

Matematika

Függvények-Egyenletek – 1.

Munkatankönyv

v2.1

Szent Margit Gimnázium

szmg.hu
2022

Matematika
Függvények – Egyenletek -1
Munkatankönyv

v 2.1

Szent Margit Gimnázium

szmg.hu
2022.

szmg.hu

Tartalomjegyzék

A függvények általában és a lineáris fv.	9
I. Halmazok	9
II. Függvények	9
II/1) Rendezett párok, rendezett párokból álló halmazok	9
II/2) A függvények definíciója	10
II/3) Szemléltetés	12
III. Függvényekkel kapcsolatos fogalmak, definíciók	13
III/1) Elnevezések, leírás	13
III/2) Független változó illetve függvényérték	13
III/3) Értelmezési tartomány - értékkészlet	13
III/4) Függvények gyakorlása	14
III/5) Injektivitás (kölcsonösen egyértelműség) $\Rightarrow$ invertálhatóság	17
III/6) Függvények grafikonja	18
III/7) Grafikonok okos olvasása	20
III/8) Függvények grafikonjai	22
IV. Lineáris (elsőfokú és konstans), illetve lineárisra tehető függvények	22
IV/1) A Lineáris függvények: a konstans és az elsőfokú fv-ek	22
IV/2) Mitől függ a változás – vagyis a „meredekség”	23
IV/3) Lineáris fv-nél két pontjából már ábrázolható a fv. grafikonja	24
IV/4) A „meredekség” pontosabb értelmezése	27
IV/5) Grafikonról történő leolvasások, függvény hozzárendelési szabály visszakeresése	30
IV/6) Függvényjellemzések	33
IV/7) Melyik hozzárendelési szabály lineáris, vagy tehető lineárisra?	41
IV/8) Hogy változik a fv, ha egy számmal szorozzuk, vagy osztjuk a hozzárendelési szabályt?	41
IV/9) Az egyenes arányosság – a „sarki piac függvénye”	41
Lineáris, v. lineárisra, vagy azok szorzatára visszavezethető egyenletek.	44
I. Bevezetés: egyszerűbb lineáris egyenletek	44
I/1) Egyenlet = egy igaz állítás egy általunk még nem ismert számra	44
I/2) Egyenletek fő megoldási menete	46
I/3) Néhány egyszerűbb egyenlet	46
I/4) Látszólag másodfokú egyenletek	47
I/5) A zárójelzés fontossága – színezzük ki a nagy méretű zárójeleket!	47
II. Főbb egyenlet típusok	48
II/1) Törtes lineáris egyenletek	48
II/2) Több zárójel egymásba skatulyázva – „ellentmondó egyenlet” és „azonosság”	51
II/3) Magasabb fokú, de <i>lineáris tényezők szorzatára</i> visszavezethető egyenletek	51
II/4) A nevezők kezelése	54
II/5) Algebrai törtes egyenletek	55

II/6)	Algebrai törtes egyenletek - alap.....	55
II/7)	Algebrai törtes egyenletek - közép.....	56
II/8)	Algebrai törtes egyenletek – összetettebb.....	58
II/9)	Alapvető hibák egyenletmegoldásnál.....	60
II/10)	$a^n - b^n$ alak.....	61
III.	A grafikus megoldás.....	62
III/1)	Oldd meg grafikusan.....	62
III/2)	Általában.....	62
III/3)	Gyakorlatban.....	63
IV.	Mikre jó az egyenletek.....	63
IV/1)	Néhány szöveges egyenlet.....	63
IV/2)	Kompetencia-mérések igen egyszerű példái.....	65
V.	Ismétlés.....	67
V/1)	Egyenletek.....	67
V/2)	Egyszerűsíts.....	68
V/3)	Oldd meg.....	68
V/4)	Egyszerűsíts.....	69
V/5)	Szöveges gyakorló.....	69
V/6)	Százalékszámítás.....	70
V/7)	Nehezebb egyenletek - 5-ösöknek.....	72
	Lineáris, vagy lineáris tényezőkből álló egyenlőtlenségek, nevezetes szorzatok.....	74
I.	Bevezetés.....	74
I/1)	Eligazodás a számegyenesen.....	74
I/2)	Az egyenlőtlenségek végeredményei – és a megoldás lépései.....	74
I/3)	Az intervallumokról.....	74
II.	Egyenlőtlenségek kezelése.....	75
II/1)	Egyenlőtlenségnél csakis ekvivalens átalakítást szabad alkalmazni.....	75
II/2)	„Beszorított” - „kettős egyenlőtlenségek” kezelése.....	75
II/3)	„Szépséghibák” az egyenlőtlenségek végeredményeinél.....	75
II/4)	Add meg a következő szorzatok előjelét.....	76
II/5)	Egy „kényelmes” magasabb fokú egyenlőtlenség.....	76
II/6)	A függvény grafikonja és az előjelgrafikon.....	77
III.	Az egyenlőtlenségek megoldásának buktatói és gyakorlás.....	79
III/1)	Negatív számmal történő osztás-szorzás: szabad, néha kell, de óvatosan!!!!.....	79
III/2)	Kockázatos megoldási menet $\leftrightarrow$ javasolt megoldási menet.....	80
III/3)	Reciprok? SOHA ☹☹☹☹☹☹☹☹.....	82
III/4)	Amit az egyenlőtlenségeknél észben kell tartani.....	82
III/5)	Gyakorlás – figyelem: ekvivalencia!.....	83
IV.	Egyenlőtlenségek grafikus megoldása.....	84
IV/1)	Általában.....	84
IV/2)	Gyakorolása.....	85

V. Szorzatok.....	87
V/1) Alap	87
V/2) Másodfokú egyenlőtlenségek.....	88
VI. Algebrai törtes egyenlőtlenségek	89
VI/1) Alapvető gondolatok.....	89
VI/2) Alap egyenlőtlenségek.....	89
VI/3) Egy oldalra rendezünk.....	90
VI/4) Gyakorlás	91
VII. Teljes köb, 4. hatvány, Pascal Δ és még két új típus:.....	92
VII/1) Hatványozás és a Pascal háromszög – figyelem: a 0. sorral kezdődik 😊.....	92
VII/2) Szorzattá alakítások – azonos kitevőjű hatványok különbsége	94
VII/3) Szorzattá alakítások – azonos, pártalan kitevőjű hatványok összege	95
VIII. Alapvető hibák egyenlőtlenség megoldásnál	96
Lineáris egyenletrendszerek és szöveges típusfeladatok	97
I. Bevezetés.....	97
I/1) 2 változó, 2 független összefüggés	97
I/2) Definíció.....	98
II. Lineáris egyenletrendszerek megoldási módszerei	99
II/1) Grafikus megoldásuk	99
II/2) Algebrai módszerek 1 - a behelyettesítő módszer	100
II/3) Két „anomália”	102
II/4) Algebrai módszerek 2 – az egyenlő együtthatók módszere	103
II/5) A módosított Gauss-féle elimináció.....	105
II/6) Új ismeretlen bevezetése	106
III. Példák az lineáris egyenletrendszerek használatához	107
III/1) Szöveges feladatok átírása többismeretlenes egyenletrendszerré.....	107
IV. Egyéb szöveges egyenletek.....	108
IV/1) Egyszerűbb - csak „átkódolandó” szöveges feladatok.....	108
IV/2) Százalékos és keveréses feladatok	109
IV/3) „Együttes-munkavégzés” feladatok - kötelező a megoldási forma tartása	111
IV/4) Sebesség, utazás	112
Paraméteres egyenletek „avagy a képlet-gyártás”	117
I. A képletet gyártunk – hogy a másíknak ne kelljen egyenleteket megoldani.....	117
I/1) Képletek a természettudományban	117
I/2) Permet keverés – avagy egy mezőgazdasági bolt kihívásai – színdarabban.	117
I/3) Lineáris függvény inverze	119
I/4) A paraméteres egyenletek megoldásakor kitűzött cél.....	119
II. A paraméteres egyenletek általában.....	120
II/1) A paraméteres egyenletek megoldásának alapelve:	120
II/2) Gyakorlás	120

II/3)	Egyenlőtlenséghez vezető paraméteres egyenletek	123
II/4)	Paraméteres egyenlőtlenségek	124
III.	„Nincs százalék, csak valaminek egy százados törttel történő szorzása.”	125
III/1)	Közös feladatok.....	125
III/2)	Egyénileg megoldandók.....	126
IV.	Ismétlés.....	127
Speciális lineáris függvények.....		129
I.	Az egyszerűbb lineáris függvények	129
I/1)	A konstans függvény	129
I/2)	Az egyenes arányosság – avagy a „piac függvénye”	129
II.	Az intervallumonként lineáris függvények.....	130
II/1)	A signum v. szignum (előjel) és a szignum fv.....	130
II/2)	Az egészrész és az egészrész függvény	134
II/3)	Tötrész és tötrész függvény	137
II/4)	Az abszolútérték	139
III.	Függvény-transzformációk.....	146
III/1)	A merőleges affinitás – nem egybevágósági transzformáció – sőt, szögeket sem tart.....	146
III/2)	Függvénykompozíciók és az inverz függvény.....	147
III/3)	A külső függvény lineáris, a belső a „trafózási”, pl: $\text{sgn}()$, $\text{frac}()$, $\text{int}()$, $\text{abs}()$	148
III/4)	A belső függvény a lineáris.	152
III/5)	Add meg a trafót, illetve a trafóból az a, b, c, d számokat, ha: $g(x) = a \cdot f(c \cdot x + d) + b$ és	157
III/6)	Mit tesz egy lineáris fv. meredekségével az a -val ($a \in \mathbb{R}$) történő szorzás?.....	157
IV.	Intervallumonként lineáris fv-ek folytatása	158
IV/1)	Oldd meg grafikusán is.....	158
IV/2)	Több abszolút érték: grafikusán is	159
V.	Számsokaság jellemzése – egy kis statisztika:	161
V/1)	Távolságösszegek minimuma	161
V/2)	Számsokaság jellemzése	162
Másodfok a Pitagorasz-tétel előtt		164
I.	A másodfokú függvény	164
I/1)	Definíció és a parabola.....	164
I/2)	Az alapfüggvény és vizsgálata	165
I/3)	Trafózzuk a másodfokú alapfüggvényt	166
I/4)	Jellemezd és ábrázold	168
I/5)	A csúcsponti egyenlet	169
II.	A négyzetgyök és a négyzetgyök függvény	171
II/1)	Bevezetés, definíció és példák	171
II/2)	Azonosságok, számítások.....	174
II/3)	A nevező gyöktelenítése	178
II/4)	Az inverz függvény képe az eredetihez képest	178

II/5)	A négyzetgyök függvény	179
II/6)	Értelmezési tartomány: randa dolog, újra egyenlőtlenségek.....	181
III.	A másodfokú egyenletek általános megoldásának előkészítése	183
III/1)	„Teljes négyzetté alakítás”	183
III/2)	Oldd meg – vigyázat, négyzetgyök jön be!	184
IV.	Polinom alakban megadott másodfokú függvények ábrázolása	187
V.	Ismétlőpéldák	189

szmg.hu

szmg.hu

A függvények általában és a lineáris fv.

I. Halmazok II. Függvények

II/1) Rendezett párok, rendezett párokból álló halmazok

Vannak olyan halmazok, amelyeknek elemei számpárok.

Ilyen számpárok: $(1; -3)$ $(5; 11)$ $(-5; 0)$ ill.: $(4; 1,3)$;

$(0; \frac{11}{3})$; $(-2; \sqrt{3} + 1)$

Az első három olyan típusúak közé tartozik, mely számpárok mindkét tagja egész.

A második három olyan típusúak közé sorolható, amely rendezett számpárok első tagja egész, a második valós.

Rendezett számpár tehát: számpár, de nem mindegy, melyik az első és melyik a második:

$(2; -7) \neq (-7; 2)$

Ha halmaz lenne, egyenlők lennének:

$\{2; -7\} = \{-7; 2\}$, mert ott a sorrend nem számít!

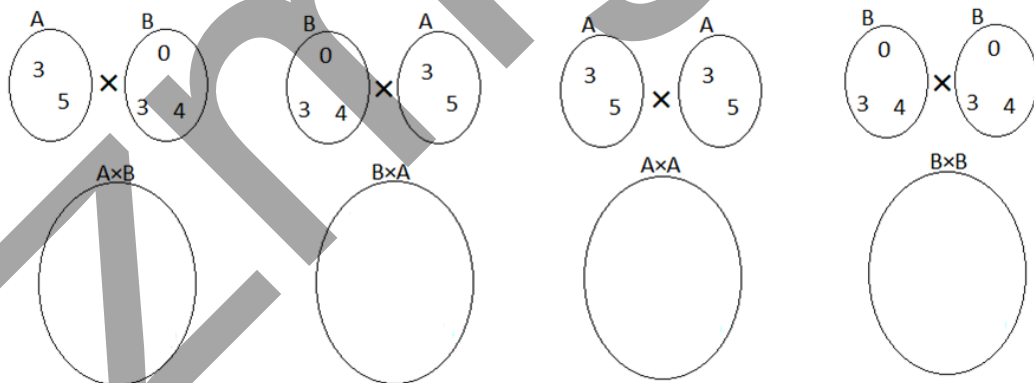
$(a; b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, vagy $(x; y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$

A másodiknál látható, hogy: a rendezett pár első tagját az egész számok közül lehet szedni, a második tagot pedig a valósak közül.

A és B halmaz Descartes szorzata: $(x; y) \in A \times B \Leftrightarrow x \in A$ és $y \in B$.

$A \times B$ = az a halmaz, melynek azok és csak azok a rendezett párok az elemei, melynek első tagja az A-ból van, a második tagja a B-ből.

$A = \{3; 5\}$ $B = \{0; 3; 4\}$



$A = \{-1; 0; 2; 3\}$ $B = \{-1; 3; 5; 7; 9\}$. A Descartes szorzatok: $A \times A$; $B \times B$, $A \times B$ és a $B \times A$
Minek (akár többnek) eleme a következő rendezett pár:

$(3; 5) \in$ $(7; 0) \in$

$(0; 0) \in$ $(2; 3) \in$

$(-1; -1) \in$

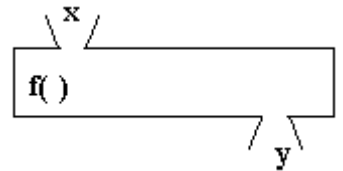
Hány eleme van az $A \times A$; $B \times B$, $A \times B$ és a $B \times A$ halmazoknak.

II/2) A függvények definíciója

a) Szemléletes kép: gép.

Pl: Bolt, áru, pénztárgép a gép:

„Áru és ár a boltban”



Ha „jó” a bolt, akkor nem lehet olyan, hogy ugyanazért valaki egyszer ennyit, máskor mást fizet...

„Autóhoz tulajdonos”: Függvény

„Tulajdonoshoz autó”: Nem függvény (egy embernek lehet több autója)

b) Definíció:

Ha egy A halmaz (minden egyes)/néhány eleméhez egyértelműen hozzárendelem egy K halmaz egy-egy elemét, akkor ezt a hozzárendelést függvénynek nevezem.

A= „alaphalmaz” K= „képhalmaz

Független változó: az alaphalmaz elemei.

Függő változó – függvényérték – helyettesítési érték: az alaphalmaz egy-egy eleméhez hozzárendelt képhalmazbeli elem.

c) Néhány példa – melyik függvény, melyik nem?

szám $\mapsto$ háromszorosa

szám $\mapsto$ abszolút értéke

szám $\mapsto$ aminek az abszolút értéke

n természetes szám $\mapsto 2^n$ utolsó számjegye

anya $\mapsto$ fia

pozitív természetes $\mapsto$ az a szám, melynek ennyi osztója van

szám $\mapsto$ egészrésze

természetes szám $\mapsto$ aminek a négyzete

gyerek $\mapsto$ nagymamája

szám $\mapsto$ nála kisebb természetes számok

egész szám $\mapsto$ osztóinak a halmaza

gyerek $\mapsto$ édesanyja

szám $\mapsto$ az ötszörösénél kettővel kisebb szám négyzete

szám (Ft) $\mapsto$ Üdítő-automata által adott ital

d) Bevezető példa

$$f(): \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{Q}; x \mapsto \frac{x}{2} - 3$$

$$\frac{()}{2} - 3$$

Az értelmezési tartomány elemei - független változó - Argumentum

$$D_f = 0; 1; 2; 3; \dots$$

$D \leftrightarrow$ „Domain” = „birtok, terület”

Az értékkészlet elemei: függvényérték (helyettesítési érték)

$$R_f: -3; -2,5; -2; \dots$$

$R \leftrightarrow$ „Range”

$$f(5) = -0,5$$

$$f(4) = -1$$

$$f(0) = -3$$

$$f(-2): \infty$$

Töltsd ki a táblázatot

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
n/2-3	-3	-2,5		-1,5	-1	-0,5		0,5	1			2,5		3,5	4

A független változó és a fv-érték együtt egy rendezett párt alkot, amely mint koordináta pontot határoz meg. Pl.: A(0 ; -3) B(1 ; -2,5) L(11 ; 2,5) stb.

Vagyis: **P(x;f(x))** pl.: D(3 ; -1,5)

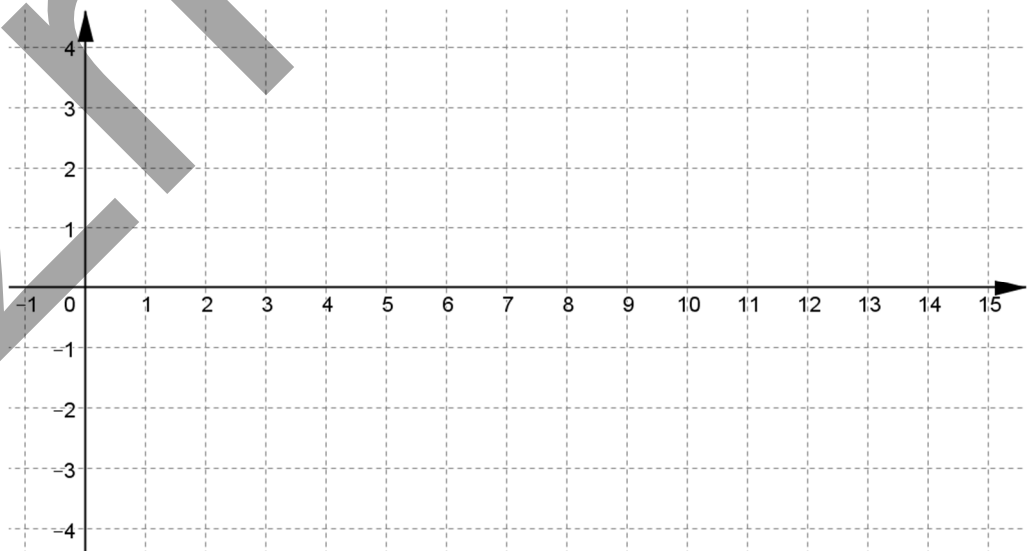
Rögtön ábrázolhatjuk koordináta rendszerben a függvény „grafikonját”. Írjuk be a pontok koordinátáit is!

Elnevezések:

Abszcissza: a vízszintes tengely

Ordináta: a függőleges tengely

Origó: Q(0;0)



E(4;-1)

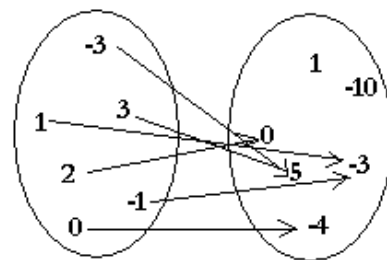
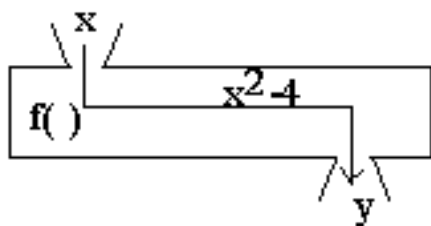
Az E pont „első koordinátája” v. Abszcisszája, vagy „x koordinátája”: 4.

Az E pont „második koordinátája” v. Ordinátája, vagy „y koordinátája”: -1.

II/3) Szemléltetés

$$f(): \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}; y = x^2 - 4$$

„Gép” - illetve megfeleltetés Venn diagrammon



Értéktáblázat $\leftrightarrow$ helyettesítési érték

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4			
y									45	96	21

Rendezett párok a független változóból és a hozzá tartozó fv-értékből:

(-3;) (-1;) (0;) (1;) (; 0) (; 5)

Az ősképek keresés mindig

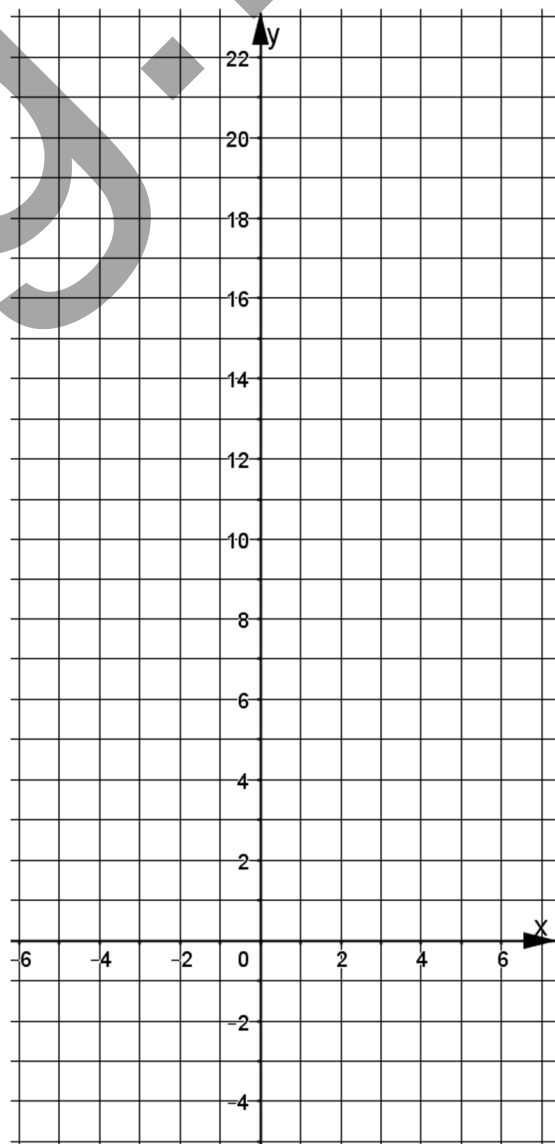
(x ; 45)

A 45

(x ; 96)

(x ; 21)

Ábrázoljuk a pontokat koordináta rendszerben



III. Függvényekkel kapcsolatos fogalmak, definíciók

III/1) Elnevezések, leírás

A függvény neve után mindig kiteszünk egy zárójelpárt: ()

pl.: $\text{abs}()$; $\text{sgn}()$; $\text{int}()$; $\text{frac}()$; $\text{sin}()$; $\text{f}()$; $\text{tg}()$

III/2) Független változó illetve függvényérték

Független változó v. argumentum

„Független változó” = „Szabad változó” – ez utóbbit nem használjuk, de jó kép, mert „szabadon választjuk”

„Amit „bedobunk” a gépbe”, azt az „Értelmezési tartomány” –ból vesszük.

Függő változó v. függvényérték v. helyettesítési érték:

ami „kipottyan” a gépből; a „független változóhoz” tartozó, ahhoz rendelt „helyettesítési érték”

III/3) Értelmezési tartomány - értékkészlet

Függvény értelmezési tartománya: az a legbővebb részhalmaza az alaphalmaznak, amelynek minden eleméhez a függvény hozzárendel egy értéket. *(Csak érteni kell, nem kell bemagolni.)*

Jele: D . („Domain”) Pl.: D_f , D_g , $D_{\sin}$ stb. Illetve: $ÉT$

$$f() : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; f(x) = x + \frac{x-3}{x+2} \quad ET =$$

Mi az értelmezési tartomány?

Érdemes magadtól megkérdezni: melyik az a művelet, melyet nem lehet minden számra elvégezni. Ott lehet gond az értelmezési tartománnyal.

Az értelmezési tartomány vizsgálata sokszor egyenletmegoldás (később lesz egyenlőtlenség is).

$$g() : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; f(x) = \frac{6x-8}{3x+4} + 4x$$

$D_g =$

$$h() : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; f(x) = \frac{4-5x}{3x^2-12} + x^3$$

$D_h =$

AZ ÉRTELMEZÉSI TARTOMÁNY KERESÉSE NAGYON SOKSZOR EGYENLETMEGOLDÁS.

Függvény értékkészlete: az összes lehetséges függvényértékből, és csakis azokból álló halmaz (az értelmezési tartomány elemeihez rendelt függvényértékek halmaza).

Jele R . („Range”) Pl.: $R_g()$. Ezt néha könnyű, néha azonban nehezebb meghatározni.

III/4) Függvények gyakorlása

- a) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y=2x+3$ „ef valós-valós, ipszilon egyenlő kettő iksz plusz három” ☺

Töltsd ki a táblázatot!

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y											
x											
y	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5

Az ősképek keresés mindig egyenletmegoldás:

Mihez rendeli a -4 -et?

Mihez rendeli a 99 -et?

Mihez rendeli a 0 -át? (Ezt hívjuk „zérushelynek” ZH), vagyis az azt az értelmezéstartománybeli eleme(ke)t, melyhez 0 -t rendel a fv.

ZH:

Készítsünk „képletet” a folytonos egyenletmegoldás helyett - hogy ne kelljen állandóan új egyenletet felírni az ősképek kereséséhez.

„Adjunk képletet, hogy az x -t könnyedén megkapjuk az y -ból, vagyis y ősképeinek kiszámítására adjunk képletet.

Tudjuk: $y=2x+3$

Azt keressük, hogy „hogyan függ” x az y -tól, vagyis y -ból fejezzük ki x -et!

Próbáljuk is ki: Mihez rendeli a 21 -et?

