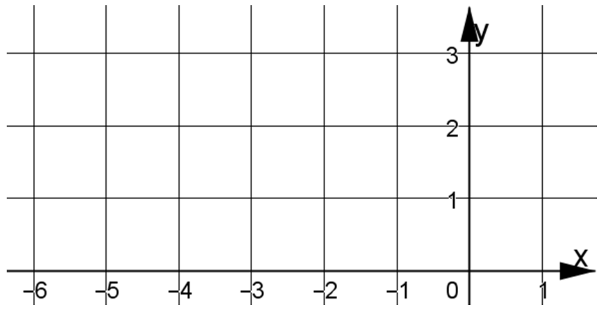
Megoldás: I. II. III.

b) $|2x-1|+|-1-3x|=x+2$



c) $|x+3| > \frac{x}{3}+2$

Először is vizsgáljuk meg grafikusan:



$f\Big|_{]\quad ;\quad]}$:

$f\Big|$:

I. II.

d) 2·|sgn[x]|={x}–1

e) $\left|\left|\left||x|+2x\right|+3x\right|+1\right| = -|\operatorname{sgn}(x)|+1$

f) 2·sgn((x–2)^2–1)=|2x–3|–1

I. II. III.

VI. Számsokaság jellemzése – egy kis statisztika:

VI/1) Távolságösszegek minimuma

VI/2) Adott: a=–3; b=2. Kell az a szám a számegyenesen, amelynek a két számtól vett távolságának összege minimális.

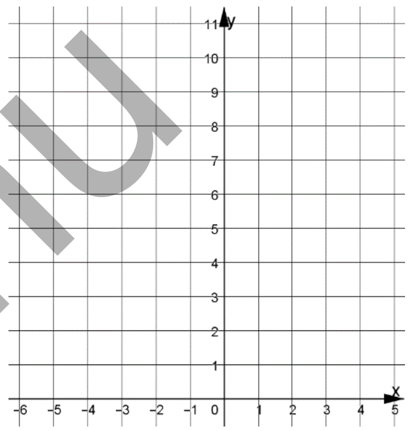
Legyen a keresett szám: x.

Ekkor az „a”-tól vett távolsága:

A „b”-től vett távolsága:

Vizsgáljuk meg a következő függvényt, hol van a minimum helye:

f( ) : **R**$\to$**R**; *y*=



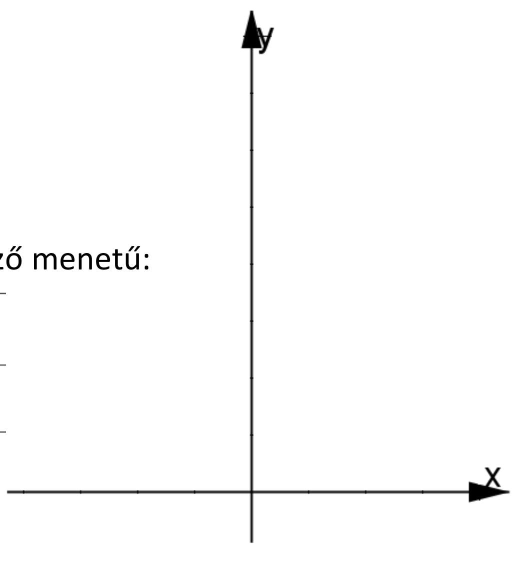
Vagyis látható, hogy bármely számot választva a [;] intervallumból x-nek, a távolságösszeg: ………………… lesz, és az a minimum.

a) Ábrázoljuk: a;b$\in$ **R**; f( ) : **R**$\to$**R**; *y*=|x–a|+|x–b|

Legyen pl.: a<b.

Ekkor:

I. II. III.



Vagyis látható, hogy a függvény a következő menetű:

VI/3) Számsokaság jellemzése

a) Definíciók

Egy dobókockával 20-szor dobtunk, s táblázatba foglaltuk, hogy melyik számot hányszor dobtuk:

szám:	1	2	3	4	5	6
darab:	3	4	3	5	2	3

A táblázat alapján a 20 adat növekvő sorrendben:
1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 6.
Az adathalmazt mintának is szoktuk nevezni.

Terjedelem: A legegyszerűbb mérőszám, amivel a szóródást jellemezhetjük: a terjedelem. A számsokaság legnagyobb és legkisebb számának különbségét terjedelemnek nevezzük. A fenti számsor terjedelme: 5

Átlag (számtani közép): az adatok összege osztva az adatok számával. Jelen példában: (3×1 + 4×2 + 3×3 + 5×4 + 2×5 + 3×6):20 = 3,4

Módusznak nevezzük a leggyakoribb adatot. Jelen esetben legtöbbször a 4-es fordul elő, így a módusz = 4. Ha lenne még egy adat, ami szintén ötször fordulna elő, akkor két módusza lenne az adathalmazunknak. Tehát móduszból lehet több is.

Mediánnak nevezzük a (növekvő vagy –néha csökkenő -) sorba rendezett adatok középső elemét. Ha 21-szer dobtunk volna, akkor a sorba rendezett adatok tizenegyedik eleme lenne a medián. **Most páros darab adat van, ilyenkor a két középső adat átlagát nevezzük mediánnak**. Így most a tizedik és a tizenegyedik adat átlagát kell kiszámolni: (3 + 4):2 = 3,5.

A növekvő (v. csökkenő) sorrendbe tett számok közül: 2k+1 db esetén a k+1-edik (a középső), 2k db. esetén a k. és k+1. számtani közepe (a két középső számtani közepe).

b) Egy faluban 38-as lábtól 42-es lábig élnek az emberek. Egy szegény cipész csak egy méretet tud gyártani. Melyik legyen az? Módusz, Medián, Átlag (számtani közép)

c) Írjuk fel, hogy melyik *hónap* az osztályban a születéshónapok módusza és mediánja.

d) Péter matek jegyei: 4 ;5; 4; 4; 1; 2; 5; 3; 1; 5
Mekkora a terjedelem, a módusz, a medián?

e) Írjuk fel az osztályban tanulói lábméretének: terjedelme, módusza, mediánja, számtani közepe.

f) Készítsünk olyan 10 természetes számból álló számadatsort, amely módusza 2, mediánja 3, átlaga 8.

Mo.:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.

g) Állítás: Adott egy A számsokaság: elemei $a_1;a_2;a_3 \dots a_k$.

$\sum_{i=1}^{k} |x-a_i|$ = min $\Leftrightarrow$ x= a számsokaság mediánja.

Figyelem, ez nem halmaz, lehet sok egyforma is!!!

Nem bizonyítunk, csak felvázoljuk a bizonyítás gondolatmenetét:

Pl.: 5 db szám: –10; –5; –1; 2; 5

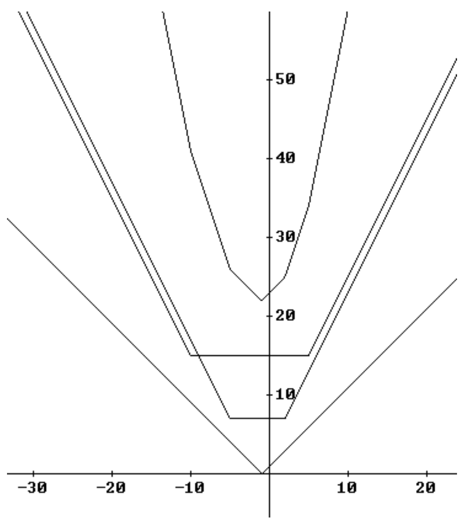
ABS(x –(– 10)) + ABS(x –(–5)) + ABS(x–(–1)) + ABS(x–2) + ABS(x–5)=

f(x)=|x+10|+|x+5|+|x+1|+|x–2|+|x–5|

Vigyázat, ez a szám véletlenül sem a számtani közép:
–10; –5; –1; 2; 5

mediánja: …………,

míg számtani közepe: ………..



Függvények és Egyenletek: G
Másodfok a Pitagorasz-tétel előtt

I. A másodfokú függvény

I/1) Definíció és a parabola

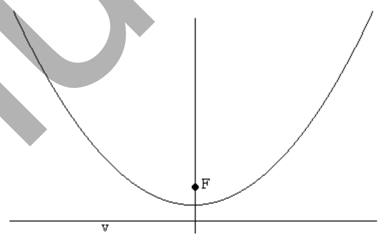
a) Def.: Az *f*( ): **R**→**R**; f(x)=ax^2+bx+c (a;b;c paraméter; a≠0) hozzárendelési szabályú függvényeket másodfokú függvényeknek nevezzük.

Tétel: (11. osztályban később bizonyítjuk): **A másodfokú függvények grafikonja parabola,** melynek tengelye párhuzamos az ordinátával.

b) A parabola (Geometria A/IV/1/h)
tanm_fuggvenyek_egyenletek_G_1_1_b_parabola.ggb

(i) A parabola definíciója
Adott egy *v* vezéregyenes és egy F∉ *v* fókuszpont.

Parabola:={P∈ Sík | d(P;F)=d(P;*v*)}



Elnevezések:

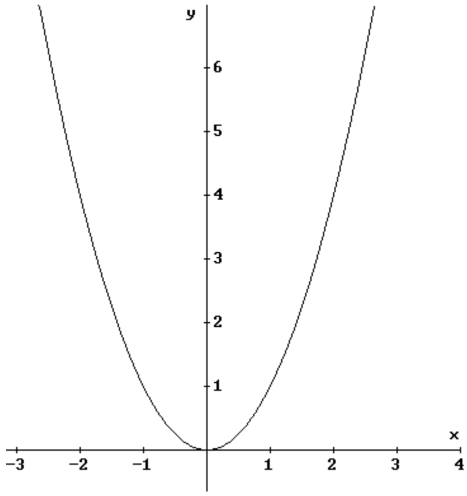
- F: fókusz (v. gyújtópont)
- v = vezéregyenes v. direktrix
- a parabola paramétere = p = d(F;v) = (ez távolság, adat)
- tengely: a v-re merőleges, fókuszon áthaladó egyenes: tengely
- tengely ∩ parabola: tengelypont v. csúcspont
- a fókuszból a parabola egy pontjához húzott szakasz: vezérsugár.

(ii) A definícióból következő néhány alaptulajdonság

- Tükrös a tengelyre
- A tengely merőleges a vezéregyenesre
- A C tengelypont felezi a fókusz és a vezéregyenes távolságát.

(iii) Szerkesszünk meg egy 1 cm paraméterű parabola néhány pontját.

I/2) Az alapfüggvény és vizsgálata



sqr( ): **R**→**R**; y=x^2.

$D_{sqr(\,)}$=

páros fv.

Def.: Páros függvény:

…f( ) fv. páros, ha $\forall x\in D_f \Rightarrow -x\in D_f$,

és ekkor f(x)=f($-x$)

pl: $|x|$; x^2; x^2 stb.

Grafikonja: tükrös az ordinátára.

Def.: Páratlan függvény:

…f( ) fv. páratlan, ha $\forall x\in D_f \Rightarrow -x\in D_f$,

és ekkor f(x)=−f($-x$)

pl: x; x^3; x^5 stb.

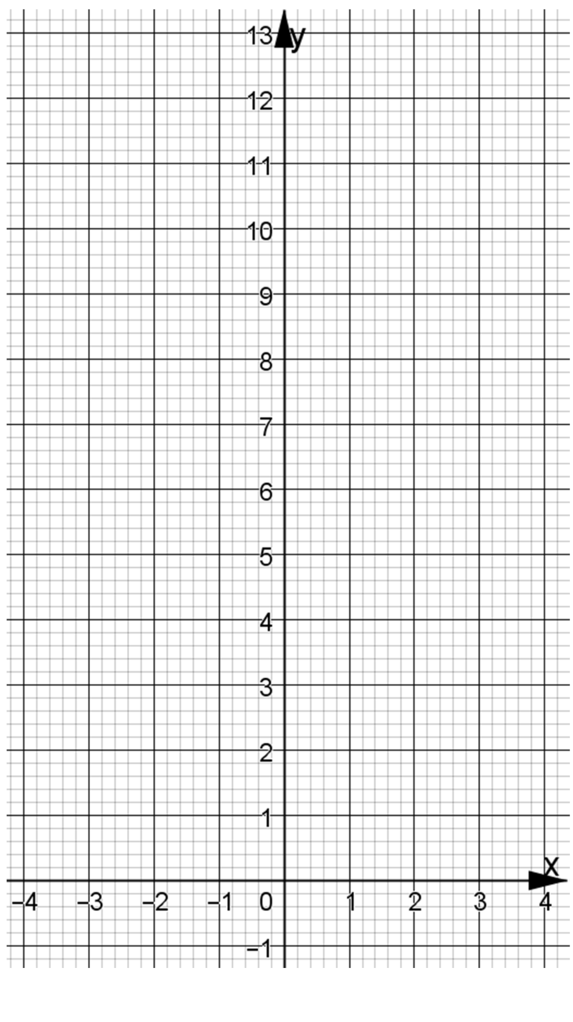
Grafikonja: tükrös az abszcisszára.

Injektivitás:

]−∞;0[	[0]	]0;∞[

ZH: x=

Menet:



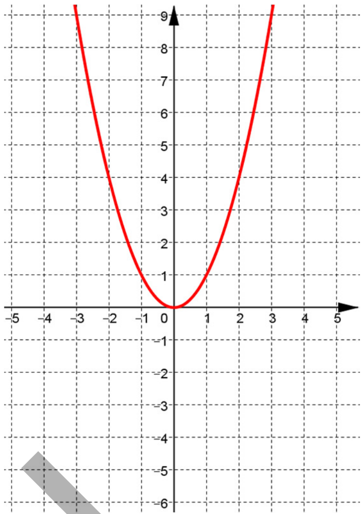
Csúcspont: C(;)

R_{sqr}=

Alakja: felfelé nyíló parabola

I/3) Trafózzuk a másodfokú alapfüggvényt: először jellemzés nem kell, csak tologassuk a koordináta rendszerben. ***A csúcspontot és a parabola állását érdemes figyelni!***

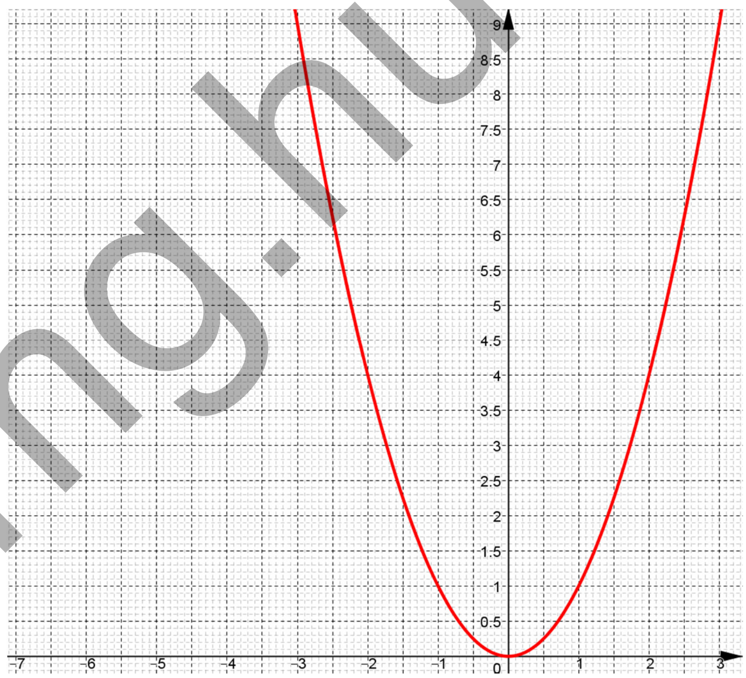
a) Add meg a transzformációt és a csúcspont koordinátáját, ha az alap függvény hozzárendelési szabálya: $x \mapsto x^2$