$D_f =$

$R_f =$

b) $g(\cdot): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; x \mapsto \frac{12}{x-3}$

Mi az értelmezési tartomány? $D_g =$

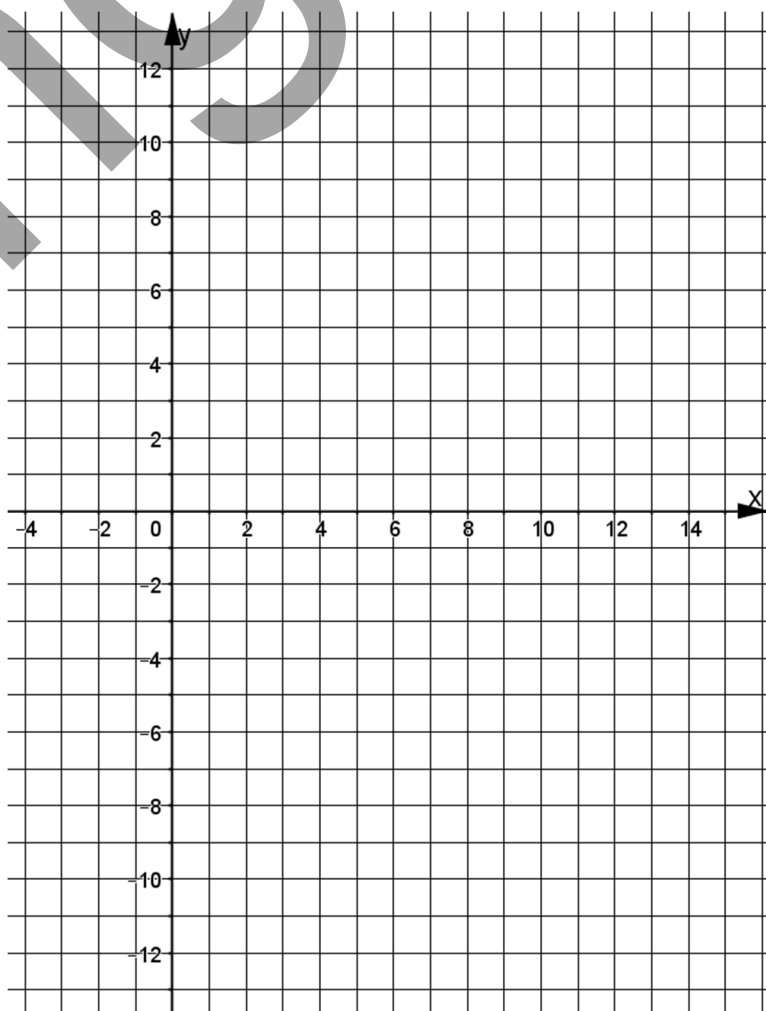
Írjunk értéktáblázatot!

n	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$12/(x-3)$		-2,4						12	6		3	2,4	2	1,71	1,5	1,33

Mihez rendeli a 8-at? (Ősképkérés = egyenletmegoldás)

Gyártsuk le a „visszafelé” fv-t, vagyis ahogy a fv-értékből megkapom az ősképet!

Ábrázoljuk az
értéktáblázatból kiolvasott
pontokat!



$D_g =$

$R_g =$

c) $h: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; h(x) = \frac{x}{2} - 1,5$

$$\boxed{\frac{(\quad)}{2} - 1,5}$$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3			6	7	8		10
x/2-1,5	-3,5			-2		-1	-0,5		0,5	1	1,5		2,5	3	3,5

Mihez rendeli az 1,8-at?

ZH:

A zérushelykeresés...

Fixpont: Az $x_0 \in D_f$ az $f(\quad)$ fv. fixpontja, ha $x_0 = f(x_0)$

A fv. fixpontja az az értelmezéstartománybeli elem, melynek képe önmaga.
(Lehet, hogy akár több is van belőle.)

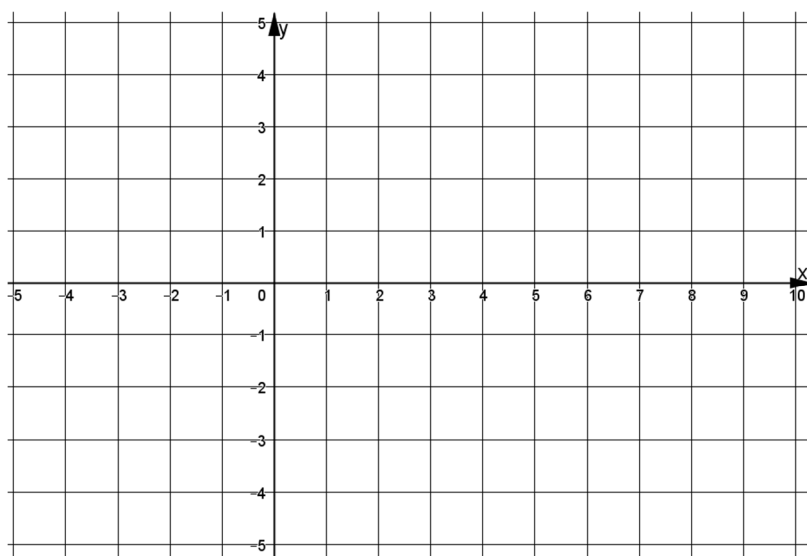
A tengelyes tükrözésnél, illetve a középpontos tükrözésnél mi volt a fixpont?

Fixpont. (A fixpont-keresés egyenletmegoldás!)

Az inverz fv – vagyis a „visszafele függvény”

$D_h =$

$R_h =$



III/5) Injektivitás (kölcsönösen egyértelműség) $\Rightarrow$ invertálhatóság

a) Az injektív (kölcsönösen egyértelmű) fv-ek

Melyik injektív? $g(): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; y=x+5$

$h(): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; y=x^2$

Figyeljük meg, hogy a $g()$ függvényénél, ha nézzük a „gép” szemléltetést, akkor a gépből bármely kipottyant érték esetén „vissza tudjuk keresni” az **őskép**et, vagyis hogy mit dobtunk be a gépbe.

pl.: ha a függvényérték 9, akkor tudjuk, hogy a bedobott szám a 4 volt. Ezt a függvény nevével így írjuk: $g^{-1}(9)=4$

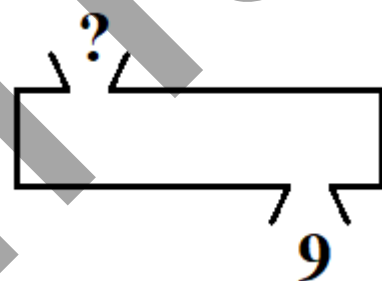
Ugyanakkor a második függvényénél, ha a „gép” szemléltetést figyeljük, akkor egy „kipottyant” függvényérték esetén „nem tudjuk vissza keresni” annak **őskép**ét, vagyis hogy mit dobtunk be a gépbe, hiszen az lehet 3 és -3 is.

$$9=x^2$$

$$0=x^2-9$$

$$0=(x+3)(x-3)$$

$$x_1=-3 \quad x_2=3$$



Geometriában a vetítés nem injektív fv. (~árnyék)

Def.: ... hogy az $f()$ fv. injektív (kölcsönösen egyértelmű),

ha $(\forall x_1, x_2 \in D_f \text{ és } f(x_1)=f(x_2)) \Rightarrow x_1=x_2$.

Szavakkal:

Ha két gyerek kijön az „Egy eurós” boltból, és mondják, hogy 1 eurót költött mindkettőjük, akkor nem tudni, hogy ugyanazt vették-e vagy sem.

De ha egy boltban mindennek más az ára, akkor ha két gyerek kijön a boltból, és azt mondják, hogy mindketten egy dolgot vettek és mindketten 1,5 euro-ért, akkor tudni, hogy ugyanazt vették.

Ahogy a geometriánál tanultuk: „bárminek egyértelműn meg tudjuk mondani az ősképét”.

b) Függvény „inverzének” „visszafelé kereső függvényének” a megadása:

$$f(): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x)=2x-3.$$

Az értéktáblázatot még „odafelé” könnyen kitöltjük.

De „visszafelé” valami „képlet” „szabály” lenne jobb.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y											
x											
y	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5

Ezt a „képletet” nevezzük az eredeti függvény inverz függvényének.

$$\odot = 2x - 3.$$

Én azt szeretném megtudni, hogy az $\odot$ -ből hogyan kapom meg az x -et.

$$\odot = 2x - 3$$

$$\odot + 3 = 2x$$

$$\frac{\odot + 3}{2} = x$$

Vagyis megvan az „ősképe” kereső „képlet”, leginkább függvény:

$$\frac{y + 3}{2} = x$$

$$x = \frac{y}{2} + \frac{3}{2}$$

$$f^{-1}(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; x \mapsto \frac{x + 3}{2}$$

$$\text{Így a } -5 \text{ ősképe: } \frac{-5 + 3}{2} = -1$$

$$\text{A } 0 \text{ ősképe: } \frac{0 + 3}{2} = \frac{3}{2}$$

Ne riasszon meg senkit, hogy az inverz függvényénél is x -et használunk, hiszen az a független változót jelöli csak, nem egy elválaszthatatlan név az eredeti függvénytől.

A geometriában eddig tanult függvényeink invertálhatóak voltak.

Írjuk alájuk az inverzüket:

E^v vektorral történő eltolás

Q^{+105°

$t()$

III/6) Függvények grafikonja

a) A koordináta-rendszer

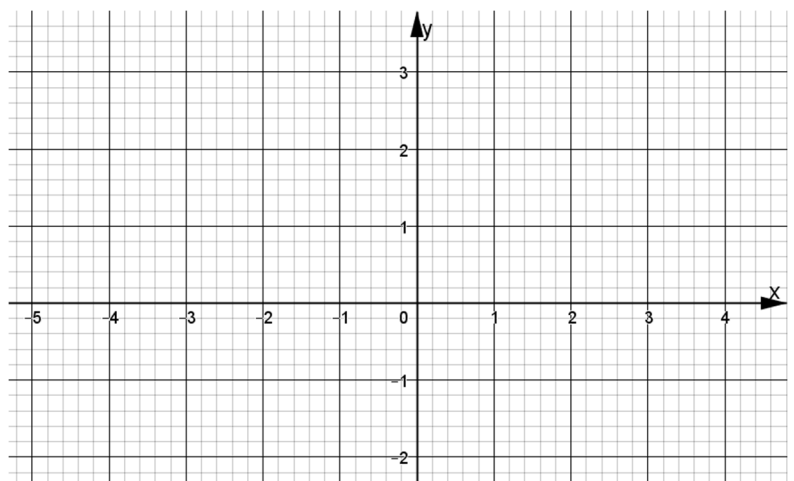
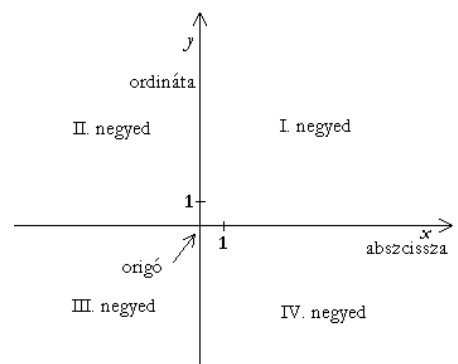
abszcissza: a független változó tengelye

ordináta: a függő változó tengelye

Ábrázold a következő pontokat:

A(-5;3) B(4;-1) C(-5;0) D(0;1)

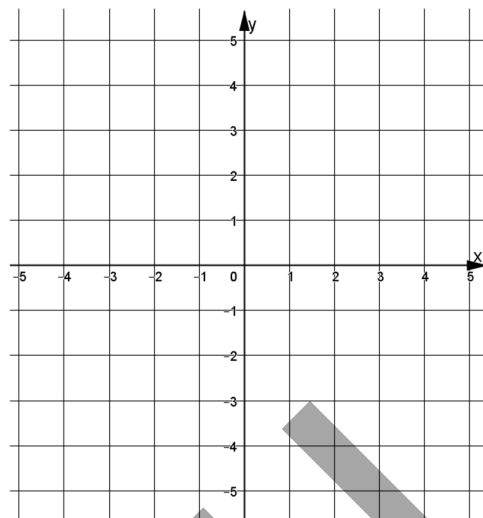
E(2;3) F(0;-2) G(-4;-2) H(3;0) Q(0;0)



Ábrázold azokat a pontokat

- pirossal, melyek első koordinátája: -2
- Sárgával: második koordinátájuk 0 .
- Kékkel: két koordinátájuk egyenlő
- Zölddel: Két koordinátájuk egymás ellentettje
- Lilával: második koordinátájuk kisebb, mint az első.

Itt fontos: először azt megmutatni, hogy hol egyenlők...



b) Függvény képének – grafikonjának pontjai a koordináta-rendszerben:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = 2x + 1$$

Fv grafikonjának pontjai - koordináta-rendszerben - bevezető.ggb

Ábrázoljuk először a $(-2;)$ $(-1;)$ $(0;)$ $(1;)$ $(2;)$ pontokat.

Majd köztük ábrázoljuk még pontokat!

x	-2	-1,8	-1,6	-1,4	-1,2	-1	-0,8	-0,6	-0,4	-0,2	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2	2,2
2x+1		-2,6	-2,2	-1,8	-1,4		-0,6	-0,2	0,2	0,6		1,4	1,8	2,2	2,6		3,4	3,8	4,2	4,6		5,4

$D_h =$

ZH:

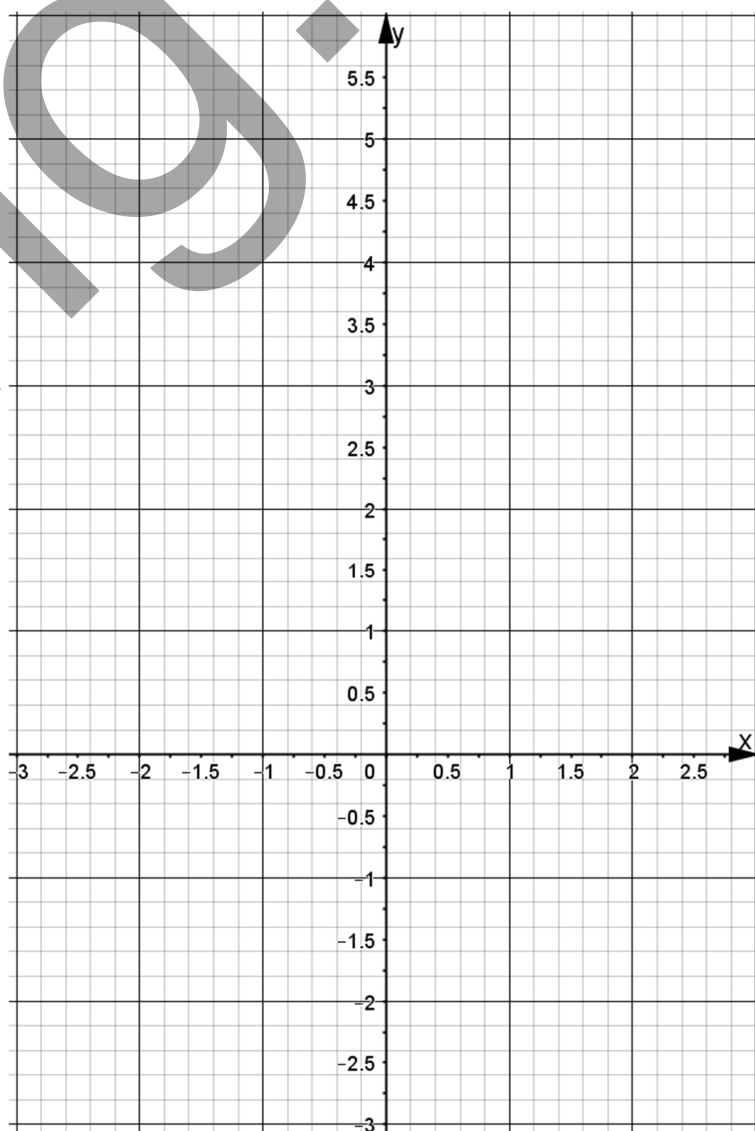
A zérushelykeresés...

Fixpont.:

A fixpont-keresés...

Az inverz fv.

$R_h =$

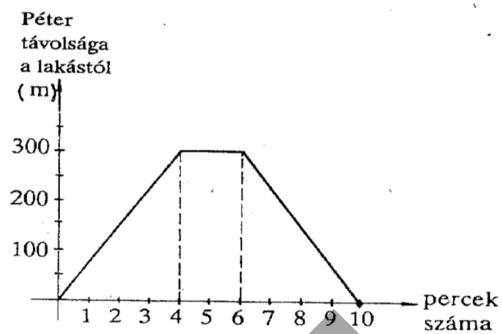


III/7) Grafikonok okos olvasása

1. grafikon: Péter a boltba megy

Milyen messze van a bolt?

Mennyi időt vásárolt?



2. grafikon: Kerékpáros: idő-út grafikon

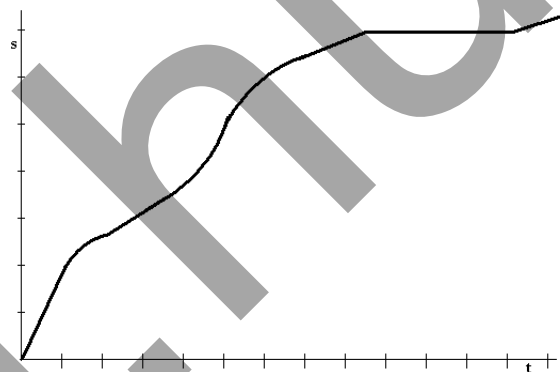
Mi legyen az ordináta neve, hogy értelme legyen a grafikonnak?

Ad meg a tengelyek beosztását!

Mikor ment a leggyorsabban?

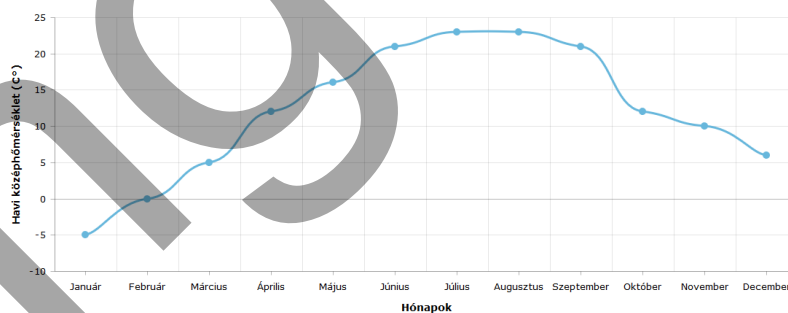
Mikor ment „hegynek”?

Mikor állt?



3. grafikon: havi középhőmérséklet

Mikor volt kb. 15°?



Megmondható-e, hogy mely hónapban volt a legmelegebb nap?

Mi az „értékkészlete” a havi középhőmérséklet függvénynek?

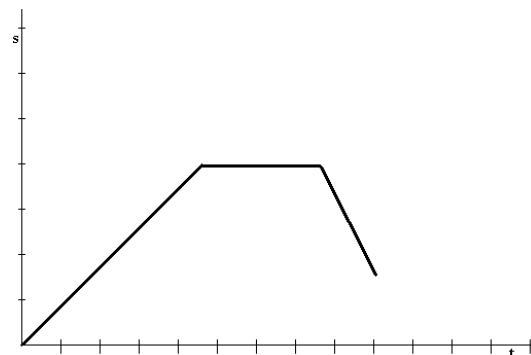
4. Grafikon: Péter távolsága otthonról kerékpárral.

Abszcissa egysége 1 óra, ordinátáé 15 km.

Milyen messzire ment?

Hazajutott?

Mit csinálhatott? Tekerés közben fáradt?



Amikor a grafikon vízszintes – mit csinálhatott?

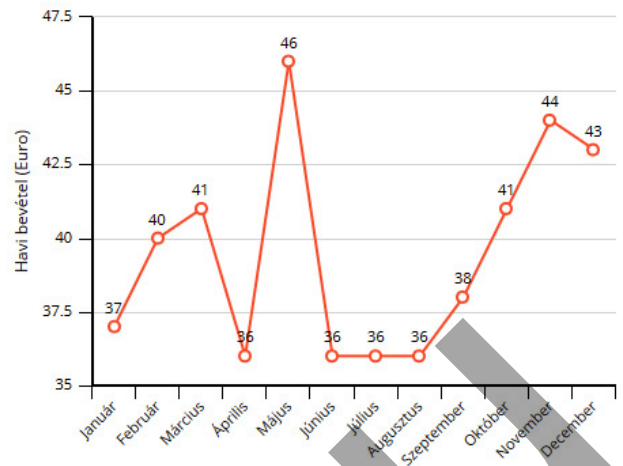
Fv-ként tekintve mi az értékkészlete ennek a függvénynek?

5. grafikon:

Milyen határok közt van a bevétel?
(Minimumérték, maximum érték)

Hogyan számolnád ki az átlagbevételt?

Fuvarozó cég havi bevétele



Cég havi bevétele

Van-e olyan bevétel, amelyről egyértelműn megmondható, hogy mely hónapban történt.
Van-e olyan, amelyikről nem? Vagyis injektív-e a függvény v. sem?

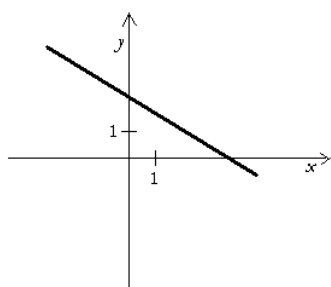
6. grafikon: versenyautó, idő-sebesség grafikon.

Próbálj egy ilyen pályát rajzolni! Nem kell visszaérnie a kiindulási pontba!
Add meg a mértékegységeket, és az egységeket a grafikonon!



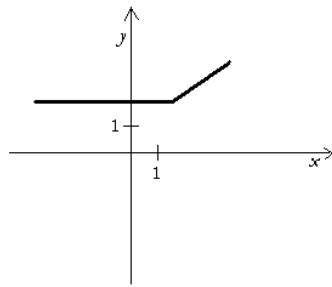
III/8) Függvények grafikonjai.

Válasszuk ki, mely ábra lehet függvény grafikonja és mely nem, illetve melyik tűnik injektívnek, melyik nem! Amelyik függvénygrafikon, ott add meg az értelmezési tartományt és az értékkészletet - felírva a tengelyekre az értékeket.



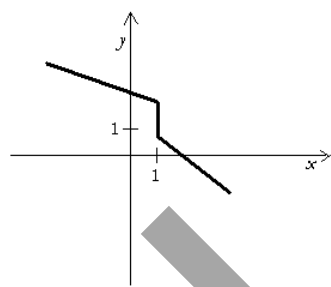
D=

R=



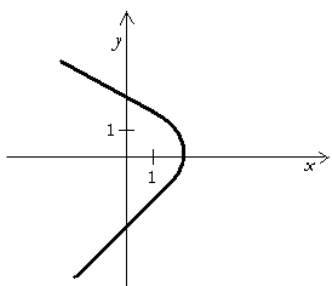
D=

R=



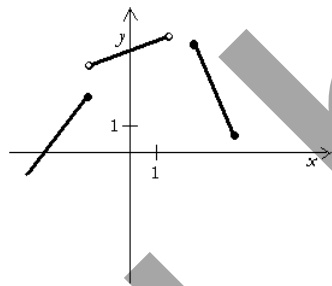
D=

R=



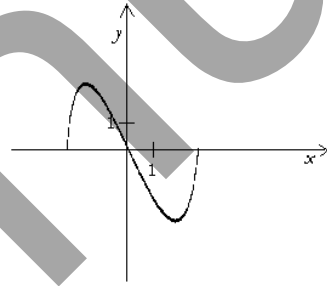
D=

R=



D=

R=



D=

R=

IV. Lineáris (elsőfokú és konstans), illetve lineárisá tehető függvények

IV/1) A Lineáris függvények: a konstans és az elsőfokú fv-ek.

Elsőfokú függvények: Az $x \mapsto mx+b$, ahol $m \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbf{R}$ hozzárendelési szabályú függvényeket elsőfokú függvényeknek hívjuk.

Pl.:

Konstans függvények: Az $x \mapsto b$, ahol $b \in \mathbf{R}$ hozzárendelési szabályú függvényeket *konstans* függvényeknek hívjuk.

($x \mapsto b \Leftrightarrow x \mapsto 0 \cdot x + b$), vagyis $m=0$)

Pl.:

Lineáris függvények: Az elsőfokú és a konstans függvények.

Tétel: Az elsőfokú és konstans (nulladfokú) fv-ek grafikonja egyenes – „linea” (11. osztályban bizonyítjuk.)

Azokat a függvényeket, melyek képe egyenesre illeszkedik, lineárisá tehető függvényeknek hívjuk. Ilyen lehet: „lukas” egyenes, v. csak félegyenes stb.

IV/2) Mitől függ a változás – vagyis a „meredekség”

A mindhárom gépbe először egy számot (pl. 10), majd utána egy 1-gyel nagyobbat dobok be. Melyiknél mennyivel változik a kidobott érték?

$$2 \cdot ()$$

$$3 \cdot ()$$

$$5 \cdot ()$$

$$-2 \cdot ()$$

$$-3 \cdot ()$$

$$-5 \cdot ()$$

A mindhárom gépbe először egy számot (pl. 10), majd utána egy 1-gyel nagyobbat dobok be. Melyiknél mennyivel változik a kidobott érték?

$$2 \cdot () + 28$$

$$3 \cdot () + 28$$

$$5 \cdot () + 28$$

$$-2 \cdot () + 28$$

$$-3 \cdot () + 28$$

$$-5 \cdot () + 28$$

Adott 10 függvény hozzárendelés szabálya - 10 gép

$$f(): y=2x+8$$

$$g(): y=-2x-3$$

$$h(): y=-4x+5$$

$$i(): y=x+12$$

$$j(): y=2x-1$$

$$k(): y=0,5x+6$$

$$m(): y=-x+2$$

$$n(): y=3x-4$$

$$p(): y=-\frac{2x}{3}-1$$

$$q(): y=\frac{7}{8}x+1$$

$$2 \cdot () + 8 \quad f()$$

$$-2 \cdot () - 3 \quad g()$$

$$-4 \cdot () + 5 \quad h()$$

$$() + 12 \quad i()$$

$$2 \cdot () - 1 \quad j()$$

$$0,5 \cdot () + 6 \quad k()$$

$$- () + 2 \quad m()$$

$$3 \cdot () - 4 \quad n()$$

$$-\frac{2 \cdot ()}{3} - 1 \quad p()$$

$$\frac{7}{8} \cdot () + 1 \quad q()$$

Ha mindegyikbe először 5-öt, majd utána eggyel többet, vagyis 6-ot dobok be:

- Melyikeknél lesz pozitív változás – (vagyis nagyobb számot dob ki a gép az előző kidobott számnál)
- Melyikeknél lesz negatív változás – (vagyis kevesebbet dob ki a gép):
- Melyiknél lesz a legnagyobb pozitív változás:
- Melyiknél lesz a „legnagyobb” negatív változás (legnagyobb abszolútértékű):
- Melyik növekszik, de a legkevesbé:
- Melyik csökken, de a legkevesbé:

Mitől függ a változás mértéke?

Melyeknél a „legmeredekebb” a változás (akár növekszik, akár csökken, de nagyon...)

IV/3) Lineáris fv-nél két pontjából már ábrázolható a fv. grafikonja

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = 6(x-2) - 2(2x-5,5)$ A „szép definíció”: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) =$

Először is „helyrepofozzuk” – olyan alakra hozzuk, hogy látszódjék, milyen fv.

Tehát a típusa:

ÉT, vagyis $D_f =$

$m =$

Tengelymetszetek – ZH (zérushely)

ZH: ott metszi az x tengelyt (ez a zérus hely), ahol $y = \dots\dots\dots$

Az a pont esik az y tengelyre,
melynek első koordinátája: $\dots\dots\dots$

Általánosítás

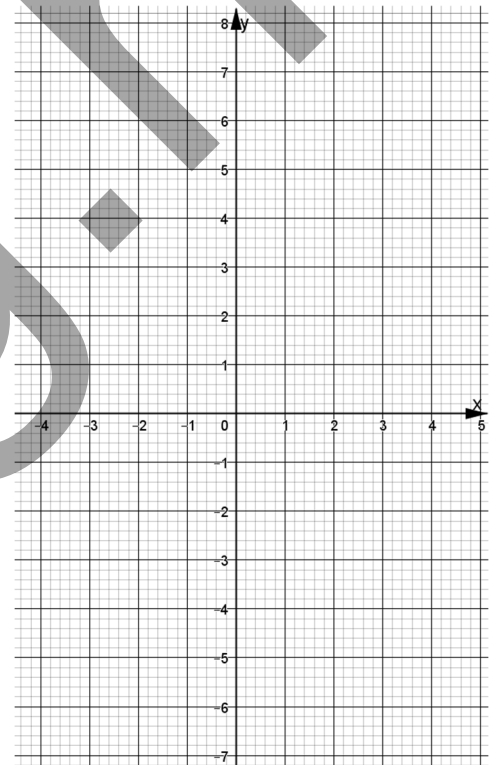
$y = mx + b$ Zérushelye:

A zérushely-keresés
általában egyenletmegoldás!
Fixpont:

Inverz:

Értékkészlet: $R_f =$

Értéktáblázat:



x	-3	-2	-1	0	0,5	1	1,5	2	2,5				
										-2	8	100	-217

Grafikonja: Két pontját ábrázoljuk, mivel egyenes a grafikon.

Grafikonra illeszkedő és nem illeszkedő pontok oda-vissza

Mit jelent az, hogy egy pont illeszkedik-e a grafikonra?

Pl.: A(8;17) graf_f B(15;29) graf_f.

$P(x,y)$ akkor eleme graf_f-nek, ha koordinátáira teljesül: $x \in D_f$ és $y = f(x)$

Egyszerűsítés gyakorlás HF-hoz:

$$\frac{4x^2 - 1}{3 - 6x} =$$

$$\frac{5x^2 - 10x + 5}{7x - 7} =$$

b) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{3x+2}{2} - x - 2$

Típus:

$D_g =$

Merekség:

ZH:

y tengelymetszet:

Fixpont:

Inverz:

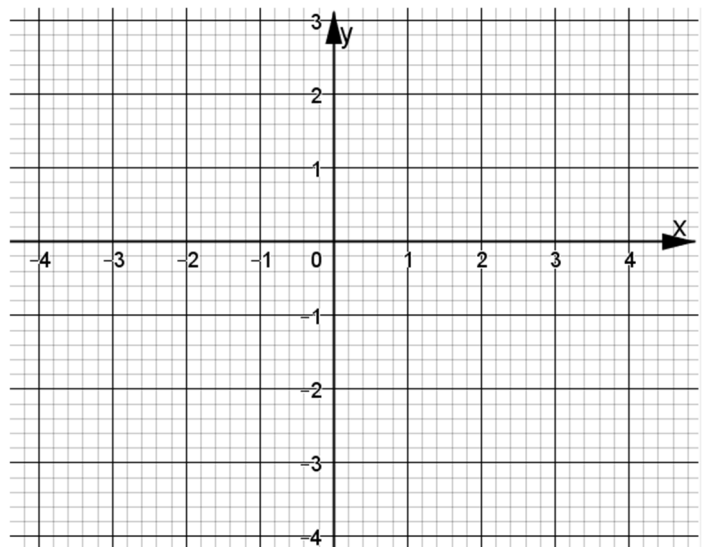
Értéktáblázat

x	-3	0	2	4	100	-3	0	-100	100
g(x)									

Értékkészlet – $R_g =$

Néhány grafikonra illeszkedő
és nem illeszkedő pont:

Grafikonja (megrajzolni)



c) $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; h(x) = -\frac{3x+4}{4}$

Típus:

$D_h =$

Meredekség:

ZH:

y tengelymetszet:

Fixpont:

Inverz:

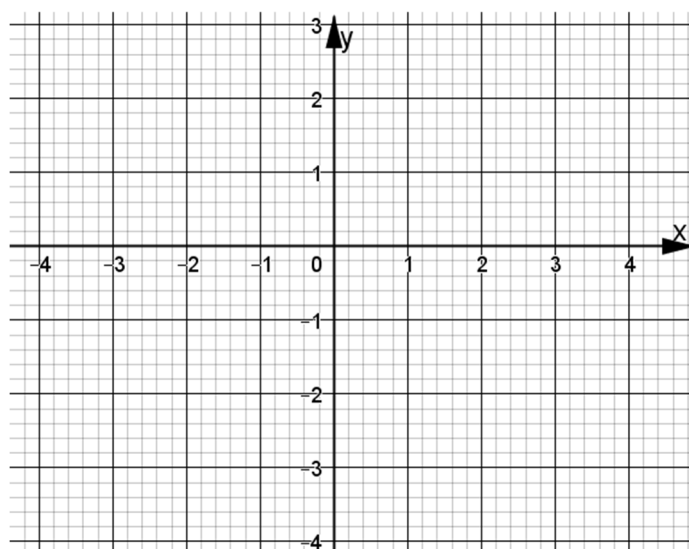
Értéktáblázat

x	-3	0	2	4	100				
h(x)						-3	0	-100	100

Értékkészlet – $R_h =$

Néhány grafikonra illeszkedő és nem illeszkedő pont:

Grafikonja

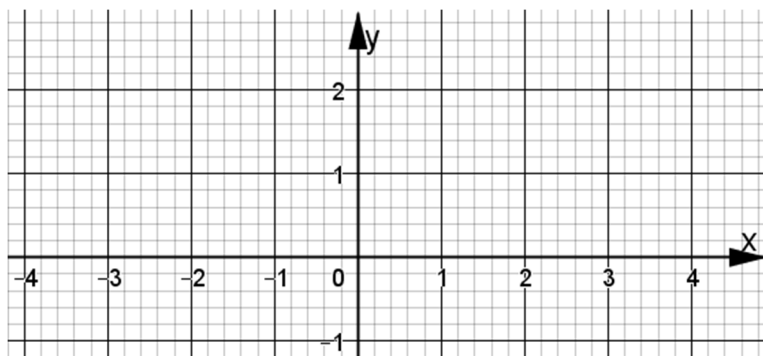


- d) A Konstans függvény
 $c(): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; y=2$

$D_c =$

Grafikonja

Típus:



$m =$

ZH:

Fixpont:

Injektív-e?

Invertálható-e?

$R_c =$

IV/4) A „meredekség” pontosabb értelmezése

- a) Észrevétel két pont közti „meredekségekről”:

tanm_fuggvenyek_egyenletek_A_4_2_g_meredekseg.ggb

$g(): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; y=5x+3$

pl: 6-hoz _____ = _____-at rendel: $g(6) =$ _____

7-hez: _____ = _____-at rendel: $g(7) =$ _____ = $g(6) +$ _____.

Vagyis eggyel nagyobb számhoz _____-tel nagyobb értéket rendel.

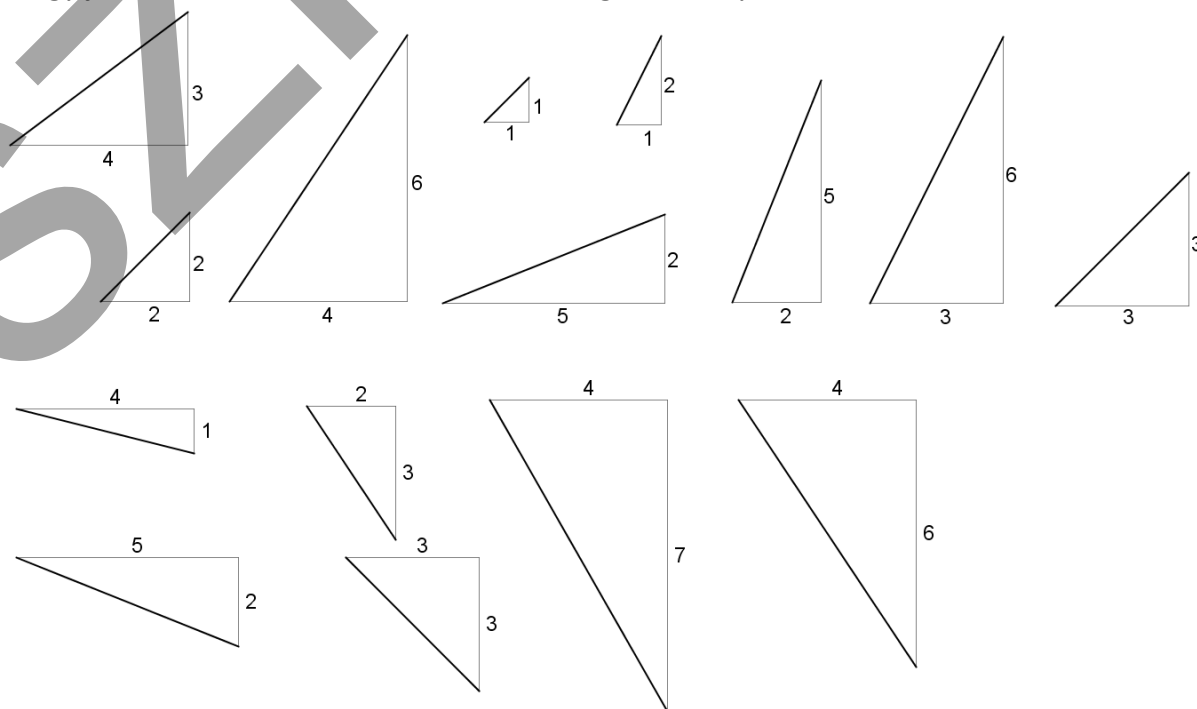
x_1 -hez: $5x_1+3$ -at

(x_1+1) -hez:

vagyis:

Látható, hogy a lineáris fv-nél x együtthatója határozza meg a függvény meredekségét (pl. most 5). (Nemsokára be is látjuk.)

- b) Hogy jellemeznéd a következő meredekségeket, milyen számmal?



c) Mennyi a meredeksége a következő hozzárendelési szabályú függvényeknek:

$$y = \frac{5-2x}{3} + 2(x-3)$$

$$y = (x-2)^2 - (x+1)(x-3)$$

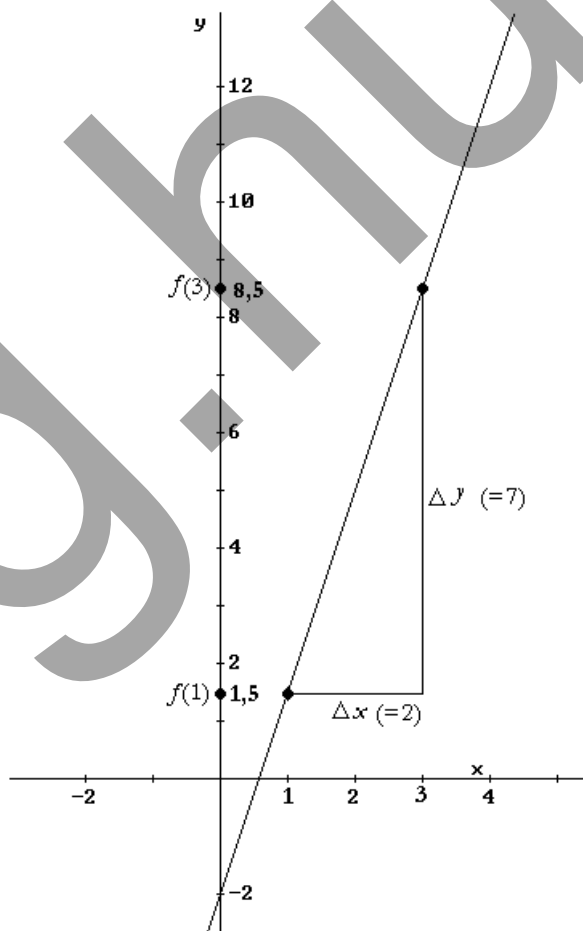
$$y = \frac{3x^2 - 12}{10 - 5x}$$

d) A meredekség számolása

$$f(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y = 3,5x - 2$$

Konkrét helyzetben:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} =$$



Két pont közötti meredekség jellemző száma $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. A Δ jel a mögötte található érték változásának nagyságát jelöli.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{7}{2} = 3,5 \quad \text{Ez a } \frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ a „különbségek hányadosa”, a „differenciahányados”}.$$

A lineáris függvényeknél a meredekség állandó, sőt, az x együtthatójával egyezik meg:

$$f(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y = ax + b$$

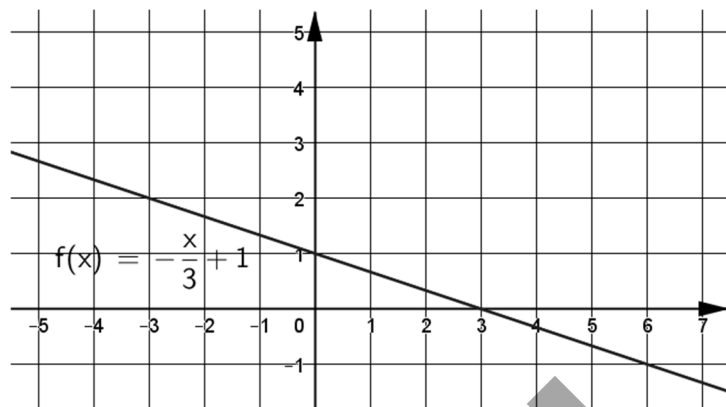
ui.:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(mx_2 + b) - (mx_1 + b)}{x_2 - x_1} = \frac{mx_2 - mx_1}{x_2 - x_1} = \frac{m(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = m$$

e) Gyakorlás

$$g(): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; g(x) = -\frac{x}{3} + 1$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} =$$



Jó tudni: a lineáris fv-eknél a fv-mereksége $\neq$ két pont közti meredekséggel!

Vegyük észre:

- ha a független változó együtthatója negatív: „csökkenő” a grafikon, ha pozitív, növekvő (emelkedő).
- $m = \ominus$: csökkenő a fv. és a grafikonja is.
- $m = \oplus$: növekvő a fv. és a grafikonja is.
- Ha a független változó együtthatójának abszolút értéke nagy: „meredek” a grafikon (meredeken csökken v. nő), ha kicsi: „lapos”.
- Akkor 45° -os a grafikon, ha az együttható: ± 1 .
- Szokás a meredekséget m betűvel jelölni, és szokás a lineáris függvények hozzárendelésé szabályát a következőképpen is írni: $y = mx + b$
- Mennél jobban emelkedik, mennél meredekebb a függvény grafikonja, annál nagyobb a meredekség, annál nagyobb az m .
- Konstans függvény meredeksége: 0.

tanm_fuggvenyek_egyenletek_A_4_3_d_mereksseg_tobb_fv.ggb

Mennyi a meredeksége a következő lineáris fv-eknek, melyek grafikonja átmegy az adott két ponton.

$$f(): A \text{ és } C \quad m =$$

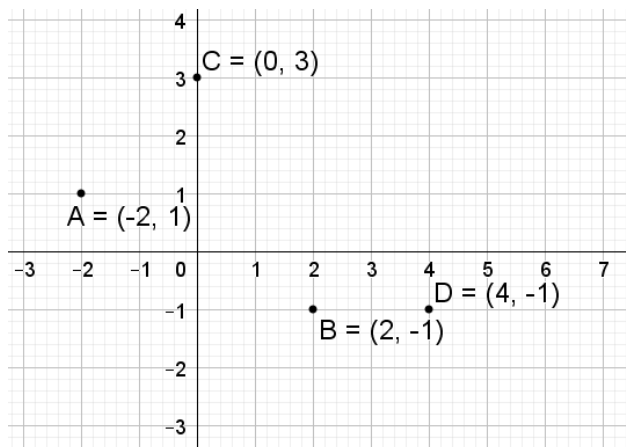
$$g(): D \text{ és } A \quad m =$$

$$h(): A \text{ és } B \quad m =$$

$$i(): B \text{ és } C \quad m =$$

$$j(): D \text{ és } C \quad m =$$

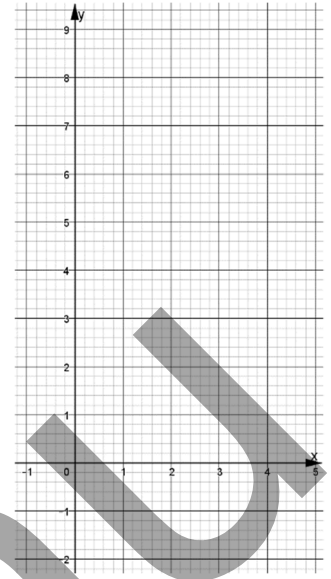
$$k(): D \text{ és } B \quad m =$$



IV/5) Grafikonról történő leolvasások, függvény hozzárendelési szabály visszakeresése

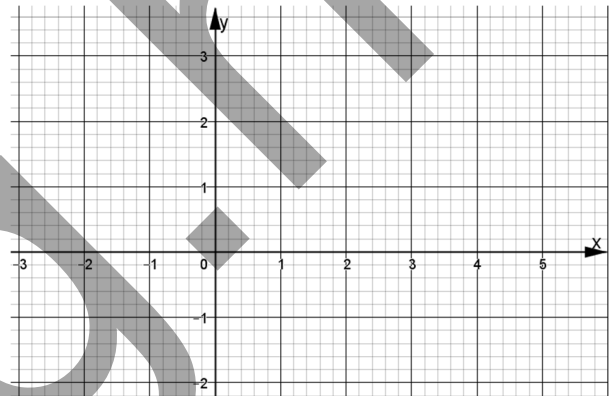
a) Meredekségből és egy grafikon-pontból a függvény felírása

- (i) Add meg azt az elsőfokú $f()$ függvényt,
melynek meredeksége: $m = -2$; és a grafikon
áthalad a $P(2;3)$ ponton.



- (ii) Add meg a következő
elsőfokú $g()$ fv-t:

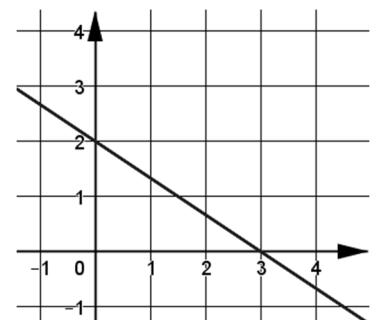
$$m = -\frac{1}{2}; P(-2;3) \in \text{graf}_g.$$



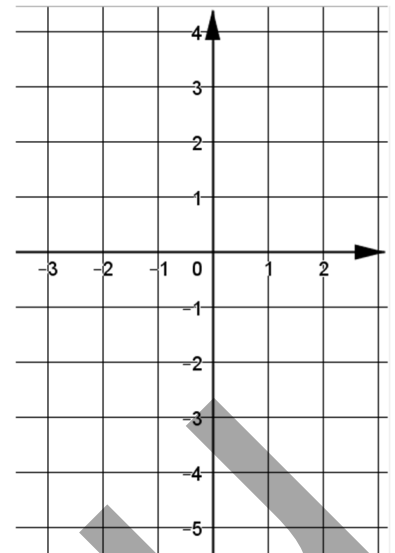
b) Lineáris függvények grafikonjának két pontja

Adott egy lineáris fv. grafikonja, mely áthalad a $(0;2)$ és a $(3;0)$ ponton és egy új pont a koordináta-rendszeren: $P(1;-1)$. Adj meg egy olyan másik lineáris fv-t, amely képe a megadottal párhuzamos, és áthalad az adott új $P(1;-1)$ ponton.

Mo.:



Elsőfokú függvény grafikonja párhuzamos az $A(-1; 2)$ és $B(2; -3)$ pontok által meghatározott egyenessel, és a $P(-2; 1)$ pont illeszkedik rá. Írd föl a fv-t, és add meg a zérushelyét.



Adott 3 pont. Kollinéárisak-e? $A(0; 1)$; $B(9; 30)$ $C(5; 17)$

Mo.: Sajnos a pontok felrajzolása és összekötése nem bizonyító erejű!

- c) Az azonos és a nem azonos meredekségű fv-ek. Ábrázoljuk is; ha lehet, most ne két ponttal, hanem mondjuk az y tengelymetszetet, és a meredekséget kihasználva.

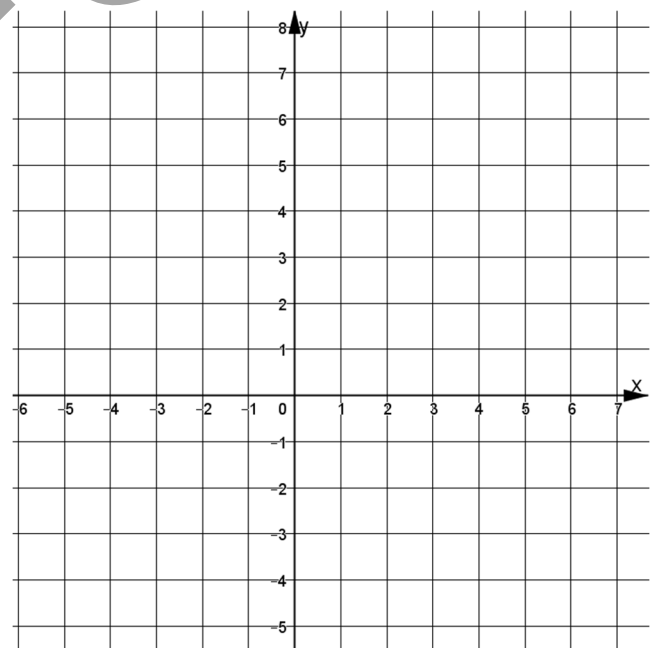
$$f(): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = \frac{3}{2}x$$

$$g(): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; g(x) = \frac{3}{2}x + 1$$

$$h(): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; h(x) = -\frac{3}{2}x + 1$$

$$k(): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; k(x) = x/2 + 1$$

$$n(): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; n(x) = -x/2 - 2$$



tanm_fuggvenyek_egyenletek_A_4_3_d__meredekseg_tobb_fv.ggb

d) Menet: monotonitás

... hogy az f fv. szigorúan monoton nő,

ha $\forall x_1, x_2 \in D_f$, és $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

„Nagyobb értelmezéstartománybeli elemhez”

... hogy az f fv. szig. mon. csökken,

ha $\forall x_1, x_2 \in D_f$, és $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

„Nagyobb értelmezéstartománybeli elemhez”

... hogy az f fv. monoton nő,

ha $(x_1, x_2 \in D_f \wedge x_1 < x_2) \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

„Nagyobb értelmezéstartománybeli elemhez”

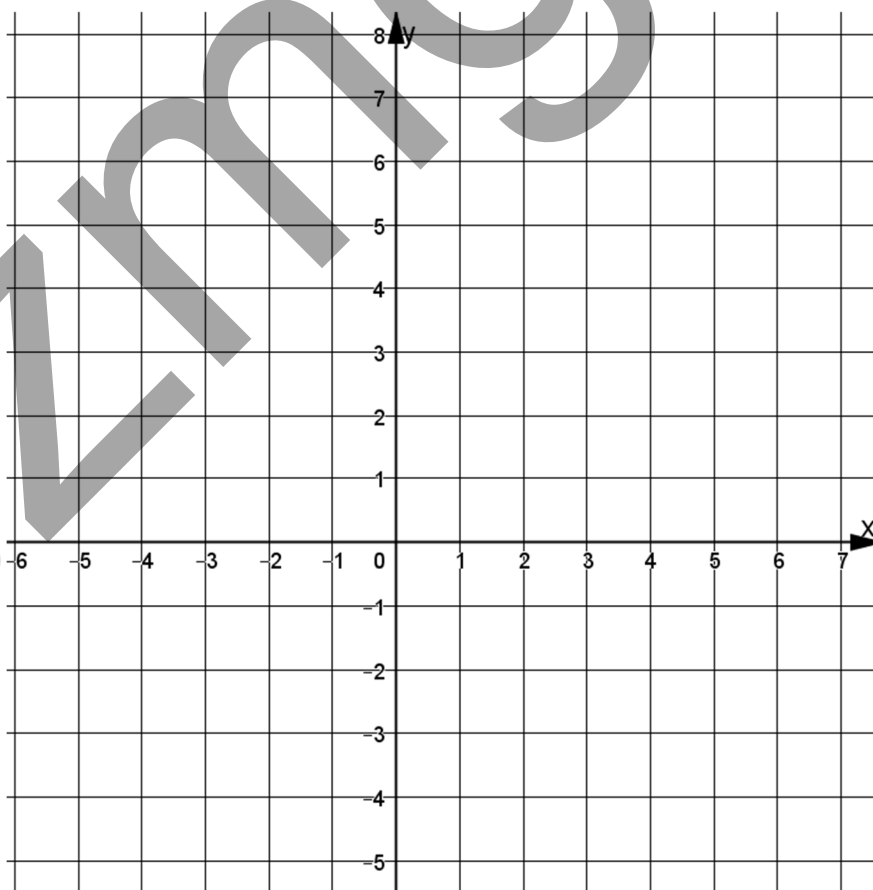
... hogy az f fv. monoton csökken,

ha $(x_1, x_2 \in D_f \wedge x_1 < x_2) \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

„Nagyobb értelmezéstartománybeli elemhez”

SAJNOS GUBANC AZ ELNEVEZÉSEK KÖRÜL – DE ELŐSZÖR TANULJUK MEG EZT, HOGY BIZTOSAN TUDJUK!

Rajzoljunk **szigorún monoton** függvényeket zölddel,
illetve **monoton** fv-eket pirossal!