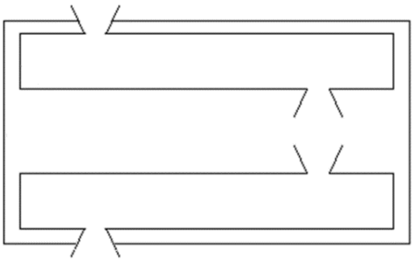


$g(x) = -x^2+1$

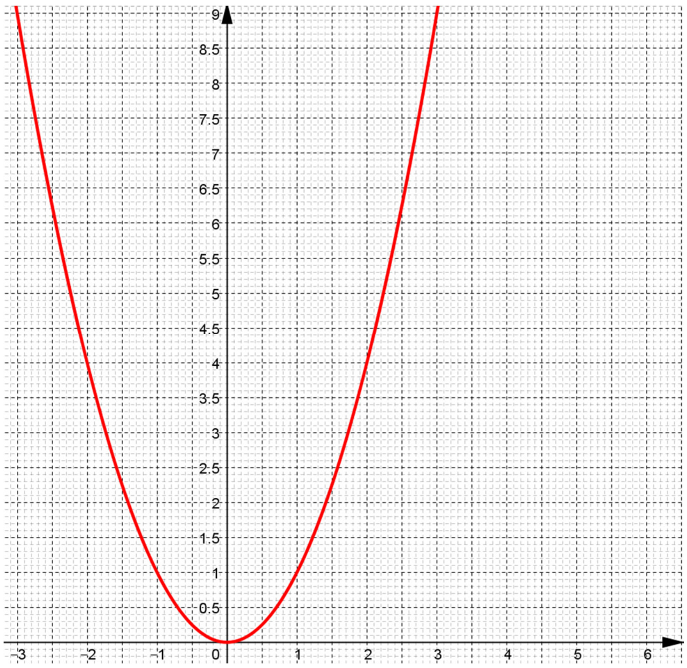
$$y = -\frac{2}{3}x^2 + 2$$

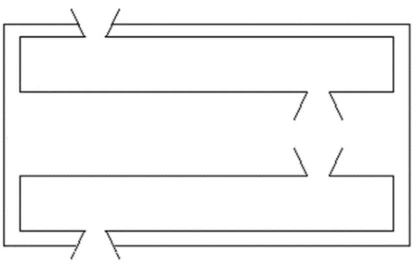
$y=(x+3)^2$





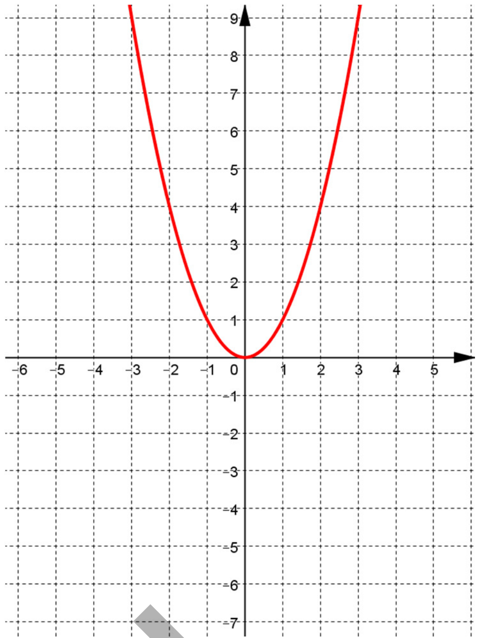
$f(x)=(x-2)^2$



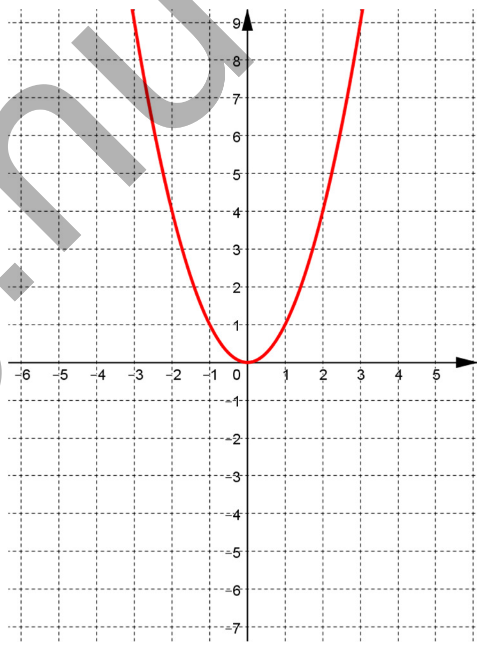


$x \mapsto \frac{1}{2}(x-3)^2+2$

y= $-2\,(x+2)^2+3$

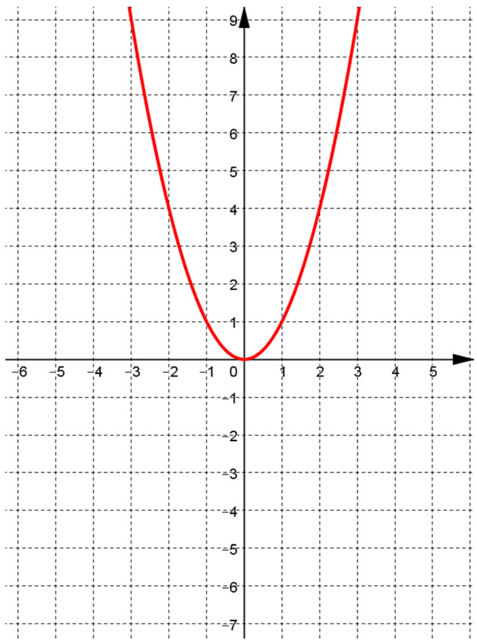


$x \mapsto -\frac{3}{2}(x+1)^2-2$



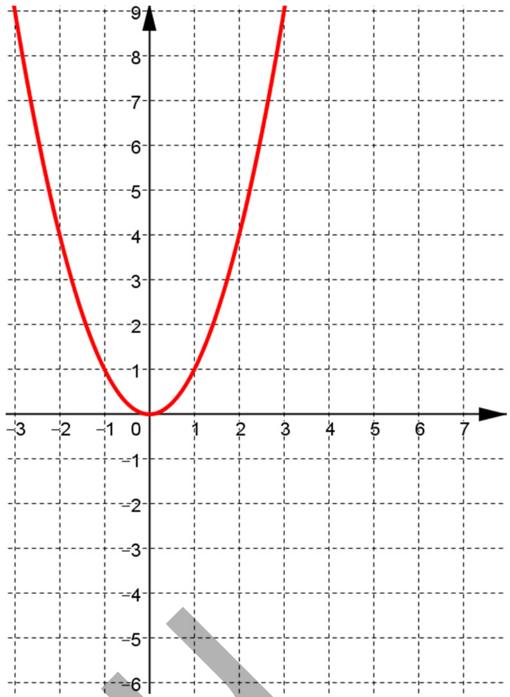
f(x)= $-\frac{1}{3}(2x-5)^2+1$

y= $-\frac{5}{6}\left(2+\frac{3x}{2}\right)^2+4$



I/4) Jellemezd és ábrázold

a) $f(\ ):\mathbf{R}\to\mathbf{R};\ x\mapsto -\frac{1}{2}(x-3)^2+2$



$D_f=$

Trafó:

C (;)

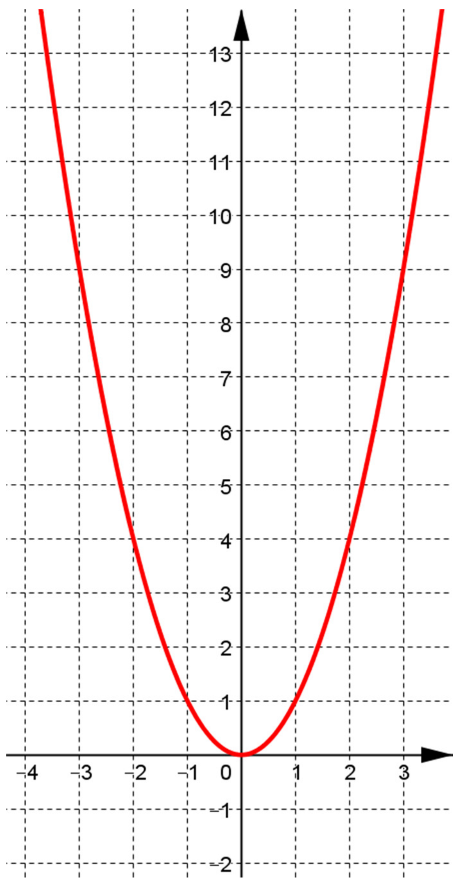
Alakja

ZH:

Menet:

$R_f=$

b) $g(\ ):[-4;2]\to\mathbf{R};\ x\mapsto 3(x+1)^2-\frac{4}{3}$



$D_g=$

Trafó:

C (;)

Alakja

ZH:

Menet:

$R_g=$

c) Írd föl, hogy milyen transzformációkkal jutunk el a graf(x^2)-től a következő hozzárendelési szabályú függvényekig. Add meg a **csúcspont** koordinátáját, az **állását** és azt, hogy van-e **zérushelye**, és ha van, hány zérushely van!