IV/6) Függvényjellemzések

- a) Alapvető szempontok – lásd a konkrét példán
- b) Függvényjellemzések

$$f(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; f(x) = \frac{x^2 - x}{2x - 2} - 1$$

Def.: $f()$:

Kikötés:

$D_f =$

Típus:

ZH:

y tengelymetszet:

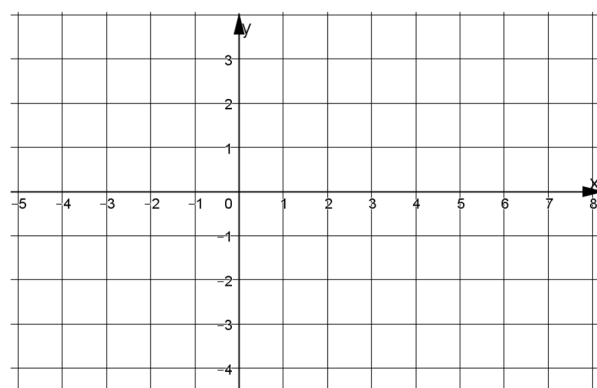
Fixpont:

Menet – táblázat - meredekséggel

Inverz

inverz: $f^{-1}(): y =$

$R_f =$



$$f():[-5;2] \rightarrow \mathbf{R}; f(x) = \frac{3x-3x^2}{2x-2} + 1$$

Függvénydefiníció: $f():[-5;2] \rightarrow \mathbf{R}; y=$

Kikötés:

$D_f=$

Típus:

ZH:

y tengelymetszet:

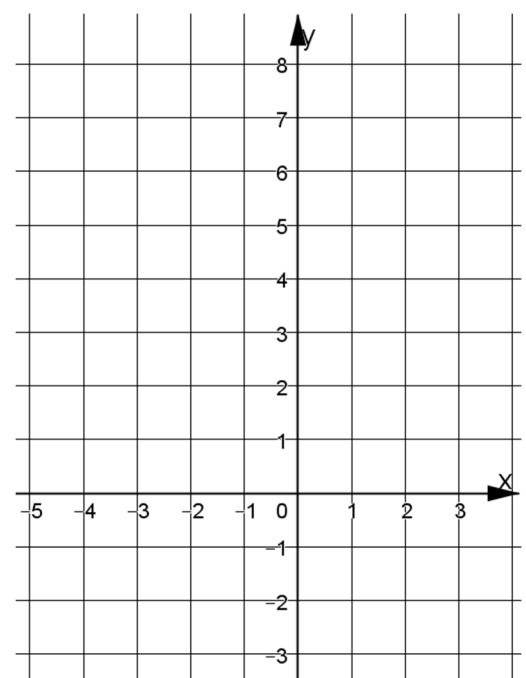
Fixpont:

Menet – táblázat - meredekséggel:

Inverz:

inverz: $f^{-1}(): y=$

$R_f=$



c) Függvényjellemzés grafikonról olvasva
f() függvény

$D_f =$

Felveszi-e a -2 értéket: _____

Az 5 -öt mely helyeken veszi fel: _____

A 2 -őt mely helyeken veszi fel: _____

A $-0,5$ -öt hol veszi fel _____

ZH:

Menete:

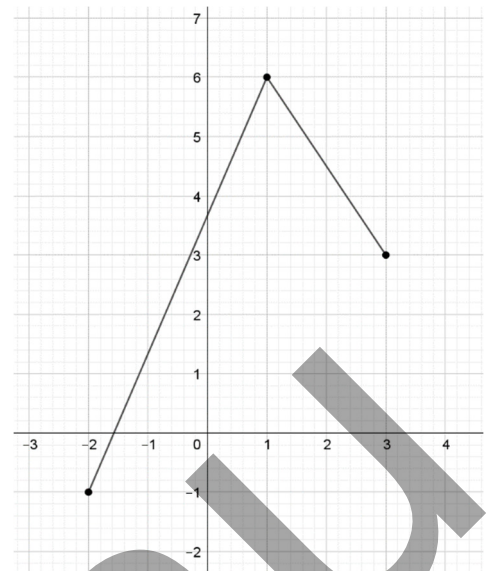
[;] intervallumon:

[;] intervallumon:

Max. hely.: _____ Max. érték: _____

Min. hely.: _____ Min. érték: _____

Mi az értékkészlete? $R_f =$



g() függvény

$D_g =$

Az $-0,5$ -öt hol veszi fel: _____

A 2 -őt hol veszi fel: _____

ZH:

Menete:

[;] intervallumon:

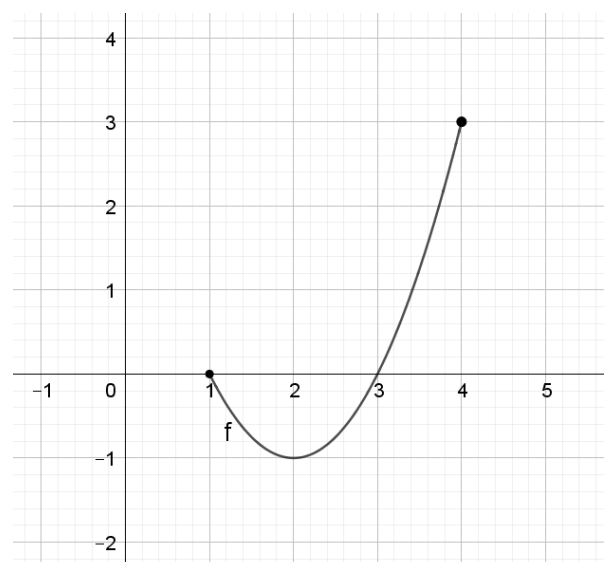
[;] intervallumon:

Max. hely.: _____ Max. érték: _____

Min. hely.: _____ Min. érték: _____

Mi az értékkészlete?

$R_g =$



d) $d : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; d(x) = \frac{5x}{2} - 3$

Kikötés:

$D_d =$

Típus:

ZH:

y tengelymetszet:

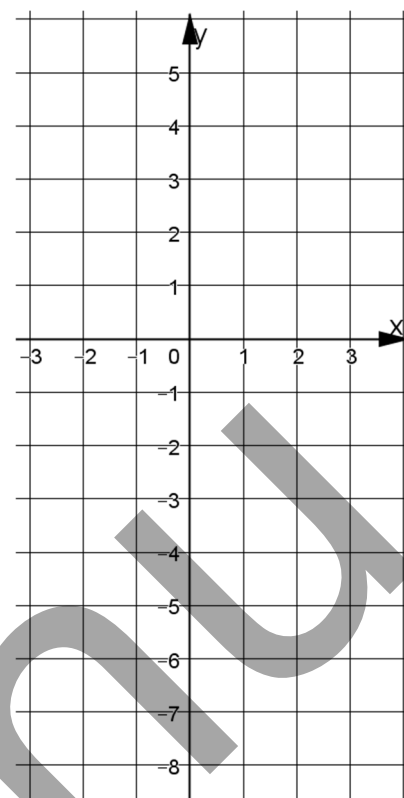
Fixpont:

Menet – táblázat - meredekséggel:

Inverz:

inverz: $d^{-1}(\cdot): y =$

$R_d =$



e) $e():[-1; 5] \rightarrow \mathbf{R}; e(x) = \frac{12x - 2x^2 - 18}{3x - 9}$

Kikötés:

Hozzuk szebb alakra:

Függvénydefiníció: $e():[-1; 5] \rightarrow \mathbf{R}; y =$

$D_e =$

Típus:

ZH:

y tengelymetszet:

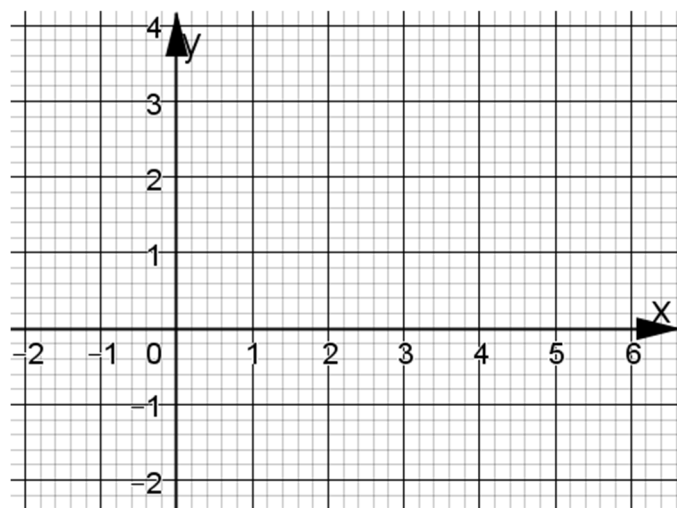
Fixpont:

Menet – táblázat:

Inverz

inverz: $e^{-1}(): y =$

$R_e =$



f) $f():[-3;2] \rightarrow \mathbf{R}; f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 2}{x+2}$

Ez valójában egy $h():\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; h(x) = \frac{2x^2 + 3x - 2}{x+2}$ fv. leszűkítése a $[-3;2]$ intervallumra:

$$f() = h() \Big|_{[-3;2]}$$

Kikötés:

Hozzuk szebb alakra:

Függvénydefiníció: $f():[-3;2] \rightarrow \mathbf{R}; x \mapsto$

$D_f =$

Típus:

ZH:

y tengelymetszet:

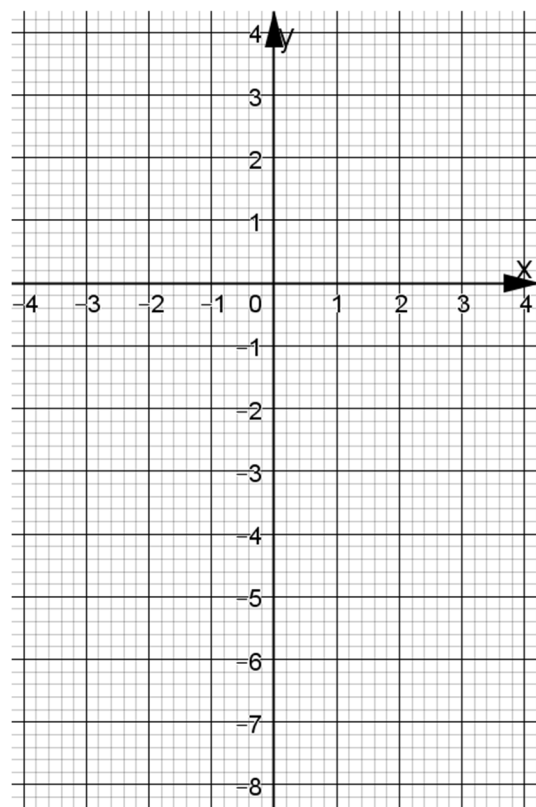
Fixpont:

Menet – táblázat:

Inverz

inverz: $f^{-1}(): y =$

$R_f =$



g) $g():[-2;2] \rightarrow \mathbf{R}; x \mapsto \frac{3x^2-2x-1}{x-1} - x$

Ez valójában egy $h(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; h(x) = \frac{3x^2-2x-1}{x-1} - x$ fv. leszűkítése a $[-2;2]$ intervallumra:

$g() = \left. h() \right|_{[-2;2]}$

Kikötés:

Hozzuk szebb alakra:

Függvénydefiníció: $g():[-2;2] \rightarrow \mathbf{R}; g(x) =$

$D_g =$

Típus:

ZH:

y tengelymetszet:

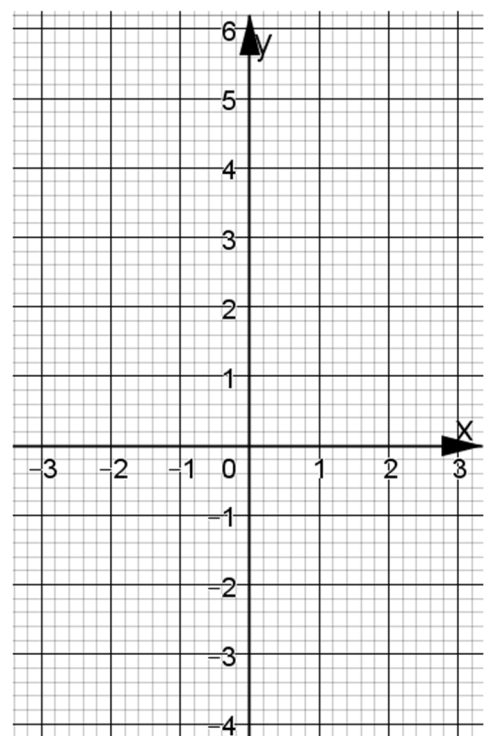
Fixpont:

Menet – táblázat:

Inverz

inverz: $g^{-1}(): y =$

$R_g =$



h) $h([-3;2]) \rightarrow \mathbf{R}; x \mapsto \frac{4x^2 - 4x + 1}{1 - 2x} - x$

Kikötés:

Hozzuk szebb alakra:

Függvénydefiníció: $h([-3;2]) \rightarrow \mathbf{R}; y =$

$D_h =$

Típus:

ZH:

y tengelymetszet:

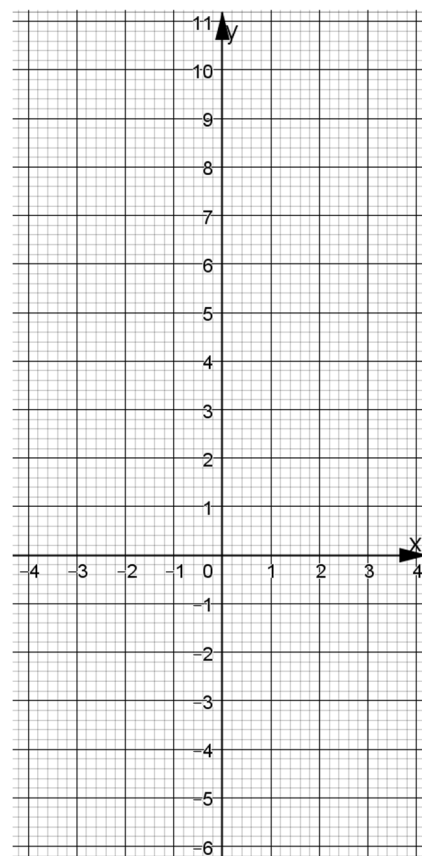
Fixpont:

Menet – táblázat:

Inverz

inverz: $h^{-1}()$: $y =$

$R_h =$



IV/7) Melyik hozzárendelési szabály lineáris, vagy tehető lineáris?

Amelyik olyan, írjuk is fel a függvény hozzárendelési szabályát.
Vigyázat, a lineáris tehetőnél figyeljünk az értelmezési tartományra!

$$\frac{1}{3}(x-4)$$

$$(x-3)(x+1)$$

$$\frac{8x^2+2-8x}{2x-1}$$

$$(-2x+1)-(3x-3)$$

$$\frac{5}{x+1}+4$$

$$\frac{3x^2-12}{3x+6}$$

$$\frac{x^2+3x+2}{x}$$

IV/8) Hogy változik a fv, ha egy számmal szorozzuk, vagy osztjuk a hozzárendelési szabályt?

Sajnos sok gyerek gátlástalanul megteszi.

Pedig megváltozik a gép!

Nézzünk egy ilyen: $f(x): y=6x-4$ és $g(x): y=3x-2$

A fv. meredeksége a fele lett...

Nézzük: $f(5)=$

$g(5)=$

Pedig csak leosztottam 2-vel...

Miért is jut ilyen eszünkbe?

Hát az egyenletmegoldásnál szabad osztani kettővel – mert a zérushely marad...

$$6x-4=0 \quad /:2$$

$$3x-2=0$$

IV/9) Az egyenes arányosság – a „sarki piac függvénye”

a) Def.: Az $y=mx$ ($m \neq 0$) hozzárendelésű függvényeket „egyes arányosságnak” nevezzük. Tehát az „egyes arányosság” egy függvény.

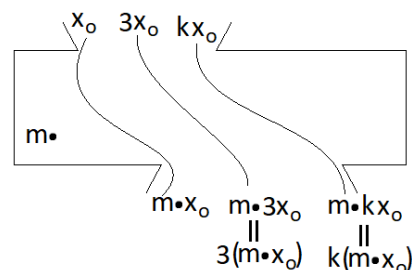
Vagyis $\frac{\text{függő mennyiség}}{\text{független mennyiség}} = \text{állandó}$ $\left(\frac{\text{függő változó}}{\text{független változó}} = \text{állandó} \right)$

Látható, hogy a hányszorosára nő v. csökken a függtl változó, annyiszorosára nő v. csökken a függő változó, hiszen a hányadosuk állandó.

Vagyis mondhatjuk azt, hogy „ha az argumentumot háromszorosára növelem, akkor a függvényérték is a háromszorosa lesz”.

Hétköznapian: kétszer annyi körte kétszer annyiba kerül. 5 kg ötszörös árú az 1kg-hoz képest, 8 kg nyolcszoros árú az 1 kg-hoz képest.

Ár/tömeg=állandó – az 1 kg. ára.



b) Mely két adat között van egyenes arányosság (ha életből vett, akkor „ideális eset”)

- Sebesség – idő alatt megtett út
- Idő – állandó sebességgel megtett út
- Életkor – tapasztalat
- Négyzet oldala – kerülete
- Lipóti kenyér súlya - ára
- Négyzet oldala – területe
- Fok és ívmérték (radián)
- Tabletták száma – C-vitamin tartalom
- Életkor – testsúly
- Eltelt idő – épített autópálya hossz
- Életkor – fizetés
- sebesség – légellenállás
- buliban töltött idő – elbutulás mértéke
- cserepek száma – lefedett tető-négyzetméter

c) Adott állandó sebességnél: eltelt idő és megtett út.

50 km/h sebességgel haladó autó mennyit utat tesz meg:

1 óra alatt:

2 óra alatt:

5 óra alatt:

22 óra alatt

0,1 óra alatt:

0,2 óra alatt:

d) Az egyenes arányosság grafikonja:

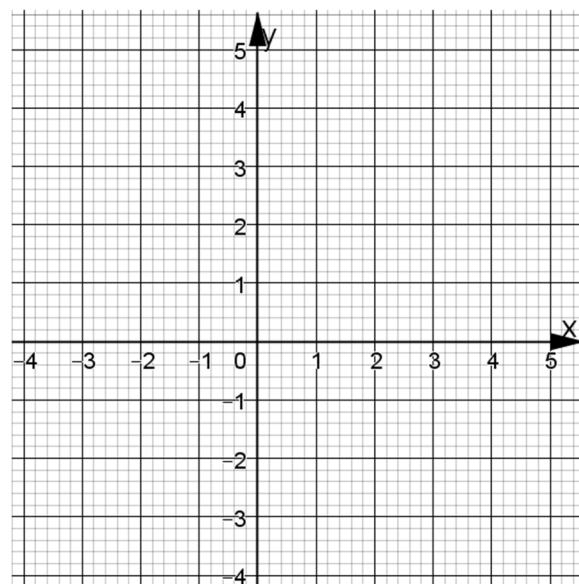
$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; y = ax \quad (a \neq 0)$$

Látjuk a definíció,

hogy a fv. képe lineáris

és áthalad az origón.

A „piac függvénye”: semmiért semmit sem kell fizetni – vagyis $f(0)=0$; kétszer annyiért pedig kétszer annyit...



e) Gyakorlása:

Ha 1 mól metán 16 g, akkor 23 mól metán hány g?

Egy ember 3 óra alatt 20 vödör almát szed.

Mennyit szed

9 óra alatt?

11 óra alatt

2 óra alatt?

15° hány radiánnak felel meg?

Ha 5 kg kristálycukor 7 Euro, akkor 62 kg hány Euro?

Ha 15 kg méz 110 Euro, akkor 60 Euro-ért hány kg-ot kapok?

$\frac{2\pi}{5}$ radián hány foknak felel meg?

Lineáris, v. lineárisra, vagy azok szorzatára visszavezethető egyenletek.

I. Bevezetés: egyszerűbb lineáris egyenletek

I/1) Egyenlet = egy igaz állítás egy általunk még nem ismert számra.

Valaki azt állítja, hogy egy általa gondolt szám triplájánál kétszer kisebb szám duplája a gondolt számmal nagyobb, mint a gondolt számnál öttel nagyobb szám triplájánál eggyel nagyobb szám.

Írjuk fel egyenlet formájában:

Próbálgatással csak akkor szabad egyenletet megoldani, ha már csak véges számú lehetőségünk van.

Bontsuk fel a zárójelet, de mondjuk végig „plusz 2-szer plusz 3 iks az plusz 6 x,...

Majd összevonunk:

Majd cél, hogy az egyik oldalon legyen az ismeretlen, a konstans a másik oldalon.

Vagyis először „kibontjuk” az ismeretlent a zárójelből, majd a szokásos polinom-alakra rendezzük. Akkor jó, ha elsőfokú lesz.

Visszahelyettesítés:

Az egyenlet egy állítás: „gondoltam egy számra, és az állítás igaz rá, amit azután egyenlettel írtunk fel”

Ha az első sor igaz arra a számra, akkor a következő sor is igaz.

Ha a második sor igaz, akkor a harmadik sor is igaz. Stb.

$x=10$

Vagyis ha az első sor igaz, akkor az $x=8$ is igaz.

De nekünk az kell, hogy az $x=10$ az a szám, amire gondoltunk és kimondtuk az állítást.

Vagyis: vissza kell helyettesíteni az első sorba.

Ezért egyáltalán nem szerencsés azt mondani, hogy ellenőrzés.

Jobb a **visszahelyettesítés** szó: ha az $x=8$ igaz, akkor az első sor is igaz.

Vagyis: az első sorból lépésenként az következik, hogy az $x=10$ lehet egyedül a megoldás.

De nekünk nem ez kell. Hanem az, hogy az $x=10$ megoldás-e.

A visszahelyettesítésből az következik, hogy az $x=10$ a megoldás.

Így kiderült: az $x=10$ a megoldás, és más megoldás nem lehet.

- Emlékeztető: Jellemezd, ábrázold: $f():[-5;5] \rightarrow \mathbf{R}; y = \frac{2x^3 - 8x}{-3x^2 - 6x}$

Kikötés:

Hozzuk szebb alakra:

Definíció: $f():[-5; 5] \rightarrow \mathbf{R}; y =$

$D_f =$

Típus:

ZH:

y tengelymetszet:

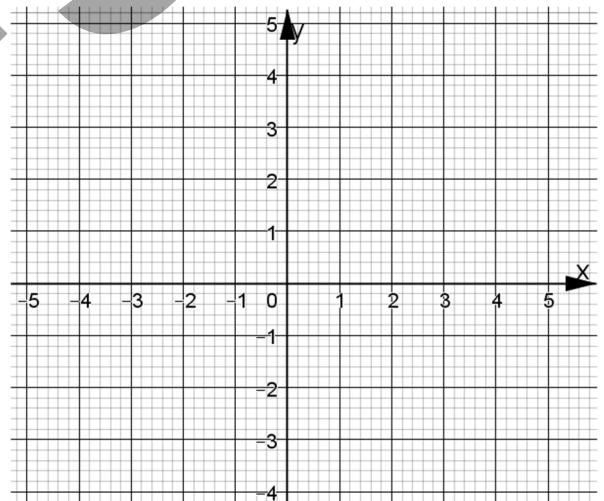
Fixpont:

Menet – táblázat:

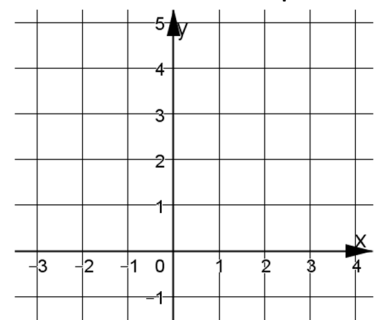
Inverz

inverz: $f^{-1}(): y =$

$R_f =$



- Emlékeztető: Írd föl azt a lineáris fv-t, mely grafikonja a következő két pontra illeszkedik: A(3; 4) B(-2;2)



I/2) Egyenletek fő megoldási menete

- kikötések
- úgy összevonni, hogy (... x^4 ; x^3 ; x^2 -ből), x -ből, konstansból csak 1-1 db. legyen
- megoldás közben ekvivalencia figyelés
- Ha első fokú: két oldalra rendezni: $ax=b$
- ha másod- v. magasabb fokú: egy oldalra rendezni („nullára redukálni), majd szorzattá alakítani!
„Egy szorzat...”
- Visszahelyettesítés!

* $12x^4 - 44x^3 + 31x^2 + 42x - 45 = 0$ (segítség: gyökök: -1 ; $5/3$; és kétszeres: $3/2$)

I/3) Néhány egyszerűbb egyenlet

$$2x + 7 + 6x - 2 = 2(3x-1) + 7$$

$$-(7m+13) + 3 - 3(m-4) = 1 - (2m-1) - 8$$

$$5(x-2) - 2(3-x) = -(4-5x) - 2(-2x+3)$$

$$3(2-5x) - (2x+7) = -2(3x-4) - 3(3-5x)$$

$$3x - 5(2x+3) = 4 - (5x+2) - 3(3-x)$$

$$2(1-3x) - (5-2x) = -3(3-2x) + 5(-3x-2)$$

I/4) Látszólag másodfokú egyenletek

Figyelem – emlékezzünk: $(x-1)^2 \neq x^2-1$, hanem: $(x-1)(x-1) =$

$$(x+1)^3 =$$

$$(2x-3)(2x+3) =$$

Oldd meg:

$$(3-2x)(3x+1) - 2x(5-x) = 3(x-5) - 2x(2x-5) + 2$$

I/5) A zárójelezés fontossága – színezzük ki a nagy méretű zárójeleket!

$$-(4(2x-1)(2x+1)) + (2(3x-2)(2x+3)) = (5(x+1)(x-1)) - ((3x-2)^2)$$

Itt már magunktól zárójelezzünk!

$$-(x-2)^2 - 3(x-1)(x+1) + 2 = 3x(2-x) - (x+2)(x-4) + 3(2-x)$$

$$-(2x-3)^2+3x(5-4x)-4(7x-3x(2x-1)) = (3x-2)(3x+2) -(x-1)^2-5(2-3x)$$

II. Főbb egyenlet típusok

II/1) Törtes lineáris egyenletek

a) Egy kis számelmélet (ismétlés)

Számelmélet alaptétele: bármely egynél nagyobb természetes szám egyértelműn bontható fel prímtényezők szorzatára sorrendben való különbözőség erejéig.

Vagyis két (egynél nagyobb) természetes szám akkor és csak akkor egyezik meg, ha kanonikus alakjuk megegyezik.

Adott két szám, prímtényezőkre bontva:

$$a=2^5 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 = 2156000 \quad b=2^3 \cdot 3^2 \cdot 7^3 \cdot 11 = 271656$$

Mondj osztóit a b -nek (kanonikus alakban):

Mondj közös osztókat:

Lnko:

Lkkt:

Módszer 2 v. több szám legkisebb közös többszörösének kiszámításához: vesszük az összes előforduló prímtényezőt, és összeszorozzuk őket a szereplő legmagasabb hatványon.

$$[12;15]=$$

$$[2 \cdot 3^2 \cdot 13; 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7^3 \cdot 11; 3^2 \cdot 7 \cdot 13] =$$

Emlékeztető:

Egy szám osztóit és osztóinak számát: „Fa-struktúrával” határozzuk meg:

Először KANONIKUS ALAK – majd a fa-struktúra.

Két szám Inko-ját minden közös osztó osztja, és az Inko osztói közös osztói a két számnak.

Vagyis két szám közös osztói pontosan az Inko osztói (azok mind és csak azok – ettől „kitüntetett közös osztó” az Inko!)

Adjuk meg fa-struktúrával a következő két szám összes (pozitív) osztóját:

$$a=2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \quad b=2^2 \cdot 5 \cdot 7^3 \cdot 13$$

b) Törtös lineáris egyenletek

$$\frac{3x}{2} - \frac{3-2x}{3} = -\frac{1-8x}{4} - 1$$

$$\frac{3x-3}{12} - \frac{5x-10}{15} = -(x+1) - \frac{3-2x}{2}$$

$$\frac{2}{7}(3x-7) - \frac{5(4x-1)}{49} = \frac{3}{14}x - \frac{20+18x}{196}$$

$$\frac{4x-3}{14} - \frac{3x+1}{6} - 2 = 2 + \frac{2-5x}{21}$$

$$\frac{4x-1}{0,2} - \frac{3(5-2x)}{0,3} = \frac{8x-3}{0,5} + 20x$$

II/2) Több zárójel egymásba skatulyázva – „ellentmondó egyenlet” és „azonosság”

$$5(2-3(3x-2))=3(-19x-4(5-x))$$

$$x+2[x-3(x-4)]=24-3x$$

II/3) Magasabb fokú, de *lineáris tényezők szorzatára* visszavezethető egyenletek

Főcél: egy oldalra rendezni (nullára redukálni), majd szorzattá alakítani!

Polinomegyenletnél (vagy azzá alakíthatónál) hány gyököt várunk?

Egy polinomegyenletnek maximum annyi gyöke (megoldása van), amekkora a foka.

a) $(2x-3)(x-3(x+6))\left(\frac{x}{4}-\frac{3-x}{3}\right)=0$

A bal oldal egy tag, többtényezős szorzat. Ekkor a zárójeleket csak egy agyalágyult bontja föl. Örülünk, hogy már valaki szorzattá alakította a valójában harmadfokú kifejezést!

A bal oldal: egy tag, sok tényező - a jobb oldal 0. Ez a legjobb!

Egy szorzat akkor és csak akkor 0, ha valamelyik tényezője nulla.

b) Teljes négyzet:

$$(3x-2)^2 = -5$$

$$(5x+3)^2 = 36$$

$$(x+10)^2 = 0$$

c) $x^2=x$

Hibás gondolatmenet:

$$x^2=x \text{ } /:x$$

$$x=1$$

Miért?

Ismeretlent tartalmazó tényezővel nyakló nélkül nem osztunk: hiszen elveszik egy olyan gyök, amikor az ismeretlent tartalmazó tényező 0 volt.

Emlékezzünk az fentebbi példára: $(2x-3)(x-3(x+6))\left(\frac{x}{4}-\frac{3-x}{3}\right)=0$

Itt nem leosztottunk, hanem megállapítottuk, hogy mindegyik tényező lehet 0.

Vagyis:

$$x^2=x$$

Másod, vagy magasabb fokú egyenletek úgy oldunk meg, hogy egy oldalra rendezzük (0-ra redukáljuk), majd szorzattá alakítjuk.

Egy szorzat akkor és csak akkor 0, ha valamelyik tényezője 0.

d) $4(x-1)^2=-3(x-1)$ AKI $(x-1)$ -gyel OSZT: GYEHENNÁRA KERÜL.

ISMERETLENT TARTALMAZÓ TÉNYEZŐVEL NEM OSZTUNK. KB SOHA. ☠☠☠☠

Vagyis:

e) $x^2=25$

Hibás gondolatmenet: $x=5$ Miért?

Eleve számíthatunk arra, hogy egy másodfokú kifejezésnek 2 gyöke van.

(Két egyszeres v. egy kétszeres vagy két komplex ☺ !)

Vagyis: megint egy oldalra kell rendezni, majd szorzattá alakítani.

f) $4x^3=36x$

$$(x+1)^2=4$$

$$g) -3x^2+24x=-195$$

$$20x^2=15-20x$$

$$(5x-1)(x-3)-(3x+1)(x-3)=4x(x-3)$$

$$(3x-1)(2-x)-2x+4=(x+1)(x-2)$$

$$-3x^4-6x^3+3x^2=-6x$$

II/4) A nevezők kezelése

Kikötések, közös nevezők, szorzattá alakítások, egyszerűsítése.

Egyszerűsítsünk a kikötések mellett.

CÉL: SZÁMLÁLÓ-NEVEZŐ: EGY TAG, A FŐEGYÜTTHATÓ POZITÍV⊕

$$\frac{x^3 - x}{x^3 - 2x^2 + x} =$$

$$\frac{5x^2 - 3x}{25x^3 - 9x} =$$

$$\frac{6x^3 - 3x^2 - 3x}{4x^2 - 2x^3 - 2x} =$$

$$\frac{3x^3 - 12x}{2x - x^2} =$$

$$* \frac{3x^5 + 12x}{x^2 - 2x + 2} =$$

II/5) Algebrai törtes egyenletek

Figyelem: csakis „egytag” tényezőit egyszerűsítjük, csakis tényezővel:

$$\frac{4x^2-9}{4x+6} \neq \frac{x-9}{6} = 4 \quad \text{Ugyanis: a számláló 2 tag!}$$

EGYSZERŰSÍTENI CSAK AKKOR SZABAD, HA A SZÁMLÁLÓ ÉS A NEVEZŐ IS EGY TAG. EKKOR AZONOS TÉNYEZŐVEL LEHET EGYSZERŰSÍTENI (Vigyázat: kikötés!)

$$\text{Tehát jól: } \frac{4x^2-9}{4x+6} = \frac{(2x-3)(2x+3)}{2(2x+3)} = \frac{2x-3}{2}$$

Egyenletet csak akkor szorzunk ismeretlent tartalmazó tényezővel, ha már nem tudunk **egyszerűsíteni!**

II/6) Algebrai törtes egyenletek - alap

$$\frac{3x+2}{3x-1} = -1 \quad \text{Kik.: } x \neq$$

$$\frac{x^2-9}{3-x} = -3 \quad \text{Kik.: } x \neq$$

$$\frac{2x^2-18}{3x+9} = -5 \quad \text{Kik.: } x \neq$$

$$5 - \frac{3}{x-2} = \frac{2x+1}{4-2x} \quad x \neq \quad \text{FŐEGYÜTTHATÓ!}$$

$$\frac{2x+2}{4-2x} + \frac{x-3}{2-x} = \frac{15}{3x-6} - \frac{x+1}{x-2} - 2 \quad \text{Kik.: } x \neq$$

$$\frac{4x+2}{x-3} - 12 = \frac{16x-20}{6-2x}$$

Hogy ne feledjük a polinomegyenleteket: $12x^4 + 2x = 8x^3 + 3x^2$

II/7) Algebrai törtes egyenletek - közép

$$\frac{(2x^2 - 28x + 98)(3x - 54)}{x^2 - 324} = 0 \quad \text{Kik.: } x \neq$$

$$\frac{3-2x}{2x-1} - \frac{6-2x}{x-4} = 1 \quad \text{Kik.: } x \neq$$

Ezentúl se feledjük a kikötéseket!

$$\frac{6x+1}{3x+2} - \frac{3x+3}{x^2-1} = \frac{2x}{x-1}$$

$$\frac{7}{2x^2-x} + \frac{8}{x} = \frac{1}{2x-1}$$

$$\frac{3}{5-10x} - \frac{3x}{8x^2-2} = -\frac{5}{6x-3}$$

$$\frac{5x^2-30x+45}{6-2x} = 6x-1$$

$$36 \cdot x^4 + 4 = 25 \cdot x^2$$

II/8) Algebrai törtes egyenletek – összetettebb

$$\frac{7}{x^2-4x+4} - \frac{2}{x^2+4x+4} = \frac{10}{2x^2-8}$$

$$\frac{2x+1}{3x+1} : \frac{2}{x} = \frac{x+1}{3}$$

$$\frac{3x+1}{3-3x^2} - \frac{5}{2x+2} = -\frac{6}{3x-3}$$

$$\frac{7x-21}{x+1} : \frac{2x-6}{3x^2-3} = 6x-12$$

$$60 \cdot x^3 = 88x^2 + 20x$$

$$5x^4 = 15 - 10x^2$$

$$-\frac{28}{18-2x^2} + \frac{5}{15-5x} - \frac{8-2x}{-2x-6} = 1 : \frac{6+2x}{14}$$

$$\frac{6x^2+7x-5}{8x^2-8x+2} - \frac{5x^2+17x-12}{2x^2+7x-4} = \frac{3x^2-14x+11}{2x-2}$$

II/9) Alapvető hibák egyenletmegoldásnál

- Rosszul írjuk le a példát... ☹. (Ezért kár volt fölkelni.)
- Kimarad a kikötés és a VH. ☹ (Ez csak odafigyelés kérdése. Így majd a Radnótisok és a Patrónások megelőznek bennőtöket a tudomány országában.)
- Eltűnő előjelek és átalakuló betűk, számok: ☹ (Ha trehány vagy és élvezed, hogy fájdalmat okozol magadnak, akkor mazochista vagy, mért nem bökdösöd még közben magad egy tűvel is. Élvezed, nem?)
- Nem egyszerűsítesz. Újra csak mazochizmus... A köbön.
- Egyenletet úgy szorzol, hogy elfelejted minkét oldal minden tagját beszorozni. ☹ (Ha válogatsz, mit szorzol meg, mit nem, akkor rádsütik, hogy rasszista vagy...)
- Törtet úgy szorzol, hogy nemcsak a nevezőt tünteted el, de a számlálót is megszorozod! ☹
- „Hová tűnt a sok jó gyök?” ☹ („Sag mir wo die Blumen sind”) Sajnos gyököt veszünk, ha ismeretlent tartalmazó tényezővel osztunk.

Lássunk egy ilyen:

$$\begin{aligned}
 3x(2x-3) &= 5x(2x-3) \quad /:(2x-3) \\
 3x &= 5x \\
 0 &= 2x \\
 x &= 0 \\
 \text{És az } x=3/2 &\text{ hová tűnt?}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Vagy: } 3x(2x-3) &= 5x(2x-3) \quad /:x \\
 6x-9 &= 10x-15 \\
 6 &= 4x \\
 x &= 3/2 \\
 \text{És az } x=0 &\text{ hová tűnt?}
 \end{aligned}$$

Helyesen megoldva:

$$\begin{aligned}
 3x(2x-3) &= 5x(2x-3) \\
 0 &= 5x(2x-3) - 3x(2x-3) \\
 0 &= (2x-3)(5x-3x) \\
 0 &= (2x-3)(2x) \\
 \text{I.} \quad 2x-3 &= 0 & \text{II.} \quad 2x=0 \text{ stb.}
 \end{aligned}$$

Vagy:

$$\begin{aligned}
 3x(2x-3) &= 5x(2x-3) \\
 \text{I.} \quad x &= 0 \\
 3 \cdot 0(2 \cdot 0 - 3) &= 5 \cdot 0(2 \cdot 0 - 3) \\
 0 &= 0 \\
 \text{Vagyis } x=0 &\text{ megoldás}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{II.} \quad x &\neq 0 \text{ (Ez nem kikötés: hanem eset!)} \\
 3x(2x-3) &= 5x(2x-3) \quad /:x \neq 0 \\
 3(2x-3) &= 5(2x-3) \\
 6x-9 &= 10x-15 \text{ stb.} \\
 6 &= 4x \\
 x &= 3/2
 \end{aligned}$$

II/10) $a^n - b^n$ alak

$$(x-7)(x+7)=$$

$$(x-3)(x^2+3x+9)=$$

$$(x-5)(x^3+5x^2+25x+125)=$$

$$(x-2)(x^4+2x^3+4x^2+8x+16)=$$

$$(x-3)(x^5+3^1 \cdot x^4+3^2 \cdot x^3+3^3 \cdot x^2+3^4 \cdot x+3^5)=$$

$$(x-5)(x^6+5^1x^5+5^2x^4+5^3x^3+5^4x^2+5^5x^1+5^6)=$$

Vedd észre: az egyik kitevője egyesével csökken, a másiké 0-ról egyesével nő.

$$(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b^1+a^{n-3}b^2+\dots+a^{n-k}b^{k-1}+\dots+a^2b^{n-3}+a^1b^{n-2}+b^{n-1})=$$

$$x^3-y^3=$$

$$x^3-1=$$

$$(x-1)(x^3+x^2+x+1)=$$

$$x^5-1=$$

$$x^6-1=$$

„In medio stat virtus”: Vagyis ha lehet a két tényező fokszáma legyen egyenlő, vagy közeli egymáshoz!

$$x^6-1=$$

$$1-x^5=$$

$$x^4-1=$$

„In medio stat virtus”

$$x^4-1=$$

$$(3x-1)(9x^2+3x+1)=$$

$$8x^3-1=$$

$$(2x-3)(4x^2+6x+9)=$$

$$(3x-2)(\quad) = 27^3 +$$

$$125x^3-8=$$

$$243x^5-32=$$

$$x^{12}-2^{12}=$$

III. A grafikus megoldás

III/1) Oldd meg grafikusan

$$2x-2=\frac{-2x+9}{3}$$

tanm_fuggvenyek_egyenletek_B_3_1.ggb

Kérdés, mely x -ekre lesz igaz az fenti egyenlet. Vagyis melyik az az x , amelyet mind a bal oldalba, mind a jobb oldalba behelyettesítve, „bedobva” ugyanazt az értéket adják.

Nézzük az összes lehetséges x -re a bal oldal miket ad, és miket ad a jobb oldal.

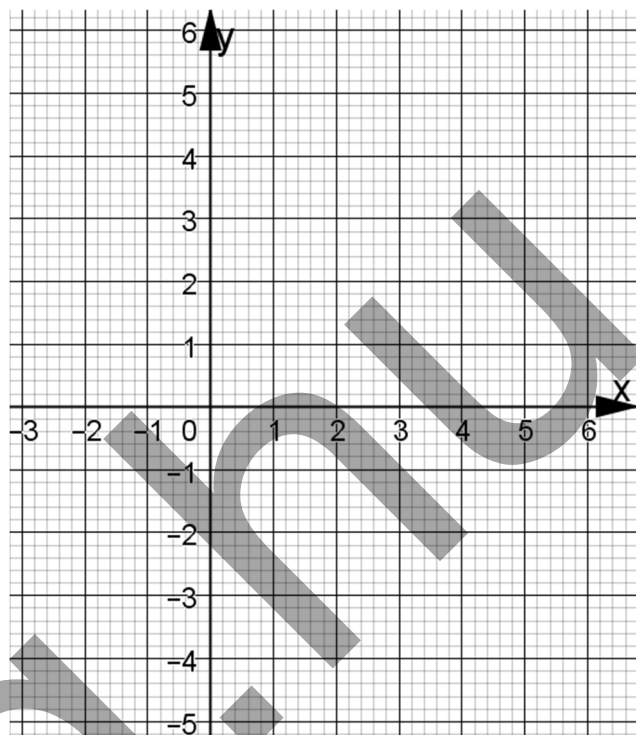
Azonban ez már azt jelenti, hogy fv-ként írjuk fel a két oldalt.

$$b(): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; y=2x-2$$

$$j(): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; y=-\frac{2}{3}x+3$$

A képről nagyjából úgy látszik: kb $x=1,8$ jó.

De biztos ez? Vissza kell helyettesíteni.



Lehet-e más megoldás?

1. ötlet:

Ha egy oldalra rendezünk: az egyik oldal lineáris, a másik konstans: $(8/3)x-5=0$

Ez az elsőfokú fv. pedig szigorúan monoton nő, vagyis csakis egy zérushely van, hiszen a zérushely előtt $\ominus$, azután $\oplus$ a fv.

2. ötlet:

Az eredeti két fv-nél a bal oldal sz.m.n., a jobb sz.m.cs.: vagyis, ha $x=3$ -ban közös értéket vettek föl, akkor az $x=3$ előtt az egyik ennél a közös értéknél (1) nagyobbat, a másik kisebbet; az $x=3$ után fordítva.

(3. ötlet: 1 fokú egyenletnek max. 1 megoldása van. Csak erre hivatkozni: egyetemen)

Tehát: **kb. $x=1,8$** az egyedüli megoldás.

III/2) Általában

- Mindkét oldalt átírni ismert fv. hozzárendelési alakba (legkényelmesebb 1 oldalra rendezni az egészet, a másik oldal pedig konstans 0.)
- ábrázolás
- leolvasás (ez esetben a ZH-et kell leolvasni)
- visszahelyettesítés
- tisztázása annak, hogy miért nem lehet több megoldás

Figyelem, nem szerencsés, ha mindkét oldal ugyanúgy monoton.

Mire jó a grafikus mo? Itt talán nem olyan fontos, de vannak egyenletek, ahol nagyon sokat segít. Itt gyakoroljuk.

III/3) Gyakorlatban

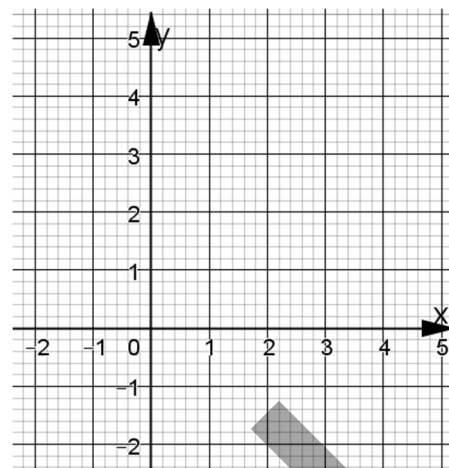
$$3-x=2x-1$$

$$bo(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y=-x+3$$

$$jo(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y=2x-1$$

Úgy látszik, hogy kb. $x=$ _____ jó.

Visszahelyettesítés:



Lehet-e más megoldás.

Nem, mert a baloldal _____, a jobboldal pedig _____

IV. Mikre jó az egyenletek

Most olyan szöveges egyenletekkel foglalkozunk, ahol egy ismeretlennel igyekszünk mindent kifejezni, és az így felállított egyenletet megoldani. Később egyszerűbb lesz egyenletrendszerekkel, ahol több ismeretlent is használhatunk.

IV/1) Néhány szöveges egyenlet

Gondoljatok egy számot, szorozzátok meg 2-vel, a szorzathoz adjátok hozzá ötvenet, a kapott számot osztátok el kettővel és a hányadosból vegyétek el a gondolt számot. Igaz-e, hogy az eredmény mindig 25 lesz?

Egy kétjegyű számban a tízesek helyén álló szám 6-tal nagyobb az egyesek helyén álló számjegynél. Ha mindkét számjegyet eggyel növelem, majd felcserélem őket, akkor az így kapott és az eredeti szám összege 121. Melyik az eredeti szám?

Egy apának, az anyának és a lányának az életkora összesen 85 év. Az apa 5 évvel idősebb, a lány pedig 25 évvel fiatalabb az anyánál. Hány évesek külön-külön?

Mekkorák az egyenlőszárú háromszög szögei, ha az alapon fekvő szög harmada 12° -kal kisebb a szárak által bezárt szögénél? (Melyik is ez a háromszög???)

Ha egy szám 15%-ához hozzáadunk $9/5$ -ödöt, akkor a szám 18%-át kapjuk. Melyik ez a szám?

60 kg 25%-os (tömegszázalék) sóoldatunk van. Hány liter (kg) tiszta vizet kell hozzáönteni, hogy 20%-os oldatot kapjunk?

A boltban 28 %-os (tömeg %) permet- és 63 %-os permetlé van. Azonban 43 %-os oldatra van szükség, mert ez az engedélyezett sűrűség, és ebből 14 kg kell. Hogyan keverje ki az eladó a szükséges oldatot?

IV/2) Kompetencia-mérések igen egyszerű példái

Egy gyógytea adagolása a következő: 1 bögre (0,25 liter) vízhez 2 kanál teafüvet kell hozzáadni. Hány kanál teafű szükséges 1 liter főzet elkészítéséhez?

Zalán vitaminkúrát tart, három különböző vitamint szed. D-vitamint 2 naponta, A-vitamint 3 naponta, E-vitamint 4 naponta vesz be. Ma reggel mindegyik vitaminból bevett egyet. Legközelebb hány nap múlva kell ismét mindhárom vitamint bevennie?

Egy presszóban a kávégépnak 2,5 literes a víztartálya. Legfeljebb hány adag presszókávé főzhető ezzel a kávégéppel egy teli tartály vízből, ha egy adag kávé elkészítéséhez 50 ml víz szükséges?

Attila és a permet

Attila permetlét szeretne készíteni gyümölcsfái permetezéséhez rovarok és gombák ellen, ehhez a permetszereket vízben kell feloldani.

A következő útmutató olvasható a két szer csomagolásán:

Gombák elleni por

Alkalmazás: 5 gramm 10 liter permetlé készítéséhez.

Tasak tartalma: 20 gramm

Rovarok elleni oldat

Alkalmazás: 30 ml 7 liter permetlé készítéséhez.

Üveg tartalma: 150 ml

Mennyit mérjen ki Attila a GOMBÁK ELLENI PORBÓL, ha 14 literes permetezőgépét szeretné megtölteni permetlével?

Attila egyszerre szeretné használni a két permetszert. A lehető legtöbb permetlét szeretné előállítani a rendelkezésre álló 20 gramm gomba elleni és a 150 ml rovar elleni permetszerből. A permetlé elkészítéséhez az útmutató alapján mindkét szerből megfelelő mennyiséget tesz egy edénybe, majd felönti vízzel. Legfeljebb hány liter permetlét tud így készíteni?

Egy városban fölmerült, hogy szobor kerüljön a város főterére, ezért szavazást írtak ki a kérdésben. (A szobor színe biztonság kedvéért szürke, és szkfanderben van – így egyik érdekcsoportot sem sért ☺)) Ahhoz, hogy a szobor elkészüljön, a szavazók legkevesebb 70%-ának kell igennel szavaznia. Legkevesebb hány igen szavazat kell ahhoz, hogy a szobor megépülhessen, ha a szavazáson 13 860 fő vett részt?

V. Ismétlés

V/1) Egyenletek

$$\frac{4x+2}{x-3} - 12 = \frac{16x-20}{6-2x}$$

$$\frac{2x+1}{3x+1} : \frac{2}{x} = \frac{x+1}{3}$$

$$6x^3 - 24x = 2x^4 - 8x^2$$

$$\frac{3x-1}{x} : \frac{5}{x} = (3x-1)(2-x)$$

$$\frac{x+1}{2-2x^2} - \frac{2x-1}{x^2-1} + \frac{6}{x+1} = \frac{1}{2x-2}$$

V/2) Egyszerűsíts

$$\frac{2x^2 - x}{3x^2 - x} =$$

$$\frac{x^2 - x - 6}{2x^2 - 7x + 3} =$$

V/3) Oldd meg

$$\frac{x+2}{x+6} : \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x} \right) = \frac{2x}{3}$$

$$\frac{6x+5}{x+5} - \frac{4x-3}{x-3} = 2$$

$$(x-1)^3 + 2 = x^3 + 3x - 2$$

$$5x - \frac{2}{10-2x} = x^2 - \frac{2}{10-2x}$$

$$\left(\frac{2x}{3} - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{5}{3} - \frac{3}{2}x\right) = \left(\frac{3x}{2} - \frac{7}{6}\right)\left(\frac{7}{8} - \frac{2}{3}x\right)$$

V/4) Egyszerűsíts

$$\frac{2x^2 + 3x - 2}{\frac{1}{x} - 2} =$$

$$\frac{x-y}{\frac{y}{x} - \frac{x}{y}} =$$

V/5) Szöveges gyakorló

Ossz fel 2:3:7 arányban
180 gombóc fagyit!

Egy háromszög szögeinek aránya: 2:3:4.
Mekkorák a szögei?

Egy tanuló iskolai kirándulásra a szüleitől pénzt kapott. Ha a kirándulás minden napján, kivéve az utolsót, 150 forintot költött volna, akkor az utolsó napra 100 forintja maradt volna. Ezért minden nap csak 100 forintot költött, és így az utolsó napra 350 forintja maradt. Hány napig tartott a kirándulás?

Egy 6750 kg-os farakásban 200 db (fenyőfa vagy tölgyfa) gerenda van. Egy fenyőfa gerenda tömege 30 kg, a tölgyfáé 45 kg. Hány fenyőfa és hány tölgyfa gerenda van a farakásban? (Melyik példára emlékeztet ez a feladat?)

Egy 8 tagú társaság egy turistaházban szállt meg. 3 nappal később egy 6 tagú társaság csatlakozott hozzájuk, és még 7 napot töltöttek együtt. Közös számlájuk 183 000 forintot tett ki. Mibe került egy fő egy napi szállása?

V/6) Százalékszámítás

a) Százalék: „Nincs százalék, csak valaminek százados törttel történő szorzása”

Mennyi 150-nek a 60%-a?

Minek a 42%-a 105?

Mit növeltem 30%-kal, hogy 156 lett?

Hús gombapörkölt közül 12 friss, 5 romlott, a maradék mérgező.

A gombapörkölteket hányad része friss? _____

egyszerűsítve: _____ százalékban: _____

A gombapörkölteket hányad része romlott? _____

egyszerűsítve: _____ százalékban: _____

A gombapörkölteket hányad része mérgező? _____

egyszerűsítve: _____ százalékban: _____

A 70 évfolyam-DVD-ből csak 13 maradt meg. Hány százalék fogyott el?

Tavaly 200 tyúkunk volt, idén 23%-kal több, azaz _____

A 180 összpontból 162-őt értél el, ami _____százalék.

b) Változás

A kisvárosi pék eredetileg 170 forintos kenyér árát 20%-kal emelte. Azonban a helyiek tiltakozása és a média miatt lecsökkentette 20%-kal. Hogy járt szegény pékünk?

Hány százalékkal növekedett meg a „Zöldhatár” nevű falu létszáma, ha egy év alatt 120-ról 170-re nőtt a lakosok száma?

Hány százalékkal csökkent a 220 Ft-os kifli ára, ha ma már csak 187 Ft?

Egy cipő ára megnőtt 43%-kal, így ma már 40 040 Ft. Mennyi lehetett tavaly?

A csirkeállomány lecsökkent 22%-kal, így csupán 9 750 van. Mennyi lehetett tavaly?

c) Gyakorlás

200-nak a 10%-a: _____ 25%-a: _____

40%-a: _____ 75%-a: _____

Mi az a szám, aminek a 25%-a 40?

És aminek a 60%-a 120?

- d) Hány százalékot számolunk, ha valaminek a...
kétötödét vesszük?

0,02-szeresét vesszük?

háromnyolcadát vesszük?

0,123-szorosát vesszük?

hat ötödét számoljuk?

0,4-szeresét vesszük?

1,12-szeresét vesszük?

V/7) Nehezebb egyenletek - 5-ösöknek

- a) $n \in \mathbf{N}$. p prím. Oldjuk meg: $n^4 + n^2 + 1 = p$. Segítség: egész számos feladatoknál az egyik legerősebb eszköz a szorzattá alakítás.
- b) $x, y, z \in \mathbf{N}$. Oldd meg: $x^2yz + xy^2z + xyz^2 = 1463$ Segítség: egész számos feladatoknál az egyik legerősebb eszköz a szorzattá alakítás.
- c) p és q pozitív prímek. $p | q^2 - 1$ és $q | p^2 - 1$. Mi a két prím? Segítség: egész számos feladatoknál az egyik legerősebb eszköz a szorzattá alakítás.
- d) $a, b \in \mathbf{N}$ $2ab + a - 4b - 32 = 0$ Vigyázz, ezt nem lehet szorzattá alakítani. Mégis, valamiféle szorzatra szükség van!
- e) Egy Milka csoki 200 Ft-ba kerül. A csomagolásában van egy kis kártya. 10 kártyáért lehet kapni egy Milka csokit, amiben persze továbbra is ott van egy kártya. Kész idegbaj. Most már aztán tényleg tudni szeretnénk, hogy valójában hány Ft-ba kerül egy tábla Milka csoki tisztán?

- f) Valaki pozitív egészeket ír egy lapra. Hány felírt szám esetén lehetünk biztosak abban, hogy kiválasztható közülük három, amelyek mind azonos számjeggyel kezdődnek.
- g) Az A és a B városból (távolságuk 20 km, egyenes út van köztük) elindul egy gyalogos és egy kerékpáros. A gyalogos 5 km/h-val, a kerékpáros 20 km/h-val halad. Induláskor egy dög légy a gyalogos orráról elindul a kerékpáros orráig 40 km/h-val, majd vissza a gyalogoshoz és így tovább. Hány km-t tesz meg szegény dög légy, míg összetalálkozik a gyalogos és a kerékpáros – és légydög lesz az orrukon.
- h) Egy körre fölrajzoltunk 2020 fehér és egy piros pontot. Az összes lehetséges sokszögek közül, melyek csúcsait ezek a pontok alkotják, melyikből van több: amelyeknek van piros csúcsa, v. amelyeknek nincs? Vagy tán egyenlő? Vagy egyik sem? Vagy ma nincs véleményed?
- i) Nyuszika 10 nyusziugrással van előrébb Vuk-tól. „Fogócskázna.” Míg Vuk 3-at ugrik, addig Nyuszika 5-öt. Vuk ugrása azonban 2-szer nagyobb, mint Nyusziaké. Hány Vugrás után lesz Nyusziakából tepsifüles (Vukvacsora)?
- j) Hány olyan 6 jegyű páros szám van, amelyben pontosan 1 db. 5-ös számjegy szerepel. És amelyben legalább egy db. 5-ös számjegy van? És amelyekben egy számjegy sincs? Na?
- k) Egy vázában 75 fehér és 150 fekete babszem van, (mellette „talonban” rengeteg fekete). Találomra kiveszünk kettőt. Ami köztük fekete, azt lerakjuk a váza mellé, a maradékot (ha van) visszatesszük. Ha mindkettő fehér: azokat messze eldobjuk és berakunk helyettük egy feketét. Hogyan változik a vázában a babszemek száma? Milyen színű lesz az utolsó babszem? Ha fehér, szeret, ha fekete, nem szeret.