$y=-3(x-2)^2-6$

$y=-\frac{2}{5}(3-x)^2+1$

$y=(2x-1)^2$

$y=-3(\frac{1}{2}x+4)+7$

Írd föl azt a 2. fokú fv. hozzárendelési szabályt, melyet a következőképpen kaptunk x^2 fv. grafikonjából. Add meg a **csúcspont** koordinátáját, az **állását** és azt, hogy van-e **zérushelye**, és ha van, hány zérushely van!

$E^{\mathbf{v}(0;3)}(x^{\lambda=-0,3}(E^{\mathbf{v}(-5;0)}))$

$E^{\mathbf{v}(0;-2)}(x^{\lambda=3}(E^{\mathbf{v}(2;0)}))$

$E^{\mathbf{v}(0;-1)}(x^{\lambda=-1/3}(E^{\mathbf{v}(-2;0)}))$

Vegyük észre: hogy $(ax)^2=a^2(x)^2$, vagyis az y tengelyre történő merőleges affinitású képe megegyezik egy x tengelyre történő merőleges affinitású képpel.

I/5) A csúcsponti egyenlet

a) Írj föl egy olyan lefelé nyíló parabola grafikonú másodfokú fv-t, melynek:

C(–1;6), és lefelé nyílik:

C(3;–2), és felfelé nyílik:

b) A parabola csúcsponti egyenletének általános alakja

$a\neq 0$; $a(x-u)^2+v$ (Vigyázat, az *u* és *v* lehet pozitív, 0, negatív) $\Rightarrow$ C(u;v)
$a>0\Rightarrow$ minimum hely: u, minimum érték. v
$a<0\Rightarrow$ maximum hely: u, maximum érték. v

Pl: $-3(x-2)^2+4$	u=	v=	C( )
$\frac{2}{3}(x+5)^2-3$	u=	v=	C( )

c) A „csúcsponti egyenlet” konkrét példákon.

f( ):[0;3]→**R**; $x \mapsto \frac{3}{4}(2x-2)^2+1$

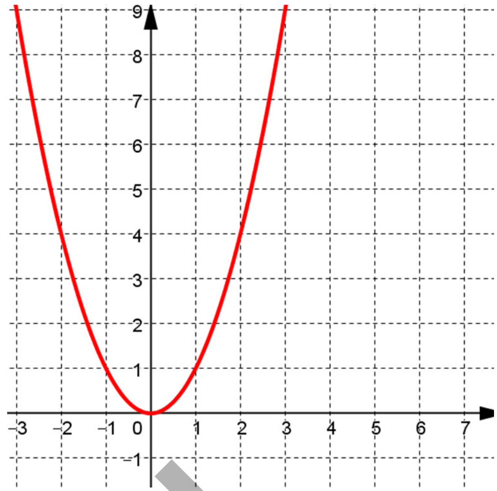
D_f=

Trafó:

C (;)

Alakja

ZH:



Menet (szélsőértékek!):

<table>
<tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr>
<tr><td colspan="2"> </td><td colspan="3"> </td></tr>
<tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr>
</table>

R_f=

g( ):[–5;0]→**R**; $y=-\frac{1}{2}(2x+6)^2+8$

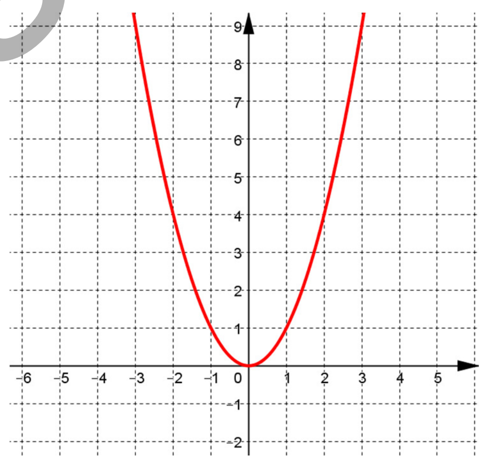
D_g=

Trafó:

C (;)

Alakja

ZH:



Menet (szélsőértékek!):

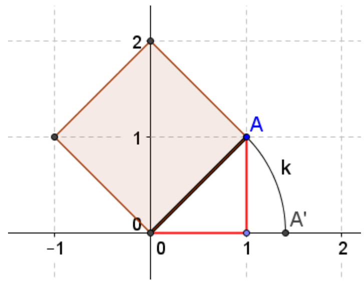
<table>
<tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr>
<tr><td colspan="2"> </td><td colspan="3"> </td></tr>
<tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr>
</table>

R_g=

II. A négyzetgyök és a négyzetgyök függvény

II/1) Bevezetés, definíció és példák

a) Adott területű négyzetek oldalhosszai



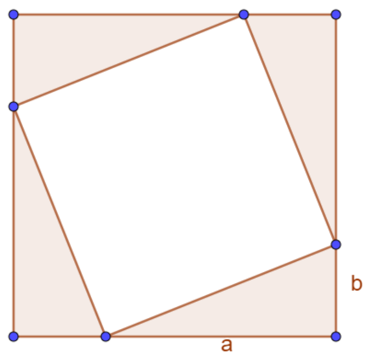
Egyenlőszárú derékszögű Δ, két befogója: 1–1 egység.
Az átfogóra emelt négyzet területe: 2.
Mekkora lehet ennek a négyzetnek az oldala?
Az a szám (ha van olyan) amelyet ha négyzetre emelek, 2-őt kapok
Tudjuk, hogy ha $x_1<x_2$ és $x_1;x_2\in \mathbf{R}_0^+ \Rightarrow x_1^2<x_2^2$.

oldal hossza				oldal hossza		terület				terület
1	<	oldal	<	2	$\Rightarrow$	1^2	<	2	<	2^2
1,4	<	oldal	<	1,5	$\Rightarrow$	$1{,}4^2$	<	2	<	$1{,}5^2$
1,41	<	oldal	<	1,42	$\Rightarrow$	$1{,}41^2$	<	2	<	$1{,}42^2$
1,414	<	oldal	<	1,415	$\Rightarrow$	$1{,}414^2$	<	2	<	$1{,}415^2$
1,4142	<	oldal	<	1,4143	$\Rightarrow$	$1{,}4142^2$	<	2	<	$1{,}4143^2$
1,41421	<	oldal	<	1,41422	$\Rightarrow$	$1{,}41421^2$	<	2	<	$1{,}41422^2$
1,414213	<	oldal	<	1,414214	$\Rightarrow$	$1{,}414213^2$	<	2	<	$1{,}414214^2$

Körülbelül: 1,4142 13562 3730950488016887242097

Ezt nem szeretjük és pontatlan is, ezért azt írjuk, hogy $\sqrt{2}$, és ez azt a nemnegatív számot jelenti, amelynek a négyzete 2.

b) Szerkesztés

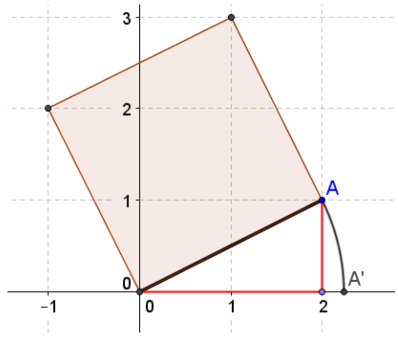


A fehér négyet területét figyeljük meg:

T=

Ez azt jelenti, hogy a fehér négyzet oldala:

Derékszögű háromszögben



Szavakkal:
átfogó =

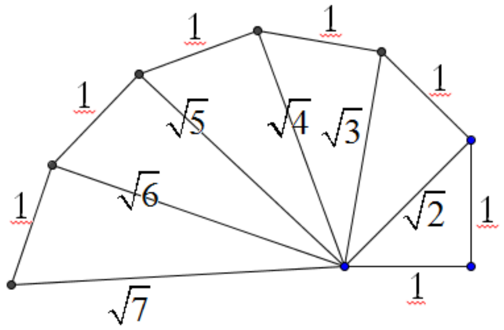
Jelekkel:

c=

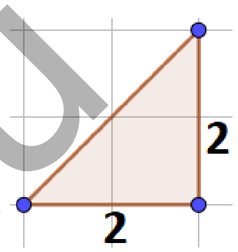
Például a következő négyzet területe így: 5 egység, vagyis az oldala: $\sqrt{5}$

Nyilván tudnánk így pl $\sqrt{5}$ hosszú szakaszt szerkeszteni. $\sqrt{7}$ -et is!!!

$\sqrt{2}$ $\sqrt{3}$ $\sqrt{4}$ $\sqrt{5}$ $\sqrt{6}$ $\sqrt{7}$



De úgy is lehet pl. $\sqrt{8}$ -at szerkeszteni, hogy 2×2-es derékszögű háromszöget rajzolok…



c) **Def: Valamely nemnegatív valós szám négyzetgyöke az a nemnegatív valós szám, melynek négyzete az eredeti szám.**

$a \in \mathbf{R}^+_0 \Rightarrow \sqrt{a} := c \in \mathbf{R}^+_0 \rightarrow c^2 = a$

A kérdése: „Mit kell négyzetre emelni ahhoz, hogy az argumentumot megkapjuk?”

Pl.: $\sqrt{9} = 3$ $\sqrt{2,25} = 1,5$

d) Példák: $\sqrt{1}$ =1 mert 1^2=1

$\sqrt{64}$ = mert =64 $\sqrt{0,36}$ = mert =0,36

$\sqrt{0}$ = mert =0

$\sqrt{\frac{25}{9}}$ = mert $= \frac{25}{9}$ $\sqrt{200}$ kb. mert kb. 200

$\left(\sqrt{64}\right)^2$ = $\left(\sqrt{43,1}\right)^2$ =

$\sqrt{57600} = \sqrt{2^8 \cdot 3^2 \cdot 5^2} =$

$\sqrt{17^2} =$ $\sqrt{17^4} =$

$\sqrt{17^6} =$ $\sqrt{17^8} =$

Vegyük észre: a négyzetgyök „lefelezi” a kitevőt!

$\sqrt{30} \approx$

$\sqrt{0}$ =0 mert 0^2=0

$\sqrt{-4}$ értelmetlen (számunkra), mert bármely valós szám négyzete nemnegatív.

$-\sqrt{2} \approx$–1,4142…

$\sqrt{5^2} =$ $\sqrt{(-5)^2}$ = $\sqrt{a^2} =$

$\sqrt{2^8} =$ mert =2^8.

$\sqrt{(-75)^{12}}$ = mert =$(-75)^{12}$.

„A NÉGYZETGYÖK LEFELEZI AZ ALATTA TALÁLHATÓ ARGUMENTUM KITEVŐJÉT"

Rögtön kérdezhetnénk: ha $(-2)^2$=4 és 2^2=4, akkor milyen alapon szűkítjük le a nemnegatívakra? Mert valamelyikre le kell:

Ugyanis: ha $\sqrt{4}$ =2 és $\sqrt{4}$ =–2, akkor 2 $\sqrt{4}$ =0 stb.

Még most tisztázzuk:

x^2=4.

Ennek az egyenletnek két megoldása van.

x^2–4=0

$(x-2)(x+2)$=0

x_1=2; x_2=–2

$\sqrt{4}$ =?

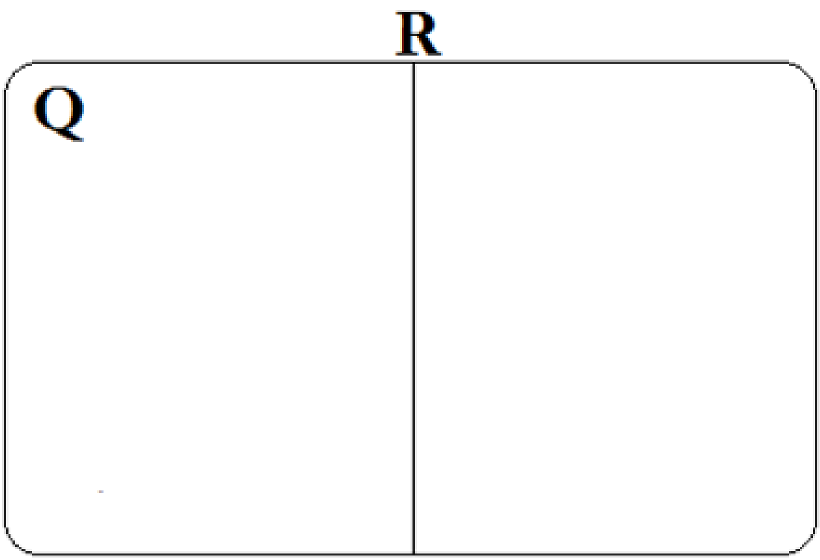
Ez egy művelet elvégzése

Egy műveletnek **egy végeredménye** lehet:

$\sqrt{4}$ =2

Még egyszer: egy művelet lehet nem injektív: $(-2)^2$=$(2)^2$.
Egy egyenletnek lehet két megoldása. (lsd. előbb)
De egy műveletnek csak egy eredménye lehet.

e) **Irracionális számok: azok a számok, amelyek nem írhatók föl két egész szám hányadosaként**. Az irracionális számok csakis végtelen NEM szakaszos tizedestörttel írhatók fel / közelíthetők meg bármely pontossággal.



II/2) Azonosságok, számítások

a) a;b $\geq 0 \Rightarrow \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ Biz.: Mindkét oldal négyzete, felhasználva a szorzás kommutativitását és asszociativitását!

Pl: $\sqrt{3} \cdot \sqrt{5} =$

(i) Gyakorlása

Pl.: $\sqrt{28} \cdot \sqrt{63} =$

$\sqrt{18} =$

$\sqrt{14\,400\,000\,000} =$

$\sqrt{0,0000000324} =$

(ii) **Kiemelés a gyökjel alól**

$\sqrt{27} =$ $\sqrt{160} =$

Vegyük észre: **pozitív** számoknál:

$\sqrt{a^{2k}} =$ hiszen = a^{2k}. pl: $\sqrt{2^{14}} =$

Mi van akkor, ha az „a” negatív?

Pl.: $\sqrt{(-3)^2} =$ $\sqrt{(-5)^6} =$

$\sqrt{(-a)^{2k}} =$

$\sqrt{5^2} =$ $\sqrt{(-5)^2} =$ $\sqrt{7^6} =$ $\sqrt{(-7)^6} =$

$\sqrt{96} =$

$\sqrt{4320} =$

Gyorsan felbontjuk: 10·432 = 10·4·108 = 10·4·4·27=

Így: $\sqrt{4320} =$

$\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} =$ $\sqrt{3} \cdot \sqrt{6} =$

$\sqrt{3^3} \cdot \sqrt{3} =$ $\sqrt{18} \cdot \sqrt{12} =$

$\sqrt{20} \cdot \sqrt{45} =$

$\sqrt{200} =$

Mindig ilyen legyen a végeredmény!