Lineáris, vagy lineáris tényezőkből álló egyenlőtlenségek, nevezetes szorzatok

I. Bevezetés

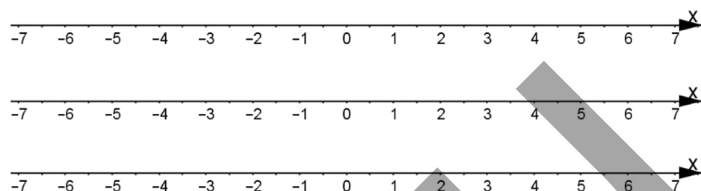
I/1) Eligazodás a számegyenesen

Jelöld be azokat a számokat a számegyenesen

a) amelyek ≤ 5

b) amelyek 3-szorosa > 6

c) Amelyek -2 -szerese ≤ 5



I/2) Az egyenlőtlenségek végeredményei – és a megoldás lépései

A végeredmények általában nyílt, zárt félig nyílt intervallumok, ritkán 1-1 konkrét szám, illetve az intervallumok és diszkrét halmazok uniói, különbségei.

Ezért itt **nincs értelme a visszahelyettesítésnek**. Legfeljebb ellenőrzésnek, amely igazából a tévedés miatt jó, az ellenőrzés csak a saját hibáink megtalálása miatt van. Az ellenőrzés nem a szokott módon megy: hanem a megtalált intervallumok szélső pontjaival, és egy-egy belső ponttal.

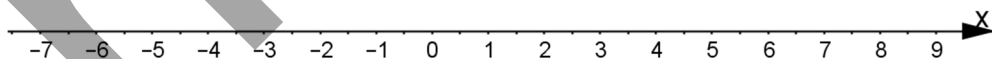
Akkor mi a megfelelője az egyenleteknél szokásos visszahelyettesítésnek? Itt végig ekvivalens átalakítást kell alkalmazni.

I/3) Az intervallumokról

Határozd meg azokat az x -eket *intervallummal*, és *jelöld számegyenesen*, és melyekre igazak a következő állítások!

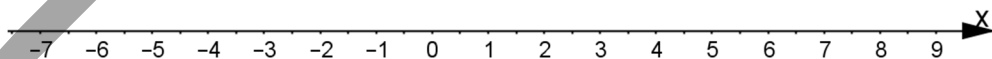
$$-3 \leq x \wedge x < 2$$

$x \in$



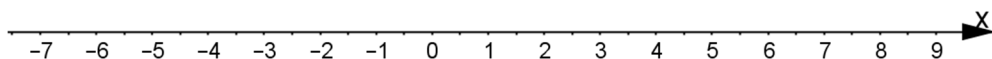
$$x \leq 4 \vee x < 2$$

$x \in$



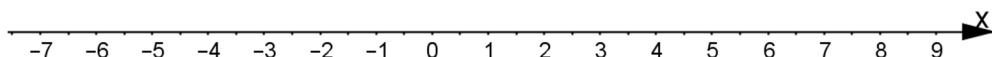
$$x \leq 7 \wedge x > -3$$

$x \in$



$$x < 1 \vee (x \geq 3 \wedge x < 7)$$

$x \in$



II. Egyenlőtlenségek kezelése

Lehetséges, „nyakló nélkül” végrehajtható átalakítások az egyenlőtlenségeknél, illetve célok (egy oldal, szorzat)

II/1) Egyenlőtlenségénél csakis ekvivalens átalakítást szabad alkalmazni

a) Alapműveletek

- **Hozzáadás, elvétel:** ha mindkét oldalhoz ugyanannyit adunk v. veszünk el, a reláció nem változik.

- Ugyanígy egy **pozitív számmal** történő **szorzás** vagy **osztás**.

Vagyis ami kisebb volt, kisebb marad, ami kisebb maradt az kisebb volt, stb.

„Mérleg elv – megmaradnak a relációk a lépés után.”

Figyelem, vegyük észre, hogy **mindkét irányt** elmondtuk:
ezek tehát: ekvivalens átalakítások!

- Negatív számmal történő szorzás, osztás – szabad, de...

Ami kisebb volt az nagyobb lett, ami nagyobb lett az kisebb volt, stb.

„Tükrözés – megfordulnak a relációk a lépés után!” (Még később lesz róla szó!!!!)

Figyelem, vegyük észre, hogy **mindkét irányt** elmondtuk:

ezek tehát: ekvivalens átalakítások!

$$x-3 < 2$$



$$x+3 \geq -5$$



$$-3x \geq 6$$



$$\frac{x}{2} + 1 \geq -3$$



$$7 - \frac{x}{5} \leq 4$$



b) Ismeretlent tartalmazó tényezővel történő osztás-szorzás: csakis, ha eljutunk oda.
(Csak amikor odaérünk, akkor robbantjuk fel a hidat ☺.)

~~Hatványozás – gyökvonás~~ = Gyeheña tűzén lassan fognak forgani... (Vagyis tilos!)

II/2) „Beszorított” – „kettős egyenlőtlenségek” kezelése

$$3 < -2x + 3 \leq 10$$

II/3) „Szépség hibák” az egyenlőtlenségek végeredményeinél

$$x > 2 \wedge x < 1 :$$

$$x \geq 3 \wedge x < 5 :$$

$$x < 7 \vee x \geq -3 :$$

II/4) Add meg a következő szorzatok előjelét

$$(5)(-4) \rightarrow$$

$$(-3)(-7) \rightarrow$$

$$(-3)(0)(-7) \rightarrow$$

$$(8)(-3)(-7)(-5) \rightarrow$$

$$(8)(-3)(-7)(-5)(-4) \rightarrow$$

$$(8)(-3)(-7)(-5)(-4)(0) \rightarrow$$

$$(8)(-3)(-7)(-5)(-4)(-2)(+6) \rightarrow$$

$$(-8)(3)(-7)(5)(-4)(-2)(+6) \rightarrow$$

$$(2)(-3)(-1)(-5)(-4)(-2)(+6) \rightarrow$$

Megállapítás: Egy szorzat...

II/5) Egy „kényelmes” magasabb fokú egyenlőtlenség

a) A kedvükné már egy oldalra van rendezve és tényezőkre bontva (szorzattá alakítva)

Lineáris fv. mikor ad $\ominus$, 0 illetve $\oplus$ értéket:

$$f(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y = -2x + 1$$

SZÍNES LEGYEN A KÉT KOORDINÁTA TENGELE

Vagyis:

$$-2x + 1 > 0 \text{ megoldása:}$$

$$-2x + 1 \leq 0 \text{ megoldása:}$$

Rajzoljuk be az előjelgrafikonját!

$$g(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y = \frac{3}{2}x + 3$$

Rajzoljuk be az előjelgrafikonját!

b) Most az előbbi kettő szorzata - előjelgrafikonnal:

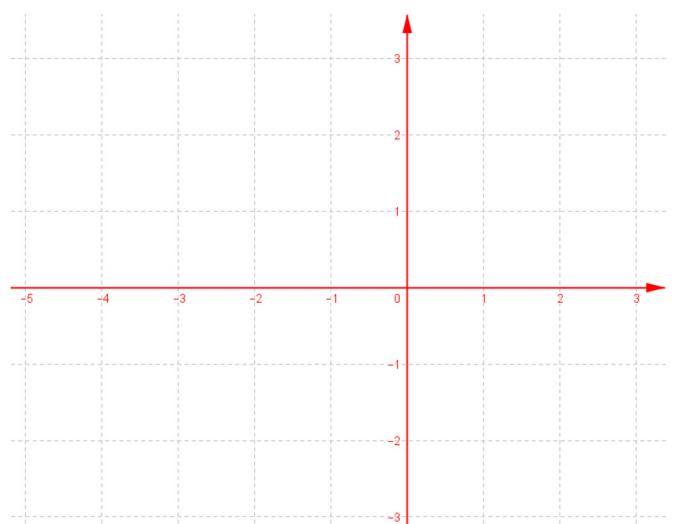
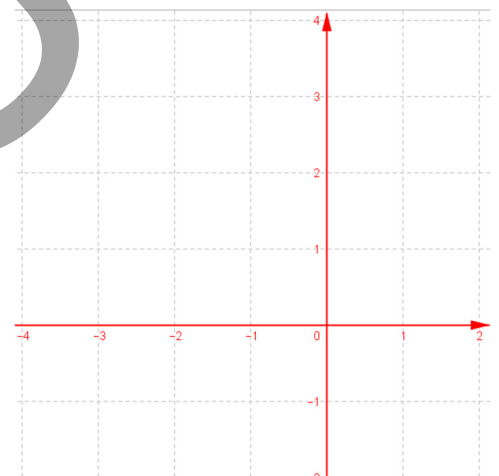
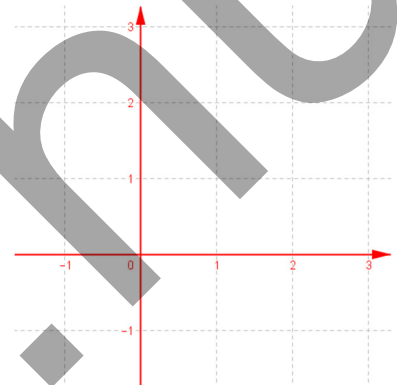
$$(-2x + 1) \left(\frac{3}{2}x + 3 \right) \leq 0$$

Figyelem:

Ez NEM GRAFIKUS MEGOLDÁS!

A ZérusHelyeket pontosan számoljuk.

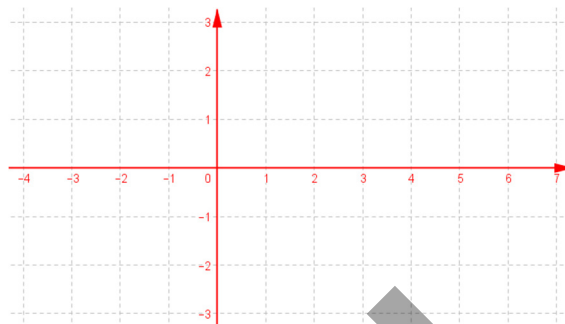
Ez ELŐJELGRAFIKON!



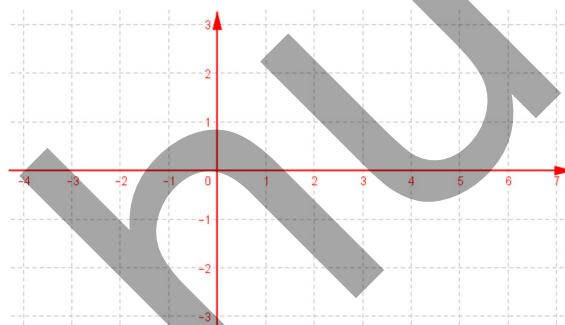
II/6) A függvény grafikonja és az előjelgrafikon
Rajzold be az előjelgrafikonokat!

a) Függvényértékek előjelgrafikonja

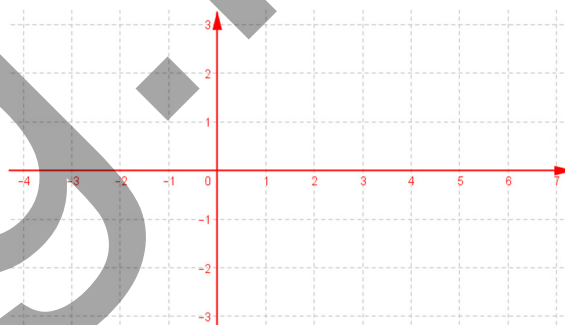
- $a(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y=3x-6$



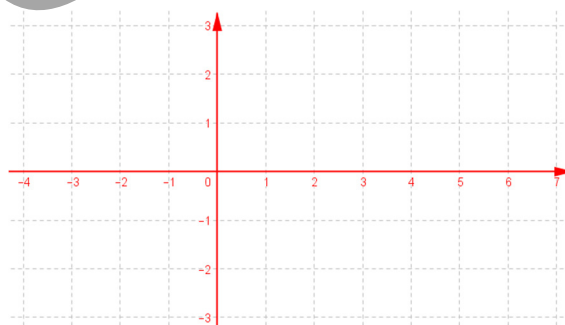
- $b(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y=-2x+2$



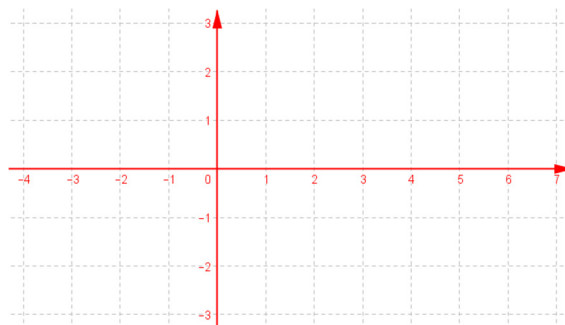
- $c(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y=\frac{1}{2}x-2$



- $d(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y=-\frac{2}{3}x-1$



- $e(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y=-1,5x$



b) Szorzatok – a tényezők előjelét figyelve:

- $x(2x-4) > 0$



$x \in$

- $(x-4)(1-x) \leq 0$



$x \in$

- $(3-x)(2x+3) < 0$



$x \in$

- $-16x^2 + 9 \geq 0 \Leftrightarrow$



$x \in$

- $2x^2 > x + 6 \Leftrightarrow$



$x \in$

III. Az egyenlőtlenségek megoldásának buktatói és gyakorlás

III/1) Negatív számmal történő osztás-szorzás: szabad, néha kell, de óvatosan!!!!

Hibásan	Jól	Magyarázat Valójában a két oldal cseréje
$-2x \geq 3 \quad /:(-2)$ $x \geq -3/2$	$-2x \geq 3 \quad / \cdot (-1)$ $2x \leq -3$ $x \leq -(3/2)$	$-2x \geq 3 \quad /-3$ $-3-2x \geq 0 \quad /+2x$ $-3 \geq 2x$ $-3/2 \geq x$

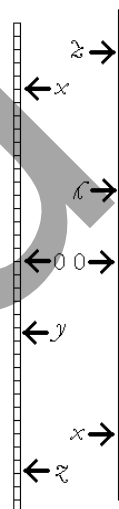
Próbáld ki a végeredményt néhány számmal...

A negatív számmal történő szorzás:
olyan, mintha mindent tükröznénk függőlegesen.

Türközünk középpontosan a 0-ra,
vagyis mintha feje tetejére állítanánk a vonalzót.

Ami lentebb volt, az fentebbre került és fordítva.

Vagyis: ha egyenlőtlenséget negatív számmal osztunk v. szorzunk, akkor a relációjel megfordul.



Gyakoroljuk!

$$-5x < -30$$

$$-3x < 0$$

$$3x-5 \geq 4x-7$$

$$(x-1)(x+1) \leq (1-x)(x+5)$$

$$(5-2x)^2 < -(3-2x)(3+2x)$$

III/2) Kockázatos megoldási menet $\leftrightarrow$ javasolt megoldási menet

Ismeretlent tartalmazó tényezővel, vagy ismeretlennel történő osztás, szorzás: nagyon veszélyes: I. II. III. részre esik szét általában – INKÁBB NE!!!

HIBÁS MEGOLDÁS:

$$\frac{3}{x-1} \leq 2 \Leftrightarrow 3 \leq 2x-2 \Leftrightarrow \frac{3}{2} \leq x-1 \Leftrightarrow \frac{5}{2} \leq x \quad (2,5 \leq x).$$

Nézzünk néhány elveszett megoldást; illetve hibás megoldást:

Elveszett az $x=-3$, vagy az $x=0,5$ Ezek pedig jó megoldások lennének.

Miért vesztek el?

Oldjuk meg újra: Először is: kikötés: $x \neq 1$ $\frac{3}{x-1} \leq 2$ Kikötés: $x \neq 1$.

1. Mo.: ESETEKRE BONTÁS – egyszer megnézzük, de nem javasolt!

I.

II.

III.

Végig ekvivalens átalakítást végeztünk!!!

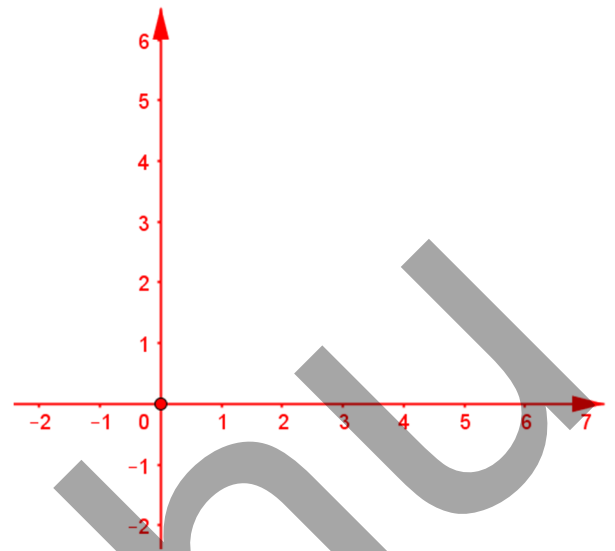
$x \in$

Vagyis egyenlőtlenséget ismeretlent tartalmazó tényezővel nyakló nélkül nem osztunk, szorzunk.

2. Mo.: ELŐJEL GRAFIKON - a javasolt megoldás

Algebrai törtes egyenlőtlenségeknél egy oldalra rendezünk, majd szorzattá alakítunk.

$$\frac{3}{x-1} \leq 2 \Leftrightarrow$$



Egy szorzat akkor csak akkor negatív, ha

.....

Előjel grafikon: (előtte a számláló és nevező fv-ét érdemes megnézni még a kezdetekben!)

Előnye: százszor egyszerűbb, nehezebb elszúrni. Csak az előjel-grafikonra legyen felírva, hogy előjel-grafikon, és csak abszcissa legyen.

Gyakorlás:

$$\frac{x}{x+2} \geq 2 \Leftrightarrow$$



$$\frac{2}{x-1} < \frac{3}{2x+6}$$

Hibásan:

Pedig a -3 és az 1 között jó! Ezek így elvesztek...

Mi is a veszély: Mintha kétszer szoroznánk föl ismeretlent tartalmazó tényezővel...

Vagyis egyenlőtlenségnél TILOS reciprokot venni.

Vagyis

Mo.: mint korábban – egy oldalra rendezünk (nullára redukálunk), majd szorzattá alkítunk

$$\frac{2}{x-1} < \frac{3}{2x+6} \Leftrightarrow 0 <$$

Előjelgrafikon:



Mo.: $x \in$

Ne feledjük azonban a fontos ötletet – *a főegyüttható itt is legyen pozitív!*

$$0 < \frac{-x-15}{2(x-1)(x+3)} \Leftrightarrow 0 > \frac{-x-15}{2(x-1)(x+3)}$$

III/4) Amit az egyenlőtlenségeknél észben kell tartani

- Csakis ekvivalens átalakításokkal dolgozunk.
- Negatív számmal történő szorzásnál megfordul a relációjel.
- Ismeretlent tartalmazó tényezővel, vagy ismeretlennel történő osztás, szorzás: nagyon veszélyes de szabad, ESETEKRE BONTÁSSAL I. II. III. részre esik szét általában. Azonban ezt – ha lehet – kerüljük!

LEGINKÁBB EGY OLDALRA rendezünk, majd SZORZATTÁ ALAKÍTUNK.

III/5) Gyakorlás – figyelem: ekvivalencia!

$$-2(x-3)-1 \leq \frac{x-1}{2} + 5 \quad \text{Nyugodtan szorozzuk 2-vel az egész egyenlőtlenséget!}$$

$$1 - \frac{4x-1}{6} < 1,5 - \frac{x-3}{3} \quad \text{Nyugodtan szorozzuk az egész egyenlőtlenséget!}$$

$$(x-1)^2 - 3 < (x+1)^2 - 4(x-1)$$

$$\frac{4x^2-25}{6x-15} \leq 3 - \frac{x^2-3x}{2x} \quad \text{Kik.:}$$

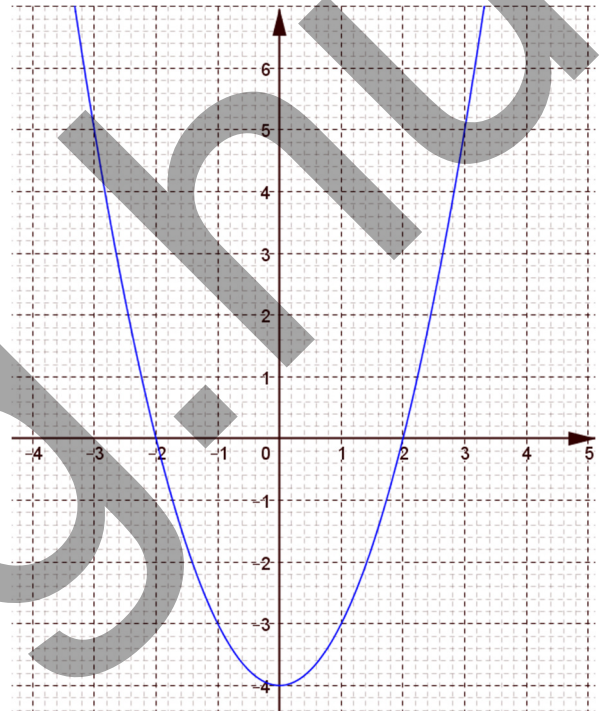
$$-4(5+x)+3 \geq 6-4x$$

IV. Egyenlőtlenségek grafikus megoldása

IV/1) Általában

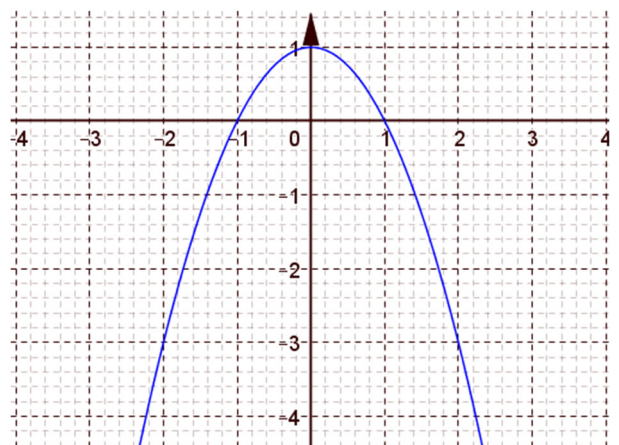
Olvasd le a koordináta-rendszerben a megoldást, és add meg a megoldás-intervallumokat!

$$x^2 - 4 \leq x + 1$$



$x \in$

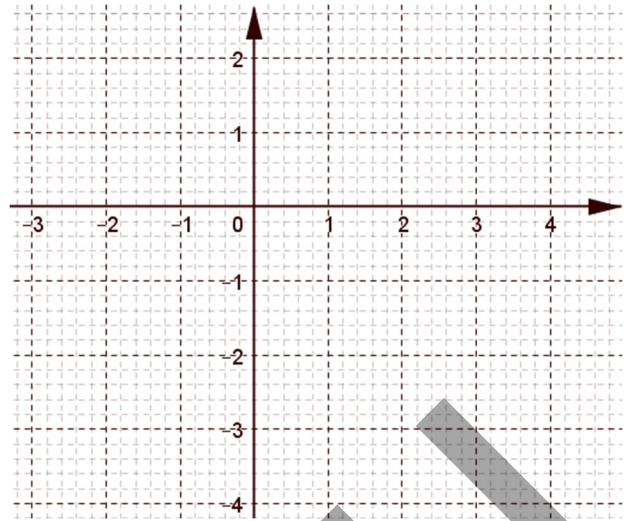
$$-x^2 + 1 < -\frac{x}{3} - 2$$



$x \in$

$x-2 \geq 2x-3$ – Grafikusan!

$x \in$



IV/2) Gyakorolása

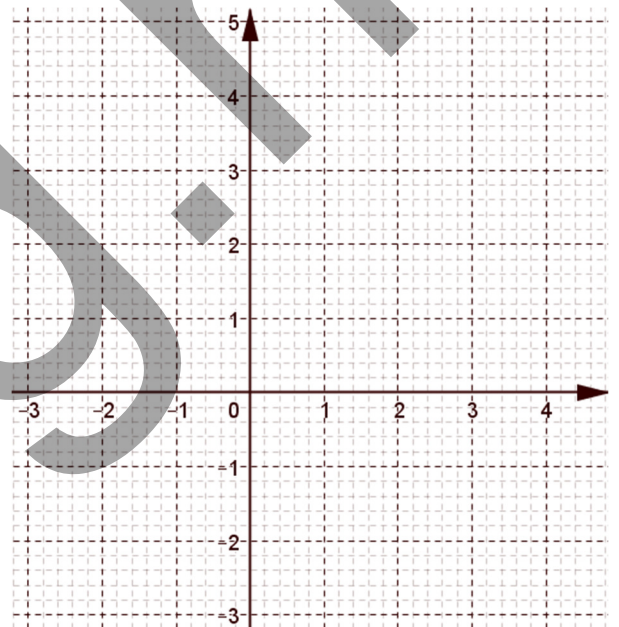
$$2x-1 \leq 3$$

$$b(): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; y=2x-1$$

$$j(): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; y=3$$

Mely x -ekre vesz fel a $b()$ fv. 3-at, vagy annál kisebb számot?

Nézzük meg a grafikonját:



A leolvasás nem elég:

meg kell nézni a metszéspontot;

meg kell mutatni, hogy több a menet miatt jó a megoldásunk.

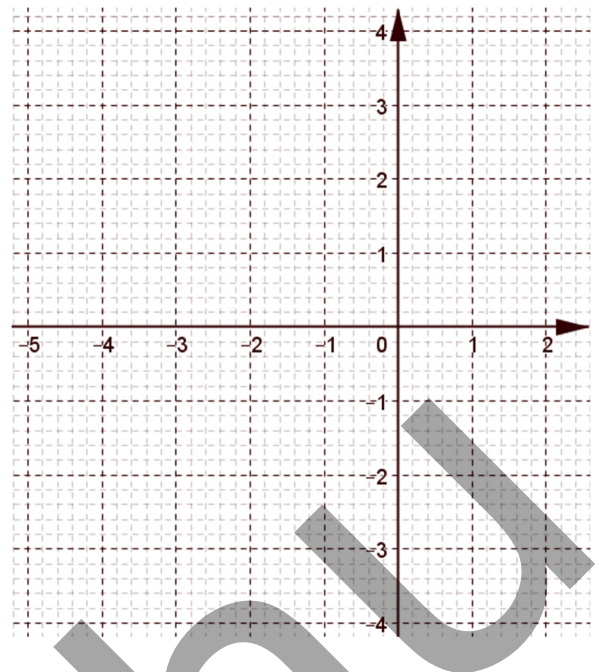
Add meg a megoldás-intervallumot!

$$-3x-4 < x+3$$

$$b(): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; y = -3x - 4$$

$$j(): b(): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; y = x + 3$$

Nézzük meg a grafikonját:



A leolvasás nem elég:

meg kell nézni a metszéspontot;

meg kell mutatni, hogy több a menet miatt jó a megoldásunk.

Add meg a megoldás-intervallumot!

$$\frac{2}{3}x + 2 \geq \frac{2}{3}x - 4$$

Ábrázoljuk.