(iii) Hatványozás: $\sqrt{23}\cdot\sqrt{23}=$

$\left(\sqrt{6}\right)^2=$ $\left(\sqrt{6}\right)^3=$ $\left(\sqrt{6}\right)^5=$

$\left(\sqrt{13}\right)^2=$ $\left(\sqrt{13}\right)^3=$

$\left(\sqrt{13}\right)^4=$ $\left(\sqrt{13}\right)^5=$

$\sqrt{25a^2}=$

$\sqrt{x^2-2x+1}=$

Mikor igaz: $\sqrt{x^4-8x^2+16}=4-x^2$

b) Melléktanulmány: A $\sqrt{2}$ irracionalitása

A racionális számok azok, melyek felírhatók két egész hányadosaként. Pl.: $\frac{12}{5}$ stb. De megmutatható, hogy nincs két olyan egész szám, mely hányadosa $\sqrt{2}$ lenne.

c) a≥0; b>0 $\Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Biz.: Mindkét oldal négyzete, felhasználva a szorzás kommutativitás- és asszociativitását!

$\sqrt{\frac{289}{48}}=$

Mindig ilyen (gyöktelenített nevező) legyen a végeredmény

$\sqrt{\frac{121}{25}}=$ $\frac{\sqrt{147}}{\sqrt{12}}=$

$\sqrt{\frac{25}{9}}=$ $\sqrt{1,21}=$

$\sqrt{0,64}=$ $\sqrt{6,4}=$

$\sqrt{12,5}=$ $\sqrt{\frac{80a^3b^5}{9x^4}}=$

$\sqrt{0,2}=$

Mindig ilyen legyen a végeredmény!

d) Alap gyakorlatok:

$\sqrt{28} =$ $\sqrt{\frac{180}{98}} =$

$\sqrt{27000} =$ $\sqrt{0,00005} =$

$\sqrt{16 \cdot 48 \cdot 125} =$

$\sqrt{1,69} =$

$\sqrt{\frac{1024 \cdot 243}{343 \cdot 250}} =$

$\sqrt{\frac{9}{4} : \frac{125}{36}} =$ $\sqrt{24^5} =$

$\sqrt{(-1,44)^6} =$

$\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right) =$

$\left(\sqrt{3}-1\right)^2 =$ $\left(2\sqrt{5}+3\right)^2 =$

$\left(2\sqrt{6}-\sqrt{8}\right)\left(\sqrt{12}-\sqrt{3}\right) =$

$\left(\sqrt{5}-2\right)^3 =$

$\left(\sqrt{6}-\sqrt{10}\right)^2 =$

Melyik a nagyobb? $\frac{\sqrt{270}}{\sqrt{6}}$ v $\frac{\sqrt{150}}{\sqrt{3}}$

Alakítsd szorzattá:

$x^2-5=$ $3x^2-16=$

$2x^2-3=$ $x^2+5=$

e) Gyakorlópéldák

(i) Végezd el:

$\left(\sqrt{2}+3\sqrt{18}+9\sqrt{50}\right)\sqrt{2} =$

$\left(5-3\sqrt{2}\right)\left(5+3\sqrt{2}\right) =$

$\left(4\sqrt{18}-5\sqrt{50}+3\sqrt{98}\right)2\sqrt{2} =$

$$\left(4\sqrt{3}+\sqrt{54}\right)\left(3\sqrt{6}-4\sqrt{3}\right)=$$

$$\left(\sqrt{125}-\sqrt{175}+\sqrt{245}+\sqrt{243}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)=$$

$$\left(3\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{20}+3\sqrt{12}\right)=$$

(ii) Végezd el

$\left(\sqrt{15}-2\right)\left(\sqrt{15}+2\right)=$ $\qquad$ $\left(\sqrt{5}-2\right)^2=$

$\left(2\sqrt{3}-3\right)^2=$ $\qquad$ $\left(\sqrt{21}-\sqrt{48}\right)\left(\sqrt{21}+\sqrt{48}\right)=$

$\left(2\sqrt{6}-\sqrt{15}\right)^2=$

Érdekesség: $\sqrt{3+2\sqrt{2}}=$

$$\sqrt{7+4\sqrt{3}}=$$

$$\sqrt{14-6\sqrt{5}}=$$

$$\sqrt{5+2\sqrt{6}}=$$

(iii) Végezd el:

$$\sqrt{7+\sqrt{13}}\sqrt{7-\sqrt{13}}=$$

Mi lenne, ha bővítenénk 2-vel a gyökjel alatt…

$$\left(\sqrt{8+\sqrt{15}}+\sqrt{8-\sqrt{15}}\right)^2=$$

$$\sqrt{\sqrt{46}+\sqrt{14}}\sqrt{\sqrt{46}-\sqrt{14}}=$$

$$\left(\sqrt{\sqrt{83}-\sqrt{19}}+\sqrt{83+\sqrt{19}}\right)^2=$$

(iv) Bővítsd úgy, hogy ne legyen a nevezőben gyök, vagyis **„gyöktelenítsük a tört nevezőjét”**

$\frac{14}{\sqrt{2}} =$ $\qquad$ $\frac{15}{2\sqrt{3}} =$ $\qquad$ $\frac{2\sqrt{21}}{\sqrt{14}} =$

$\frac{1}{\sqrt{2}-1} =$ $\qquad$ $\frac{4\sqrt{3}}{2-\sqrt{7}} =$

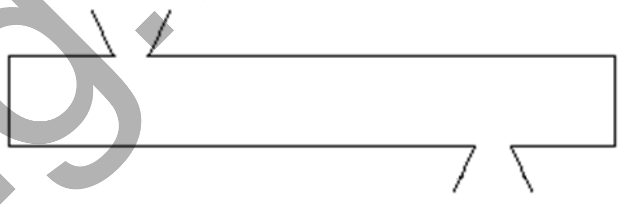
$\frac{6\sqrt{15}}{7-3\sqrt{5}} =$ $\qquad$ $\frac{6\sqrt{15}}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} =$

$\frac{5\sqrt{6}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}} =$

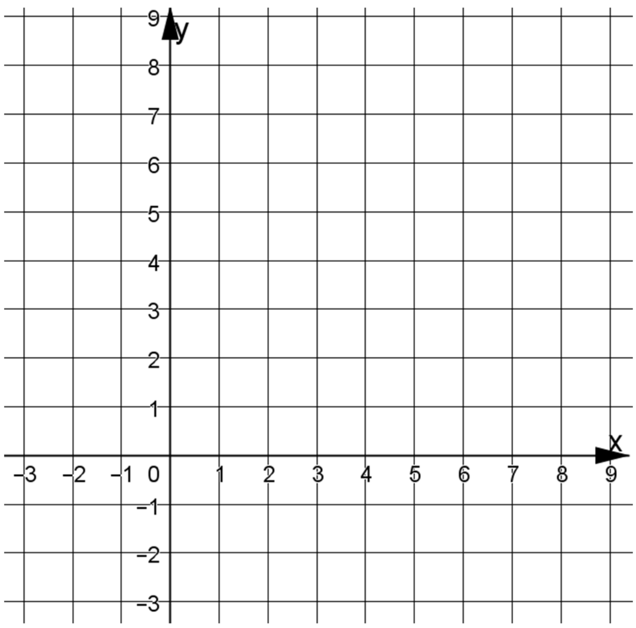
II/3) Az inverz függvény képe az eredetihez képest.

Legyen *f*( ) invertálható.
Legyen adva egy *f*( ) függvény grafikonjának néhány pontja:
A(–1;–2) B(0;1) C(2;5) D(4 ; 4) E(6;7) F(8;8)

	A	B	C	D	E	F
x	-1	0	3	4	6	8
f(x)	-2	1	5	4	7	8



Rajzoljuk föl az f( ) és az f^{-1}( ) függvény grafikonjának pontjait.