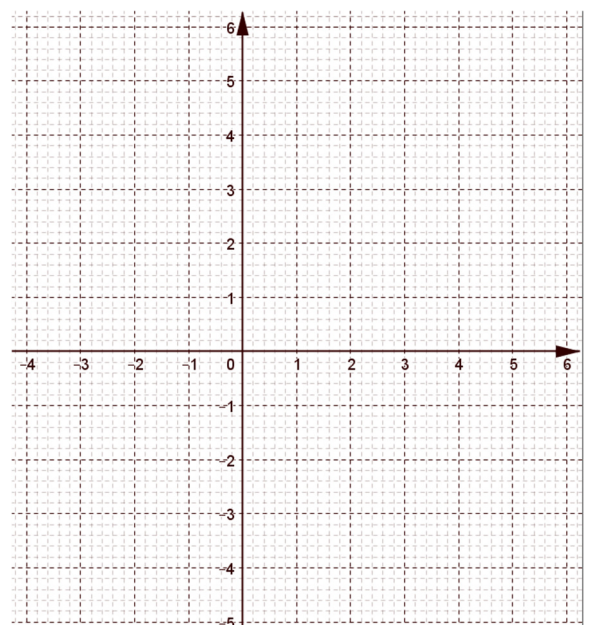
Vegyük észre, hogy:

Vagyis úgy tűnik, hogy

Mikor lesz biztos?

Ha kimondjuk:

egyenlő a két fv-nek a _____
tehát



V. Szorzatok

V/1) Alap

$$(-x^2-1)(7-2x) \cdot x \cdot (x+2) \geq 0$$

Vegyük észre, hogy néhány főegyüttható ...

Sőt:

$$\text{Így: } (-x^2-1)(7-2x)x(x+2) \geq 0 \Leftrightarrow$$

Gyakorlatilag most kezdődik a példa.

Egy szorzat akkor és csak akkor negatív

A 0-val vigyázni kell!



$x \in$

(Ne feledd az ekvivalencia jelet!)

Ha figyelmetlenek vagyunk, és $(7-2x)$ -el dolgozunk, akkor egy fokkal nehezebb az előjelgrafikon:



V/2) Másodfokú egyenlőtlenségek

Egy oldalra rendezünk (nullára redukálunk), majd szorzattá alakítunk.

Utána: előjelgrafikon! SZÍNES a tengely!

$$-2(x+2)^2 > -18$$

$$-(x-5)^2 \leq -3x+15$$

$$-x^2-x < -2$$

VI. Algebrai törtes egyenlőtlenségek

VI/1) Alapvető gondolatok

Egy tört – amely alattomban azért valójában szorzat (hiszen 8-cal osztani azt jelenti, hogy $1/8$ -cal szorzunk) – *akkor és csak akkor 0, ha a számlálója nulla; nevezője nem lehet 0!*

A törteknél is a cél: egy oldalra rendezni (0-ra redukálni az egyenletet), és tényezőkre bontani. Vagyis rendezések után egy tört van csak és a számlálója is, nevezője is egytagú, tényezőkre bontva.

Egy tört akkor és csak akkor negatív, ha páratlan tényezője (a számlálóban és nevezőben együtt) negatív – a többi pozitív.

Vagyis: a törtet tényezőkre bonjuk, és utána majdnem úgy viselkedik, mint egy szorzat, csak a nevező nem lehet 0.

VI/2) Alap egyenlőtlenségek

Oldd meg: $\frac{5-a}{2-4a} \geq 0$

Mindenekelőtt vegyük észre, és zavarjon, hogy mindkét főegyüttható negatív!

$$\frac{3}{x-1} \leq 2$$

Több-tényezős algebrai tört...

$$\frac{3-2x}{2x^2-18} < 0$$

VI/3) Egy oldalra rendezünk...

$$\frac{x+3}{2x-4} > 2$$

$$\frac{x^2+1}{x^2+2x-3} < 1$$

VI/4) Gyakorlás

$$\frac{x^2-4x+6}{3-2x} < -1$$

Hogy néz ki egyébként a számláló előjel grafikonja?

$$\frac{5}{x-1} < \frac{6}{x-5}$$

VII. Teljes köb, 4. hatvány, Pascal Δ és még két új típus:

VII/1) Hatványozás és a Pascal háromszög – figyelem: a 0. sorral kezdődik 😊.

a) Számold ki, vonj össze:

$$(a+b)^0 =$$

$$(a+b)^1 =$$

$$(a+b)^2 =$$

$$(a+b)^3 =$$

$$(a+b)^4 =$$

Utak a városban, avagy a **Pascal Δ** .

0	0	0	1	0	0	0	
	0	0	1	1	0	0	
		0	1	2	1	0	
			1	3	3	1	
			1	4	6	4	1
	1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1

b) A Pascal háromszög

$$(a+b)^0 = 1$$

$$(a+b)^1 = a+b \text{ (együtthatók: } 1 \ 1 \text{ ; a tagok fokszáma mindenhol: 1)}$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \text{ (együtthatók: } 1 \ 2 \ 1 \text{ ; a tagok fokszáma mindenhol: 2)}$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \text{ (együtthatók: } 1 \ 3 \ 3 \ 1 \text{ ; a tagok fokszáma mindenhol: 3)}$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \text{ (együtthatók: } 1 \ 4 \ 6 \ 4 \ 1 \text{ ; a tagok fokszáma: 4)}$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 \text{ (együtth.: } 1 \ 5 \ 10 \ 10 \ 5 \ 1 \text{ ; a tagok foksz.: 5)}$$

$$1$$

$$1a + 1b$$

$$1a^2 + 2ab + 1b^2$$

$$1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$$

$$1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$$

Most vizsgál meg a fenti „háromszöget”: minden sorban a számok úgy alakulnak, hogy egy szám a felette levő kettő szám összege.

Most – nem nézve a nyomtatottat – írd föl magad a Pascal háromszög első hét sorát!
(Vigyázz, a „0-adiktól” kezdődik!)

Figyelem: a „prímsorok” – nem egység - tagjait osztja a prím!

Könnyebb kiszámolni két tag összegének, különbségének hatványait:
a Pascal Δ megfelelő sorából kell nézni az együtthatókat!
Ne feledd: minden tag foka annyi, ahányadik hatványra emeltünk!

$$(a+b)^3 =$$

$$(x+1)^3 =$$

Mi van, ha két tag különbségét nézzük? Akkor az $(a+b)$ olyan, mintha $(a+(-b))$ lenne:

$$(a-b)^3 = (a+(-b))^3 =$$

$$(x-1)^3 = (x+(-1))^3 =$$

Vedd észre, hogy nagyon kényelmes, mert egyszerűn csak váltakozik az előjel...

A következőket nagyon figyelmesen!

(Egyébként a Pascal Δ -et mindig érdemes jobbra magadnak leírnod!)

$$(x+2)^4 =$$

$$(2x-3)^3 =$$

$$(5x-2)^4 =$$

c) Gyakoroljuk

$$(x-y)^4 =$$

$$(3x+2)^3 =$$

$$(2x-7)^3 =$$

$$(3x-5)^4 =$$

Kis kiugró: végezd el az alábbi műveletet:

$$(a+b+c)^2 =$$

VII/2) Szorzattá alakítások – azonos kitevőjű hatványok különbsége

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots + x^2y^{n-3} + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

a) Végezd el a műveletet, majd vond le a következményt...

$$(x-y)(x+y) =$$

$$(x-y)(x^2+xy+y^2) =$$

$$\text{Vagyis: } x^3 - y^3 =$$

$$(x-y)(x^3+x^2y+xy^2+y^3) =$$

$$\text{Vagyis: } x^4 - y^4 =$$

$$x^5 - y^5 =$$

Mutasd is meg:

$$x^6 - y^6 =$$

Mutasd is meg:

VEDD ÉSZRE A KÖVETKEZŐKET:

Mindenhol $(x-y)$ -t emelünk ki. A második tényező minden tagja eggyel kisebb fokú, mint az eredeti szorzattá alakítandó alak, vagyis tagonként a fokszám állandó. Végül pedig tagonként az első tényező fokszáma egyesével csökken, a másodiké egyesével nő.

b) Gyakorlása

$$x^3-1=$$

$$x^3-27=$$

$$x^4-16=$$

DE figyelem: „In medio stat virtus”

$$x^5-32=$$

$$27x^3-125=$$

$$x^4-625=$$

DE figyelem: „In medio stat virtus”

Általában:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$x^5-243=$$

$$x^3-27=$$

$$32x^5-1=$$

$$64x^6-729=$$

„In medio stat virtus”...

VII/3) Szorzattá alakítások – azonos, pártalan kitevőjű hatványok összege

$$a^{2k+1} + b^{2k+1} = (a+b)(a^{2k} - a^{2k-1}b + a^{2k-2}b^2 + \dots + a^2b^{2k-3} - ab^{2k-2} + b^{2k-1})$$

Pártalan kitevősek összege: **váltakozó előjel a második tényező tagjai között!**

Figyelem, csak pártalan fokszámmal működik. x^4+y^4 nem alakítható így szorzattá!

Figyelem: $x^3+y^3 \neq (x+y)^3$.

$$(x+y)(x^2-xy+y^2)=$$

$$\text{Vagyis: } x^3+y^3 =$$

$$(x+1)(x^2-x+1) =$$

$$\text{Vagyis: } x^3+1=$$

$$(x+2)(x^4-2x^3+2^2 \cdot x^2-2^3 \cdot x+2^4)=$$

$$\text{Vagyis: } x^5+32=$$

$$x^4+y^4 \text{ nincs szokásos}$$

$$x^6-y^6=$$

$$x^5+1=$$

$$2x^3+54=$$

$$2^{30}-1=$$

Próbáld meg szorzattá alakítani:

$$x^4+4=$$

$$x^4+x^2+1=$$

VIII. Alapvető hibák egyenlőtlenség megoldásnál

Néhány ugyanaz, mint az egyenleteknél

- Rosszul írjuk le a példát...
- Kimarad a kikötés (VH nem kell...)
- Eltűnő előjelek és átalakuló betűk, számok
- Ha egyenletet szorzunk, akkor elfelejtjük minkét oldal minden tagját beszorozni
- Törtet úgy szorzunk meg - hibásan, hogy nemcsak a nevezőt tüntetjük el, de a számlálót is megszorozzuk!

$$\text{Pl. } \frac{x-3}{2} - \frac{3x-1}{2} = \frac{5x}{2} \quad / \cdot 2$$

$$2(x-3) - (3x-1) = 5x$$

Az egyenleteken kívül még, ahol az egyenlőtlenségeket elronthatjuk:

- negatív számmal szorzásnál nem figyelünk
- könnyedén szorzunk ismeretlent tartalmazó tényezővel – pedig tilos!!!
- reciprokot veszünk...
- Elfelejtjük az ekvivalenciát
- Elfelejtjük felírni a végeredményt. pl.: $\Leftrightarrow x \in [-5; 3,4[$

Lineáris egyenletrendszerek és szöveges típusfeladatok

I. Bevezetés

I/1) 2 változó, 2 független összefüggés

tanm_fuggvenyek_egyenletek_D_1_1 téglalap két összefüggés.ggb

Mekkora annak a téglalapnak a területe, amelynek a kerülete 34 cm, és az egyik oldala 3 cm-rel nagyobb, mint a másik.

Mo.: Két oldal van, tehát két ismeretlent vezetünk be: x és y

Először a kerület összefüggését vizsgáljuk

$$x+y=$$

Fejezzük ki az x függvényében y -t: $y=$

$$f(\cdot): \quad ; \quad [\rightarrow \mathbf{R}; y=$$

Ábrázoljuk, és olvassunk le megoldás lehetőségeket.

Másik összefüggés: az egyik oldal 3 cm-rel nagyobb:

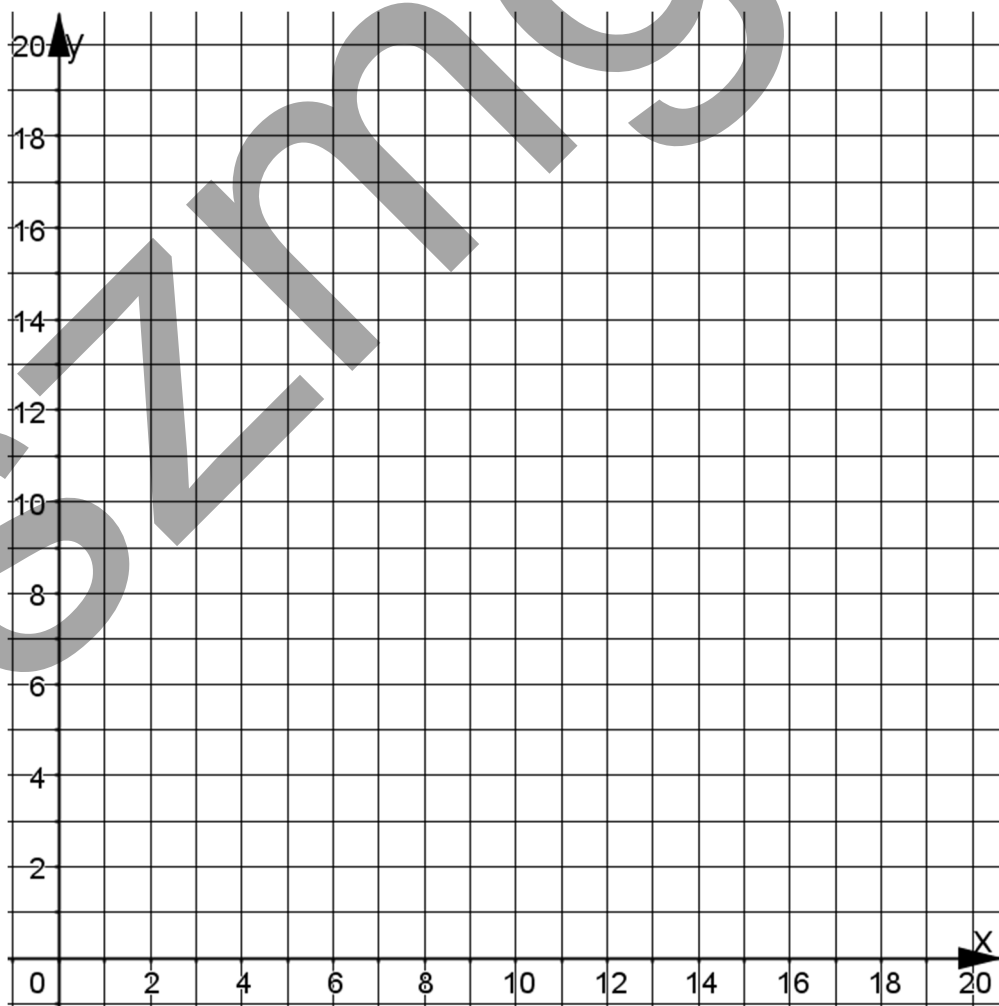
$$x-y=$$

Fejezzük ki az x függvényében y -t: $y=$

$$g(\cdot): \quad ; \quad [\rightarrow \mathbf{R}; y=$$

Melyik az a pont, amely $(x;y)$ koordinátái mindkettő összefüggésnek eleget tesznek?

Leolvasható, és ELLENŐRIZENDŐ: $(x;y)=(\quad ; \quad)$



De ezt akár ábra nélkül is megoldhattuk volna:

$$x+y=17$$

$$x-\underline{y}=3$$

Az első egyenlet úgy rendezem, hogy:

$$y=\quad\quad\quad\text{VAGYIS: KIFEJEZTEM } y\text{-T AZ } x\text{-BŐL.}$$

Majd a második összefüggésbe **BEHELYETTESÍTEM** az **y-t**:

A grafikus ábrázolás: *Láthatjuk, hogy egy összefüggés esetében végtelen sok megoldáspárt kaphatunk!*

I/2) Definíció

Az

$$a_{1,1}x + a_{1,2}y = a_{1,3}$$

$$\underline{a_{2,1}x + a_{2,2}y = a_{2,3}}$$

$$5x - 3y = 7$$

$$\underline{8x + y = 17}$$

alakú egyenletpárt, ahol $a_{i,j} \in \mathbb{R}$, kétismeretlenes lineáris egyenletrendszernek nevezzük.

Rendezd a következő egyenletrendszereket a fenti alakra, majd oldd meg!
Szépen nézzen ki, egymás alatt minden, pontosan

$$4-3y+5y = 6x+9-2x+3y$$

$$\underline{7=3x-4y+11}$$

$$5x=6y$$

$$\underline{3y-4=6+2x}$$

II. Lineáris egyenletrendszerek megoldási módszerei

II/1) Grafikus megoldásuk

$$2x - y = 3$$

$$x - 14 = -2y$$

Az egyik ismeretlen fv-ében felírjuk a másikat.

Az első egyenletnél y -t kifejezve x -ből: $y =$

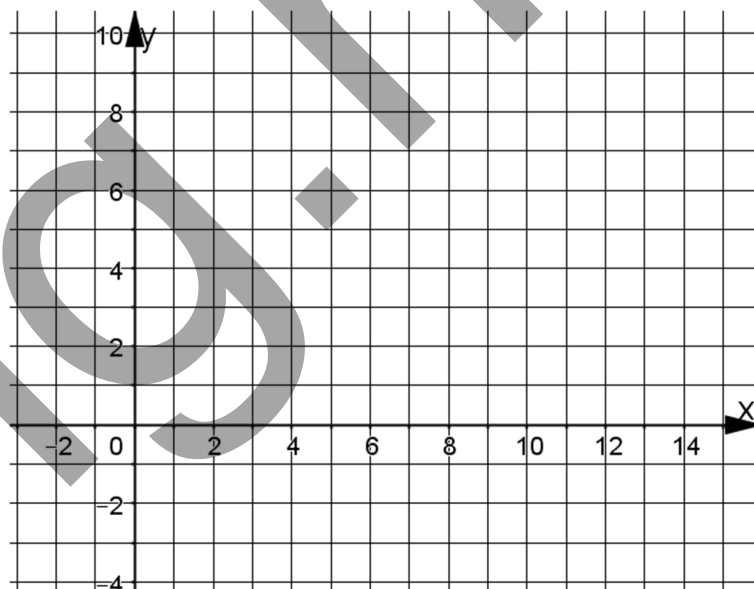
Ha pl.:

$x=5$, akkor mennyi az y ? $y =$

$x=1$, akkor mennyi az y ? $y =$

$$y = f(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; y =$$

Az $f(x)$ fv. $P(x;y)$ pontjainak koordinátáit így is írhatjuk: $P(x; \quad)$. Vagyis látható, hogy: **Azon és csak azon pontok vannak az $f(x)$ fv. grafikonján, melyek pontjainak x, y koordinátái megoldásai az egyenletnek.**



A 2. egyenletből:

$$y =$$

$$g(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; y =$$

Közös koordináta-rendszerben ábrázolva:

Az $f(x)$ grafikonjának $(x;y)$ koordinátájú pontjai az első, a $g(x)$ grafikonjának $(x;y)$ koordinátájú pontjai a második egyenletnek a megoldásai.

Melyik az a pont, melynek koordinátái kielégítik mindkét összefüggést?

Nyilván leolvasható: $(x;y) = (\quad ; \quad)$ Vagyis $x = \quad y =$

Természetesen itt is kell a **Visszahelyettesítés**, illetve annak megmutatása, hogy több megoldás nem létezik:

$$c) \left\{ \begin{array}{l} \frac{a-3}{3} - 2\left(\frac{a-b}{3}\right) = a-2 \\ \frac{a+b}{2} - \frac{b}{6} = \frac{4a-2b}{8} \end{array} \right\}$$

Mo.: $a=3/4$ $b=0$ VH!

$$d) \left\{ \begin{array}{l} \frac{x+2}{3} - 3 = \frac{y-5}{4} \\ \frac{x-1}{3} + \frac{y+2}{2} = 1 \end{array} \right\}$$

Mo.: $x=5/2$ $y=-1$

II/3) Két „anomália”

Összefüggő egyenletek:

$$y = 3,5 - x$$

$$\text{első() : } \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; y =$$

$$\underline{2x + 2y = 7}$$

$$\text{második() : } \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; y =$$

Vegyük észre, hogy a két fv- ugyanaz, és a két grafikon fedi egymást:

Mit jelent ez? Azt, hogy: A két egyenlet „egymás következménye”, vagyis ekvivalensek egymással, más szóval *a két egyenlet nem független*.

„Nem mond újat az egyikhez képest a másik.”

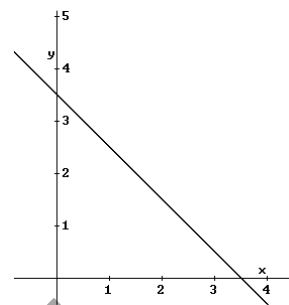
$y = 3,5 - x \Leftrightarrow 2x + 2y = 7$, hisz csak egy kétszeres szorzó van közöttük.

Ilyenkor azt mondjuk, hogy végtelen sok $(x; y)$ pár megoldás van: $(x; 3,5 - x)$.

Behelyettesítéssel:

$$y = 3,5 - x$$

$$\underline{2x + 2y = 7}$$



Azonosság, vagyis összefüggő egyenletek

Vagyis az az $(x; y)$ pár, amely igazá teszi az első egyenletet, igazá teszi a másodikat is.

Így a megoldás: $y = 3,5 - x$.

Olyan, mintha azt mondtam volna, hogy „Gondoltam két számra. Az összegük tíz; A duplájuk összege 20.”

A második állítással gyakorlatilag ugyanazt mondtam, mint az elsővel.

Ellentmondó egyenletek

$$2a + 3b = 7$$

$$\text{első() : } \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; b = -2a/3 + 7/3$$

$$\underline{4a + 6b = 15}$$

$$\text{második() : } \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; b = -2a/3 + 5/2$$

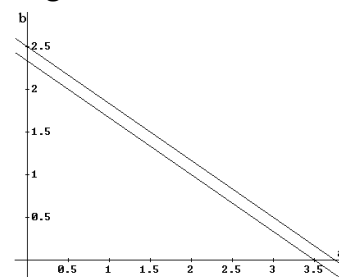
Látható, hogy nincs olyan $(a; b)$ pontpár, amely mindkét egyenletet igazá tenné.

Ezt hívjuk ellentmondó egyenletrendszernek.

Ha behelyettesítéssel próbáljuk megoldani az egyenletrendszert:

1. $2a + 3b = 7$

2. $\underline{4a + 6b = 15}$



Szabályos lépésekkel ellentmondáshoz jutottunk, tehát $\nexists$ olyan $(a; b)$ számpár, amely egyszerre kielégítené a két egyenletet.

Olyan, mintha azt mondtam volna, hogy „Gondoltam két számra. Az összegük tíz; A duplájuk összege 30.”

A második állítással „agyonütöttem az első”, mert a duplájuk összege biztos hogy 20.

II/4) Algebrai módszerek 2 – az egyenlő együtthatók módszere

Figyelem: nagyon el lehet számolni az egyenlőtlenségeket.

$$5x + 4y = -19 \quad x = -2; y = -9/4$$

$$\underline{3x - 4y = 3}$$

$$6x + 5y = -3$$

$$\underline{4x - 3y = 17}$$

Az első egyenletet megszorozom-el, a másodikat :
akkor a két egyenletben az **x-ek együtthatója ugyanannyi lesz**:
(A és a LKKT-e a)

FIGYELEM: tartsuk a formát: x-ek, y-ok, konstansok egymás alatt!

$$-6x - 3y - 3 = 0$$

$$\underline{15x - 4y = 27}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x+3}{2} - \frac{y-2}{3} = 2 \\ \frac{x-1}{4} - \frac{y+1}{3} = 4 \end{array} \right\}$$

$$x=-19; y=-28$$

$$\begin{aligned} (x-7)(2y-4) &= 2(x+8)(y-11) \\ \underline{(3x-1)(y+1) &= (x-3)(3y-5)} \end{aligned}$$

$$x=-3, y=5$$

$$\begin{aligned} (4x-3)(y+6) &= 2(x+1)(2y+5) \\ \underline{(7-x)(6y+11) &= (-2x-1)(3y+8)} \end{aligned}$$

$$x=1; y=2$$

A jobbakkak: Oldd meg az egészek halmazán! $9x^2=1085+4y^2$

II/5) A módosított Gauss-féle elimináció

Az egyenlő együtthatók módszerének továbbvitele 3 ismeretlenes egyenletrendszerénél

- *Egy oldalra* az ismeretlenek, *abc* sorrendben, másik oldalon a konstans.
- *Nagyon szépen, táblázatszerűn nézzen ki!*
- Az egyik egyenlet egyik ismeretlenével a másik kettőből „kiejtjük” azt. Így kapunk egy kétismeretlenes egyenletrendszert.
- (ha már jobban megy, lehet ötletelni)

a) „Forma dat esse rei” – (A forma adja a dolog lényegét - avagy ha nem tartod a rendet, elveszel!)

$$\left. \begin{array}{l} 3y + 2x = z - 1 \\ z - 3x = 2y + 6 \\ 2y + x = 3z - 2 \end{array} \right\} \quad x = -3; y = 2; z = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 2y = -z - 5 \\ z + 2y = 2x + 10 \\ 2x - 4y = z - 9 \end{array} \right\} \quad x = -3; y = 5; z = -1/2$$

II/6) Új ismeretlen bevezetése

$$\left. \begin{aligned} \frac{2}{x-y} + \frac{6}{x+y} &= 1,1 \\ \frac{4}{x-y} - \frac{9}{x+y} &= 0,1 \end{aligned} \right\}$$

KIKÖTÉS:

$$(x=7; y=3)$$

$$\left. \begin{aligned} x - \frac{1}{y} &= -\frac{1}{6} \\ 3x - \frac{5}{y} &= -\frac{3}{2} \end{aligned} \right\}$$

KIKÖTÉS:

$$(x=1/3; y=2)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{2}{x+4} + \frac{3}{1-y} &= \frac{5}{2} \\ \frac{5}{x+4} - \frac{5}{4} &= \frac{5}{2y-2} \end{aligned} \right\}$$

KIKÖTÉS:

$$(x=-8; y=0)$$

III. Példák az lineáris egyenletrendszerek használatához

III/1) Szöveges feladatok átírása többismeretlenes egyenletrendszerre

- a) Egy háromjegyű szám első és harmadik jegyének összege 8. A második számjegye az elsőnél egy 1-gyel nagyobb. Ha felcseréljük az első és a harmadik számjegyet, akkor 594-el nagyobb számot kapunk, mint az eredeti. Mi az eredeti szám?
- b) Péter, János és András éveinek száma együtt 28 év. Péter és János együttes életkora András életkorának 10-szerese plusz 6 év. Péter annival idősebb Jánosnál, amennyi épp András. Hány évesek?
- c) Két pozitív szám úgy aránylik egymáshoz, mint 4:3-hoz. A nagyobbik kétszerese 5-tel kisebb a kisebbik 3-szorosánál. Melyik ez a két szám?
- d) Egy érdekes megoldási módszer: az figyelés.
 $(2x-3y+5)^2 + |x-2-y| = 0$

IV. Egyéb szöveges egyenletek

Cél: „átkódolni” egyismeretlenes, v. két- ill. **többismeretlenes** egyenletté/egyenletrendszeré IV/1) Egyszerűbb - csak „átkódolandó” szöveges feladatok

a) Egy farmon tyúkok és disznók élnek. 61 fejük van és 176 lábuk. Melyikből mennyi van?