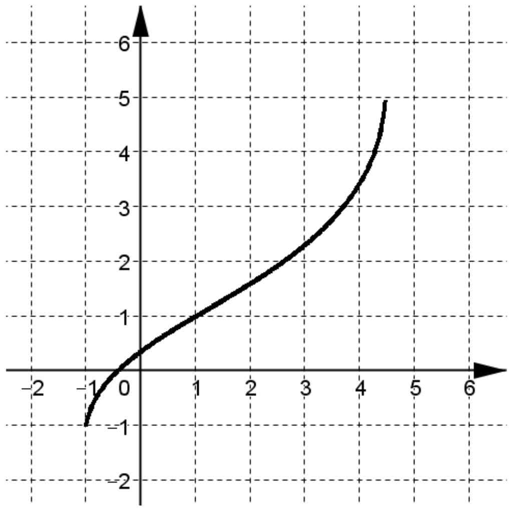
Gondolkodjunk:
Milyen transzformáció és hogy viszi az eredeti fv képét az inverzbe?

1. A fixpontok miatt:

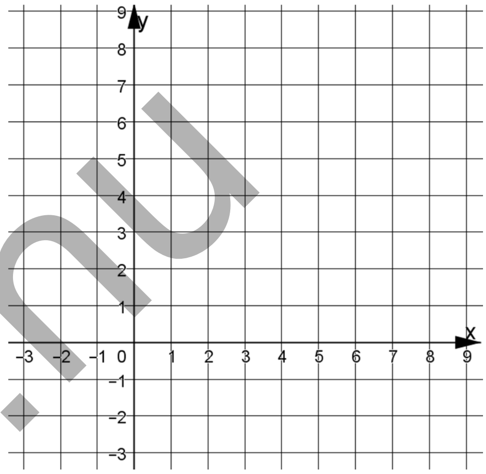
2. mindenképp …………………………….. transzformációnak kell lennie

Háromszögekkel látszódik: ____

Rajzold meg az ábrán látható grafikonú függvény inverzének a grafikonját:

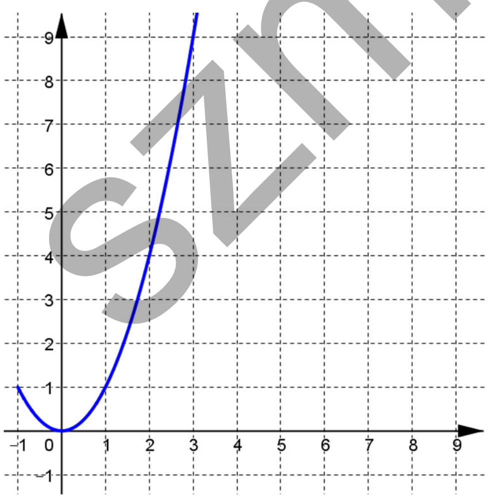


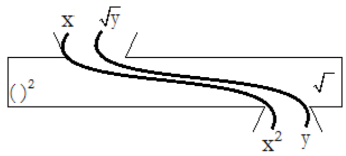
Invertáld a következő függvényt és ábrázold az eredetit és az inverz fv-t is:
f( ):**R**⟶ **R**; y=–x/2+1

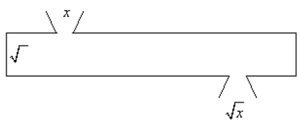


II/4) A négyzetgyök függvény

a) Az alapfüggvény
sqrt( ):$\mathbf{R}^+_0 \longrightarrow \mathbf{R}^+_0$; $x \mapsto \sqrt{x}$
Látható, hogy ez a függvény a következőnek az inverze:
sqr( ):$\mathbf{R}^+_0 \longrightarrow \mathbf{R}^+_0$; $x \mapsto x^2$, ezért könnyen tudjuk ábrázolni.







D_{sqrt}=

ZH:

Menet táblázat

Injektivitás:

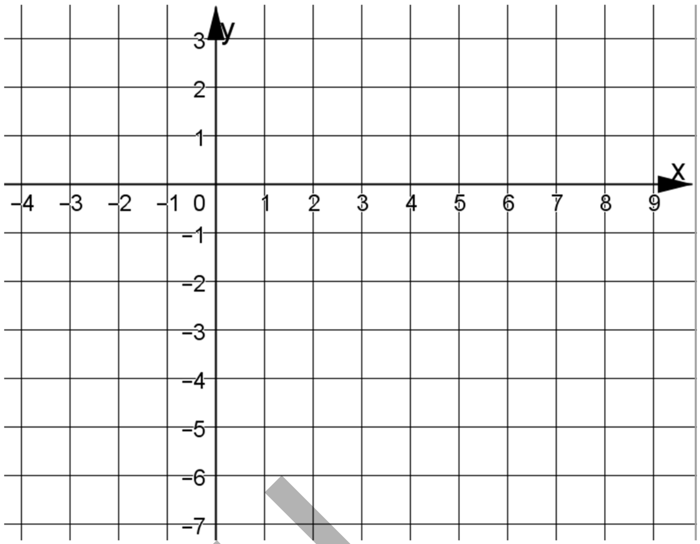
R√ =

Alakja:

A csúcspont koordinátája: C(;)

b) Trafózzuk az alapfüggvényt: sqrt( ): **R**$\rightarrow$ **R**; $x \mapsto \sqrt{x}$

(i) f( ): **R**$\rightarrow$ **R**; $x \mapsto -2\sqrt{x+3}+1$



D_f=

Négyzetgyöknél az értelmezési tartomány keresése:

A négyzetgyök argumentuma:

Trafó:

C (;   )

ZH:

Menet-táblázat

Alakja:

R_f=

Vegyük észre: a négyzetre-emelés nem ekvivalens átalakítás:
Vagyis:a=b$\Rightarrow$ $a^2=b^2$ de visszafelé nem.
Emeljük négyzetre a következő egyenlet mindkét oldalát:

$$\sqrt{x} = (x-2)$$

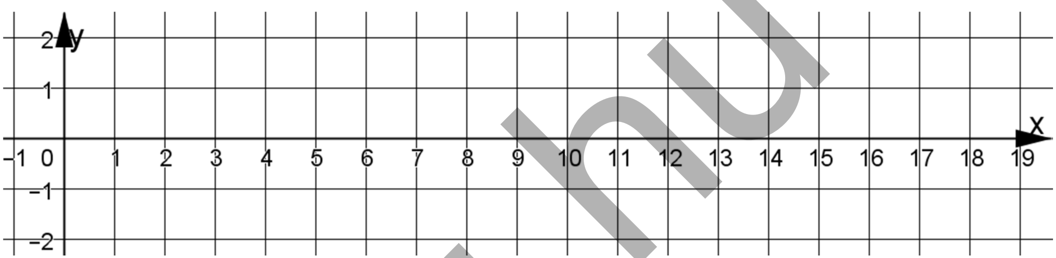
(ii) g( ): **R**→ **R**; y=$\dfrac{\sqrt{x-2}}{2}-1$

D_g=

Trafó:

C (;   )

ZH:



Menet

Alakja:

R_g=

<table>
<tr><td> </td><td> </td></tr>
<tr><td colspan="2"> </td></tr>
<tr><td> </td><td> </td></tr>
</table>

c) Értelmezési tartomány: randa dolog, újra egyenlőtlenségek
Alapállás: a négyzetgyök argumentuma nem lehet negatív, tehát egy négyzetgyökös kifejezés az értelmezési tartományának vizsgálata általában egy egyenlőtlenség megoldása.

$\sqrt{2x-3}$ $\sqrt{x^2+5}$

$$\sqrt{x^2-7}$$

$$\sqrt{\frac{x-2}{3-x}}$$

$$\sqrt{\frac{3-3x^2}{x+5}}$$

$$\sqrt{\frac{x^3-6x^2+9x}{x^2-9}}$$

III. A másodfokú egyenletek általános megoldásának előkészítése

III/1) „Teljes négyzetté alakítás”. 2. fok: először ha kell, egy oldalra rendezünk…

a) $x^2-2x-3 = 0$

b) $x^2 = 48-2x$

c) $x^2-3x = 1$

d) $-x^2+9x-20 = 0 \Leftrightarrow -(\underline{x^2-9x}|+20) = 0$

A főegyüttható :

e) $2x^2-7x-4 = 0$

f) $-3x^2-4x+1 = 0$

g) $x^2-6x+25=0$

h) $-6x^2+7x-2 = 0$

III/2) Oldd meg – vigyázat, négyzetgyök jön be!

a) $x^2-8x-4 = 0$

b) $2x^2+7x-15 = 0$

c) $3x+\frac{2}{x} = 6$

d) $(2x-1)(2x+3) = 2$

e) $x^2+13x-21 = 0$

f) $7-2x = 2x^2+x$

g) $\frac{2x-1}{x+2}=\frac{5x-4}{3x+2}$

h) $\frac{2x+1}{2x+3}=\frac{2x-1}{x+3}$

IV. Polinom alakban megadott másodfokú függvények ábrázolása: CSÚCSPONTI EGYENLETRE ALAKÍTÁS. Adjuk meg a következőket: Trafó, C(x;y), állás illetve hogy van-e zérushely!
Nem oszthatunk le, csak kiemelhetünk!
Cél: $\mathbf{a(x-u)^2+v}$ Ebből látjuk a transzformációt. Vagyis csak az első két tagból emelünk ki…

IV/1) f( ): $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$; $f(x)=x^2+3x-4$

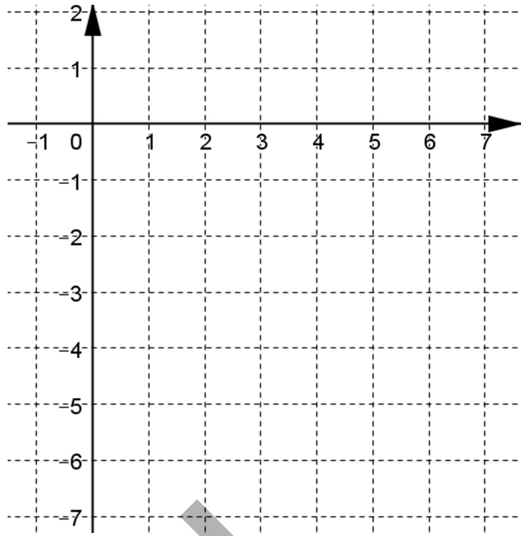
IV/2) g( ): $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$; $g(x)=2x^2-x-15$

IV/3) f( ): $[0;10]\to\mathbf{R}$; $f(x)=-2x^2+4x+12$

IV/4) Add meg a trafót: g( ): $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$; $g(x)=3x^2-2x+2=0$

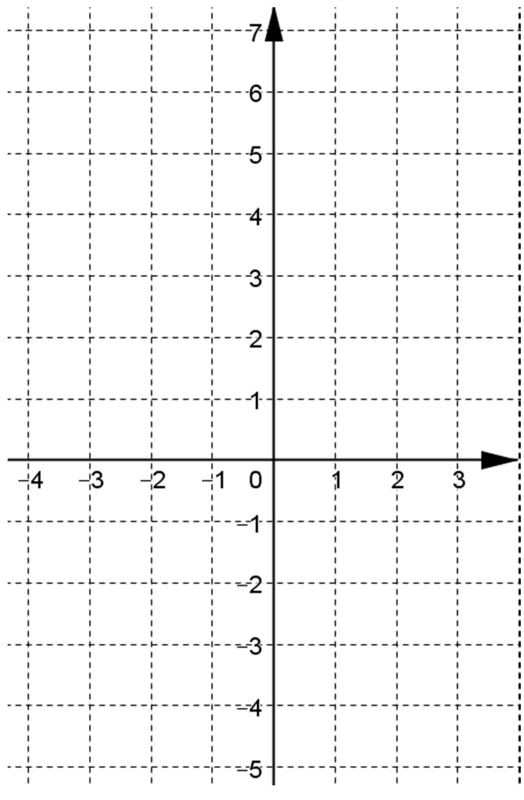
IV/5) f( ): $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$; $f(x)=-\frac{2}{3}x^2+5x-2$

IV/6) Ábrázoljuk is: h( ): [0;6]$\rightarrow$**R**; h(x)=–1/4 x^2+2x–5



IV/7) f( ): **R**$\rightarrow$**R**; f(x)=$-\frac{1}{3}x^2+x-2$

IV/8) Ábrázoljuk: f( ): **R**$\rightarrow$**R**; y=|x^2–4|



V. Ismétlőpéldák

V/1) $\left(\sqrt{6}-\sqrt{10}\right)^3$ =

V/2) Ábrázold, jellemezd: f( ):[–2;1] $\to$**R**; y=–3x^2+2x+5

V/3) $\left(\sqrt{2\sqrt{15}+\sqrt{48}}+\sqrt{\sqrt{60}-4\sqrt{3}}\right)^2$ =

V/4) $\frac{18x+2}{x-4}-\frac{15x+1}{x+5}=3$ Mo.: x=–1/2

V/5) Definiáld a parabolát!

V/6) Gyökteleníts: $\frac{3\sqrt{6}-\sqrt{32}}{\sqrt{27}-\sqrt{8}}$

V/7) ÉT: $\sqrt{\frac{a^3+2-a-2a^2}{a^2+2a-3}}$

V/8) $\frac{2x^2-8}{x^2+4x+4}-\frac{3x-2}{x+5}=-\frac{5}{x+5}$

V/9) Jellemezd, ábrázold: g( ):[–1;3] $\to$**R**; y=–2x^2/3+x+2

V/10) $\left(\sqrt{14-6\sqrt{5}}-\sqrt{14+6\sqrt{5}}\right)^2$ =

V/11) Oldd meg: $\frac{x-4}{x+4}+\frac{16x}{x^2-16}=\frac{x+4}{x-4}$

V/12) $\frac{6}{3x}-12=2x$

V/13) $\left(\sqrt{10}-\sqrt{15}\right)^2$ =

V/14) Jellemezd, ábrázold a [0;7]$\to$**R** 2. fokú fv-t. Grafikonja: $E^{\underline{\mathbf{v}}(0;1)}(x^{\lambda=-0{,}25}(E^{\underline{\mathbf{v}}(4;0)}(\mathrm{graf}_{x^2})))$

V/15) Hozd egyszerűbb alakra: $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$

V/16) $\left(\sqrt{15}-\sqrt{5}\right)^2$ =

V/17) $\left(\sqrt{\sqrt{28}-2\sqrt{3}}-\sqrt{2\sqrt{7}+\sqrt{12}}\right)^2$ =

V/18) ÉT: $\sqrt{\frac{-x^2-3}{2x^2+5x-3}}$

V/19) Add meg a köv. kifejezés értelmezési tartományát: $\sqrt{\frac{1}{9x^2-6x+1}}+\sqrt{5-x}$

V/20) Gyökteleníts: $\frac{4}{\sqrt{5}-\sqrt{2}+1}$

V/21) Ábr. és jellemzed: f( ): **R**$\to$ **R**; $x\mapsto -3\sqrt{2x+5}+1$

V/22) $\frac{x^2}{4-x^2}-\frac{x+2}{2-x}=\frac{6}{x+2}$

V/23) $\sqrt{9-4\sqrt{5}}-\sqrt{9+4\sqrt{5}}$ =?

V/24) Add meg az ÉT-t: $\sqrt{12-x^2}$

V/25) Jellemezd, ábrázold: g( ):[–1;2] $\to$**R**; y=–3x^2+2x+2

V/26) $\dfrac{x^2+3x+2}{2x^2-2}-\dfrac{x^2-4}{x^2-2x}=-\dfrac{2}{3x-3}$

V/27) $\left(\sqrt{12}-\sqrt{18}-\sqrt{6}\right)^2=$

V/28) Hozd egyszerűbb alakra: $\sqrt{8-2\sqrt{15}}$

V/29) Ábrázold, jellemezd: h( ): [0;6]$\to$**R**; h(x)=–2/3 x^2+2x+3=0

V/30) Add meg azt a fv-t, mely képe: $E^{\mathbf{v}(0;2)}(x^{\lambda=-0,25}(E^{\mathbf{v}(3;0)}(\mathrm{graf}_{x^2})))$

Szerkesztette: Vízhányó Zsolt Sch.P.