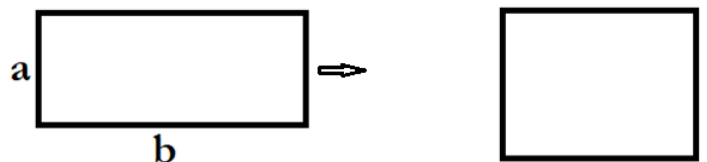
b) Két egész szám aránya 2:3. Ha az összegükből elveszünk 5-öt, 65-öt kapunk. Mi a két szám?

c) Ha egy kétjegyű szám számjegyeit felcseréljük, akkor az eredetinel 36-tal kisebb számot kapunk. Az eredeti szám első jegye kétszerese a második jegynek. Mi ez a szám?

Az első nehézség: felírni az első feltételt:

A második nehézség: az első feltételt átírni egyenletté!

d) Egy téglalap egyik oldalát 25%-kal megnöveltük. Hány százalékkal kell csökkenteni a szomszédos oldalt, hogy a terület ne változzék?



- e) 6 osztályosba felvételi: 2015. január 17: Aladár egy tábla csokit szeretne venni, de ehhez 60 Ft-ját hiányzik. Bélának ugyanehhez a csokihoz 45 forintja hiányzik. Együtt annyi pénzük van, hogy vehetnek egy ilyen tábla csokit, és még marad 10 Ft-juk. Hány forintja van Aladárnak?
- f) Három szám összege 100. Ha az elsőt elosztjuk a másodikkal: a hányados 5, a maradék 1. Ha a harmadikat osztjuk az elsővel: a hányados és a maradék ugyanaz, mint az előbb. Melyik ez a három szám?

IV/2) Százalékos és keveréses feladatok

Alap: Nincs százalék, csak valaminek százados törttel történő szorzása.

- a) Hány százalékkal nőtt, ami 30 kg-ról 41 kg. lett?
- b) Mi a jobb: édesapámnak felemelik először 20%-kal a fizetését, majd a következő hónapban még 20%-kal, vagy hogy rögtön 40%-kal emelik.

- c) Egy bolt egy cipő árát először 40%-kal, majd a kialakult árat még 20%-kal csökkentette. Hány százalékkal csökkent az eredeti ár?
- d) Egy arany-ezüst ötvözetben 30 % arany van (tömegszázalék). Ha még 10 g ezüstöt adunk hozzá, 25 %-os lesz az arany aránya. Hány gramm arany és ezüst volt kezdetben az ötvözetben?
- e) Van valamennyi kg 25 %-os oldatom (tömegszázalék). Hozzáöntök 10 kg 50 %-os oldatot, és 40%-osat kapok. Hány kg volt az eredeti oldat?
- f) Hány kg 20 %-os (tömegszázalék) sóoldathoz hány kg 5%-os sóoldatot kell összeönteni, hogy 20 kg 10 %-os oldatot kapjunk?
Mo.: Egyenletrendszerrel - x kg 20% és y kg 5%-os.

IV/3) „Együttes-munkavégzés” feladatok - **kötelező a megoldási forma tartása**

- a) Egy csoport 8 óra alatt végez el egy bizonyos munkát. A másik 12 óra alatt. Az gyorsabb csapat elkezd a munkát, és egy óra múlva csatlakozik a lassabb. Összesen mennyi idő végzik el a munkát?

- b) Egy kád az egyik csapból 30 perc alatt telik meg, a másiból 25 perc alatt. Először kinyitjuk az első csapot, majd rá 5 perccel megengedjük a másikat is. Összesen hány perc alatt telik meg a kád?

Kötelező a forma tartása!

- c) Apa 1,5 óra alatt 30 maszkot készít, a felesége 2 óra alatt 30-at. Hány óra alatt készítenek 105 maszkot?

Kötelező a forma tartása!

- d) Apa vakcinát gyárt sutyiban. A munkát 12 óra alatt végzi el egyedül. A fiával együtt 10 óra alatt végeztek. Mennyi idő kell a fiának ahhoz, hogy egyedül elvégezze a munkát?

Kötelező a forma tartása!

- e) Egy medence az egyik csapból 4 óra alatt telik meg, a másíkból 6 óra alatt. A kifolyón 8 óra alatt lehet teljesen leengedni. Ha megnyitjuk az első csapot, és csak két óra múlva a másikat, de akkor azt is észre vesszük, hogy a lefolyó nyitva maradt, ezért azt elzárjuk, akkor összesen hány óra alatt telik meg a medence?

Kötelező a forma tartása!

IV/4) Sebesség, utazás

- a) Egy kerékpáros 20 km/óra sebességgel haladt 1 órán keresztül, majd megállt 2 óra pihenőre, és még 2 órán keresztül 30 km/óra sebességgel haladt. Mekkora az útra vonatkoztatott átlagsebessége?

- b) Egy kocsí vidékre megy. A városban 30 percig araszol kifelé 12 km-t. Utána a pályán 170 km/h-val száguld 42 km-t, majd 70 km-t tesz meg 1 óra alatt. Mekkora az átlagsebessége.

Szokásos hiba: sebességek számtani közepe: $\frac{24+170+70}{3} \approx 88$ 😞

- c) Két város távolsága 30 km. Egy kerékpáros megállás nélkül teszi meg oda-vissza az utat. 20 km/óra sebességgel halad odafelé, visszafelé pedig 30 km/óra sebességgel jön. Mekkora az útra vonatkoztatott átlagsebessége?

- d) A 2 km/óra sebességű folyón két hajóállomás távolsága 12 km. A hajó sebessége 10 km/óra – állóvízhez viszonyítva. Mekkora az útra vonatkoztatott átlagsebessége, ha megállás nélkül teszi meg oda-vissza az utat a két kikötő között?

e) A 6 km/óra sebességű folyón két hajóállomás távolsága 12 km. A hajó sebessége 15 km/óra (állóvízhez viszonyítva). Mekkora az útra vonatkoztatott átlagsebessége, ha megállás nélkül teszi meg oda-vissza az utat a két kikötő között?

f) Egy folyón állandó sebességgel halad egy motorcsónak. Felmegy 20 km-t majd rögtön visszafordul. Összesen 3 óra alatt teszi meg az oda-vissza utat. Ezek után 10 km-t megy lefelé és csak 5-öt jön visszafelé: erre 1 óra kellett. Mekkora a csónak és a víz sebessége?

- g) Egy folyó 4 km/h -val folyik. A csónak 6 km/h -val halad a vízhez képest. Kiesik egy labda, de csak 2 óra múlva veszik észre. Rögtön visszafordulnak. A visszafordulástól kezdve mennyi idő alatt érik el a labdát?

- h) Egy róka 50 m -ről meglát egy nyulat. Elkezdi üldözni. A róka másodpercenként 4-et ugrik, ugrásainak hossza $0,8 \text{ m}$. A nyúl másodpercenként 6-ot ugrik, de csak félmétereseket. Utoléri-e, és ha igen, mikor éri utol a róka a nyulat.

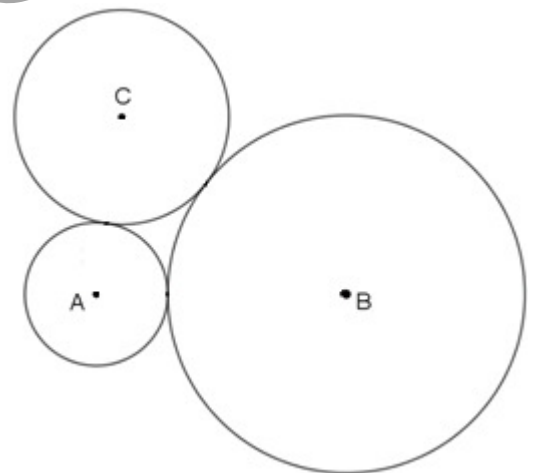
IV/5) Egyéb

- a) Lineáris függvény megadása a grafikonjának két pontjából

Adott egy lineáris fv. grafikonjának 2 pontja: $A(-1;2)$ és $B(2;-3)$. Írd föl a fv-t és jellemezd!

1. Mo.: meredekséggel
2. Mo.: egyenletrendszerrel

- b) Adott egy 5; 7 és 8 cm oldalú $\triangle$. A csúcsok mint kp. körül három, páronként egymást érintő kört rajzolunk. Mekkora a körök sugarai?



Paraméteres egyenletek „avagy a képlet-gyártás”

I. A képletet gyártunk – hogy a másinak ne kelljen egyenleteket megoldani...

I/1) Képletek a természettudományban

Fizika: Út – gyorsulás -idő $s = \frac{a \cdot t^2}{2}$

Kémia: M (moláris tömeg), n (anyagmennyiség), m= tömeg. Ekkor: $m=n \cdot M$

Biológia: Populáció egyedszáma N. Az AA genotípusú egyedek száma D; a heterozigótáké

(Aa) H; az aa genotípusúaké R. az „a” allél gyakorisága: $\frac{2R+H}{2N}$

A képleteket „le kell gyártani” valakinek, hogy más csak a mérési adatokat behelyettesítve megkapja a kívánt kimutatást, eredményt.

I/2) Permet keverés – avagy egy mezőgazdasági bolt kihívásai – színdarabban.

Alapállás: Hatóságilag a permetlé megengedett tömegszázaléka: 12%.

Vagyis pl. 100 kg permetből: 12 kg a vegyszer.

Vagy mondjuk 250 kg-ból:

Igenám, de a boltban csak 40%-os oldatot tartanak.

Főszereplő az eladó lány, Juli.

a) Piroska néni jön a boltba, és kér **75 kg** permetet (nyilván 12%-osat).

Hogyan keverje ki Juli a permetet?

Julika tanácsalan. Julika hívja a barátját, Sanyit, aki felállít egy egyenletet, megoldja – és a végén elmondja, hogy Juli mennyi vegyszert mérjen ki és mennyi vizet.

De alig lép ki Piroska néni a bolt ajtaján, betoppan Marika néni, és neki **45 kg** permet kell. Julikát kiveri a víz, nem tudja kikeverni a vegyszert, kirúgják az állásából, mehet kapálni. Julika újra hívja a barátját, aki felállít egy egyenletet, és megoldja, és közli az eredményt: mennyi vegyszer és mennyi víz kell.

- b) De az agrárium előre megy, nem másfelé, így falusiak csak jönnek és jönnek, hogy vegyék a permetet. Juli pedig sajnos nem matematikus. Juli barátja pedig nem ér rá mindig.

Vagyis kell egy képlet, hogyha mondjuk jön Jóska bácsi, és p kg tömegű permetet akar, akkor **mennyi vegyszert és vizet keverjen** be Juli.

Julikának kell egy képlet, amelyik megmondja, hogy a kívánt p kg. tömegű permet „függvényében”, mennyi 40%-os oldatot keverjen be, és aztán mennyi vizet rakjon hozzá.

Julika szomorú. Sanyi nem ért ehhez. Segítsünk rajta ☺.

Gyártsunk Julikának egy képletet.

- c) De az élet bonyolódik: *bármilyen töménységű oldatot* kérhet ezentúl a vevő, és persze bármennyit: Ez már végképp meghaladja Julika kompetenciáját. És a barátját is, Sanyiét. Így az üzletvezetőnek matekoznia kell... (Matekozz, hogy üzletvezető lehess...)
- Mivel nem tudjuk előre, hogy hány kg és milyen töménységűt rendelnek. Legyen p kg, és q %-os az oldat, melyet Julinak ki kell kevernie a 40%-os oldatból.

I/3) Lineáris függvény inverze

Valójában egy lineáris fv. inverze is: képlet az ősképhez

I/4) A paraméteres egyenletek megoldásakor kitűzött cél

Cél „a paraméter függvényében kifejezni az ismeretlent”.

Vagyis: $x=$ és a jobb oldalon csak paraméter van és valós szám. pl: $x=3p^3-14p+2$

Hiszen a „képlet” attól képlet, hogy csak a „számológépet kell nyomogatni” ☺.

a) $2x+a=4$ $a=\text{param.}$

„Cél: a paraméter függvényében kifejezni az ismeretlent.”

Vagyis mindig meg tudjuk mondani az ismert műveletek használatával – mint valami képletből kiszámolva –, hogy mennyi az x .

b) $ax=b-3x$ a,b paraméterek

c) $bx+3=4b+2$ $b=\text{param.}$

II. A paraméteres egyenletek általában

II/1) A paraméteres egyenletek megoldásának alapelve:

CÉL a paraméteres egyenleteknél
a paraméter(ek) függvényében kell kifejezni az ismeretlent.

Ezért úgy kell rendezni az egyenletet, hogy
végül az egyik oldalon csak az ismeretlen álljon, a másik oldalon
egy – a paraméter(ek)e)t tartalmazó – kifejezés, de az ismeretlen már semmiképp.
Vagyis „Képletet kapjunk az ismeretlen könnyű kiszámításához”.

Az egyenlet megoldása után kigyűjtöm egy táblázatba, hogy a paraméter(ek) mely értékeire értelmetlen a kifejezés, mely értékeire $\nexists$ megoldás, és mely értékekre létezik, és akkor azok függvényében mennyi az ismeretlen. Vagyis a végén kigyűjtjük, hogy mik és mik a megoldások, ha a paraméter „bejárja” a valós számok halmazát.

II/2) Gyakorlás

a) $px+9=p^2+3x$

*x-et akarom kifejezni, ezért úgy rendezem az egyenletet,
hogy az egyik oldalon csakis olyan tagok legyenek, melyekben van x,
a másik oldalon a paraméter, illetve a konstansok.*

b) $a^2x=a$

c) $2px - 2 = 3x$ $p = \text{paraméter}$

d) $2p^2x - p + 5 = 20px - 50x$ $p = \text{param.}$

e) $\frac{3px-3x}{p-2} = 2+2p^2-4p$ Kik:

f) $4p^2x^2-x=x^2+2px$ $p=\text{paraméter}$

g) $\frac{a+1}{x-5} = 2a+1$ Kikötés:

$$\frac{a+x}{b} - \frac{x-b}{a} = 2 \quad \text{Kik.:}$$

II/3) Egyenlőtlenséghez vezető paraméteres egyenletek

a) Mely p paraméterekre lesz nemnegatív megoldása a következő egyenletnek?

$$2px - 4p = 5x - 3$$

b) Mely p paraméterek esetén lesz 4-nél nem nagyobb a következő egyenlet megoldása:

$$p^2x + 6px + 9 = p^2 - 9x$$

- c) Mely p paraméterekre lesz 3-nál nem kisebb megoldása a következő egyenletnek?
 $4px - 2p = 4p^2x + x - 1$

II/4) Paraméteres egyenlőtlenségek

a) $3ax + 2 \geq 0$

b) $2px \leq p - x$

III. „Nincs százalék, csak valaminek egy százados törttel történő szorzása.”

Százalékszámítás ismétlés.

III/1) Közös feladatok

a) A 120 a 40-nek hány %-a?

A 85 a 20-nak hány %-a?

b) A 15 a 95-nek hány %-a?

A 4 a 60-nak hány %-a

c) Minek az 5%-a a 7?

A 19 hány %-a a 475-nek

d) A 475-öt hány %-kal kell csökkenteni, hogy 399 legyen?

e) Egy áru árát 30%-kal megemelték, majd újra megemelték 30%-kal. Hány százalékkal nőtt az eredeti ár.

f) Egy áru árát 20%-kal csökkentették, majd újra csökkentették 20%-kal. Hány százalékkal csökkentették összesen?

III/2) Egyénileg megoldandók

- a) Mekkora volt egy árucikk eredeti ára, ha 35%-os árengedménnyel 22 425 Ft-ért megkaptuk?
- b) Ha egy négyzet egyik oldalát 20%-kal csökkentjük, a másikat pedig a 20%-kal növeljük, akkor a négyzet területe 49 négyzetcentiméterrel csökken. Mekkora volt a négyzet eredeti területe?
- c) Egy tartályban található folyadék 28%-át kiöntötték, így 972 liter folyadék maradt benne. Hány liter folyadékot öntöttek ki a tartályból?
- d) Három szám összege 1 410. Az első szám a másodiknak 40%-a, a második pedig a harmadiknál annak 30%-ával nagyobb. Melyik ez a három szám?
- e) Egy készülék árát hány százalékkal növelték meg, ha Aladár kiszámította, hogy a megnövelt árat egyhatodával kellene csökkenteni ahhoz, hogy az eredeti árat visszkapjuk?

- f) Egy készülék árát januárban 40%-kal csökkentették, majd februárban újabb 40%-kal lejjebb szállították. A nagyobb reklám kedvéért úgy próbálták beállítani, mintha ez által az eredeti árat 80%-kal csökkentették volna. Aladár azonban kiszámította, hogy a valóságos 80%-os árcsökkentés a februárinál 40 000 Ft-tal alacsonyabb árat eredményezett volna. Mennyi volt a készülék eredeti ára?

IV. Ismétlés

- Apa 12 óra alatt vágná fel a tűzifát. A fia 16 óra alatt vágná föl ugyanazt. Mennyi idő alatt készül el a munka, ha együtt kezdik ugyan, de 4 óra múlva a fia beleun, és az apa egyedül kell, hogy befejezze.

- Oldd meg: $\frac{2x-2p+1}{2p-x} + 1 = 2p$ $p=\text{param.}$

- $a^2x^2 - ax = 2ax^2 - x^2 - x$ $a = \text{param.}$

- Mely p paraméterekre lesz a megoldás kisebb, mint 1.
 $2p^2x - p^2 + 4 = 3px + 2x$

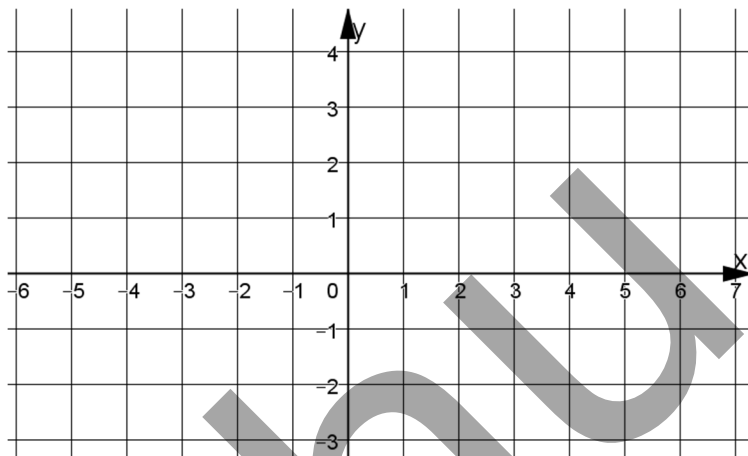
Speciális lineáris függvények

I. Az egyszerűbb lineáris függvények

I/1) A konstans függvény

Definíció: $c(\cdot): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; x \mapsto c$ „Nullad-fokú”

Képe: az abszcisszával párhuzamos egyenes.



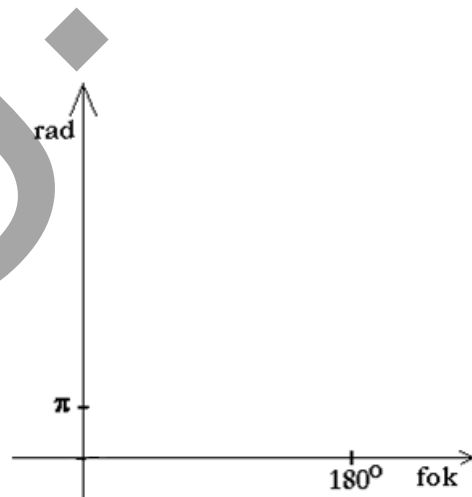
I/2) Az egyenes arányosság – avagy a „piac függvénye”

a) Definíció: Az $f(\cdot): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y=ax$ ($a \neq 0$) függvényt egyenes arányosságnak nevezzük.

A „piac függvénye”: kétszer annyi krumpliért kétszer annyit fizetünk.

b) Pl.: szög-ívmérték; fok-radián összefüggés
120° hány radiánnak felel meg?

3π , $2\pi/5$ és $\pi/8$ hány foknak felel meg?



„Ha a szög 5-szörösére nő, akkor a radián is, vagyis a hányadosok megegyeznek.”

„Hányszorosára változik egy szög?”:

A hányadosuk mondja meg, hogy hányszorosukra változtak.

60°-nak, illetve 45°-nak mekkora ívmérték felel meg?

c) Egyéb feladatok

5 gyerek 2 óra alatt 80 szendvicset készít. Hányat tudna 12 gyerek 3 óra alatt készíteni?

1 gyerek 2 óra alatt:

1 gyerek 1 óra alatt:

12 gyerek 1 óra alatt:

12 gyerek 3 óra alatt:

Egy egyenes arányosság 4-hez -2 -őt rendel. Írd föl a függvényt

II. Az intervallumonként lineáris függvények

II/1) A signum v. szignum (előjel) és a szignum fv.

a) Definíció

$$\text{sgn}(-0,003)=$$

$$\text{sgn}(0)=$$

$$\text{sgn}(110)=$$

$$\text{sgn}(3^{-2})=$$

b) A függvény

Def.:

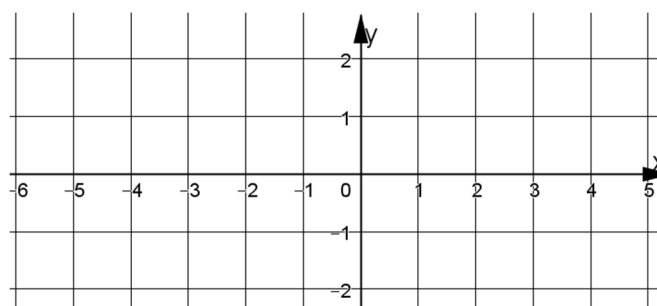
$$D_{\text{sgn}}()=\mathbf{R}$$

Zérushely: $x=$

Menet

Injektivitás:

$$R_{\text{sgn}}()=$$



c) A $\text{sgn}(\)$ fv. transzformációi

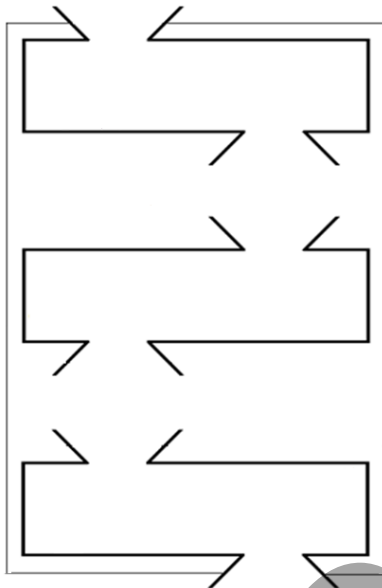
- (i) Add meg a $-\text{sgn}(x)+3$ hozzárendelésű függvény grafikonjának transzformációját az eredeti $\text{sgn}(\)$ fv. grafikonjából és ábrázold!

$$\text{sgn}(\): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y =$$

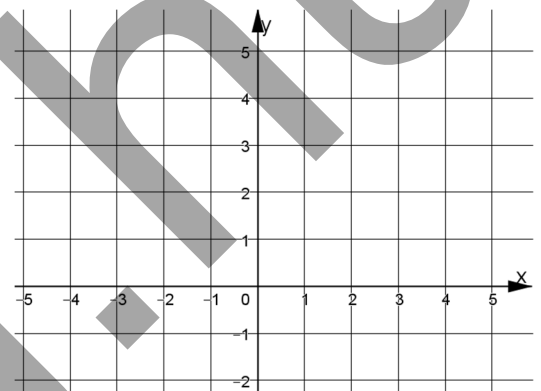
$$g(\): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y =$$

$$h(\): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y =$$

$$f(\): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y = -\text{sgn}(x) + 3 \equiv$$



A trafó:



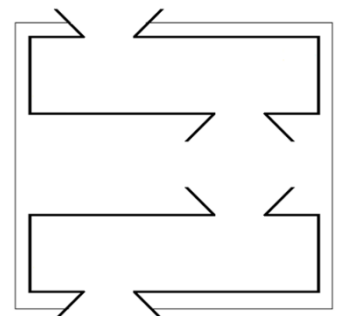
- (ii) Ábrázold és jellemezd a $\text{sgn}(x+3)$ hozzárendelésű függvényt!

Az **argumentumot** figyelve kell nézni, hogy mikor -1, 0 és +1 a függvényérték!
Egyenlőtlenség az argumentumra.

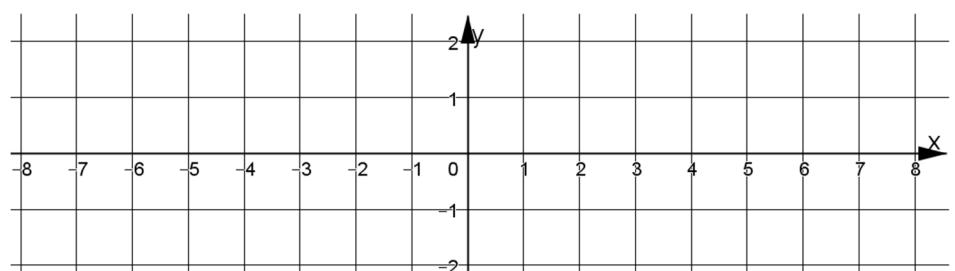
$$b(\): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y = x + 3$$

$$k(\): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y = \text{sgn}(x)$$

$$g(\): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y = \text{sgn}(x+3) \equiv k(b(\)) \equiv k \circ b$$



A trafó:



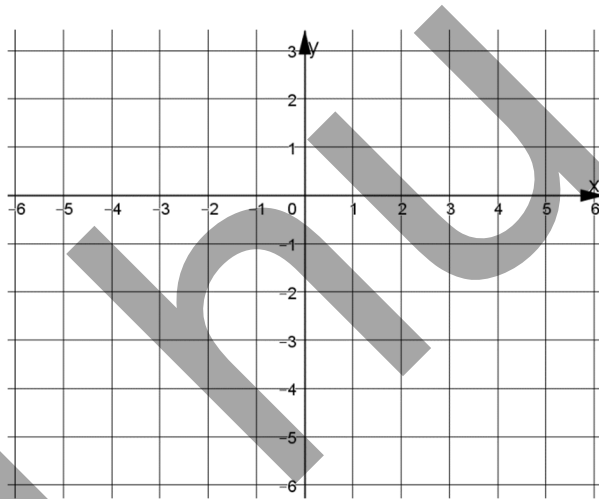
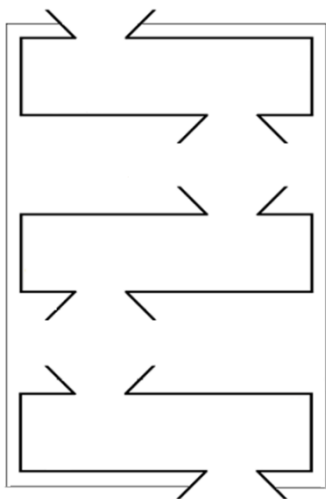
- (iii) Add meg a $2 \cdot \text{sgn}(x) - 3$ hozzárendelésű függvény grafikonjának transzformációját az eredeti $\text{sgn}(\)$ fv. grafikonjából és ábrázold!

$\text{sgn}(\) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y =$

$f(\) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y =$

$g(\) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y =$

$h(\) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y = 2 \cdot \text{sgn}(x) - 3 \equiv$



A transzformáció:

- (iv) Külső-belső függvény gyakorlása

$a(\) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y = \text{sgn}(x)$

$b(\) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y = x + 3$

$c(\) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y = -2x$

Írd föl a hozzárendelési szabályokat:

$a \circ b \equiv a(b(\)) \equiv$

$c \circ a \equiv c(a(\)) \equiv$

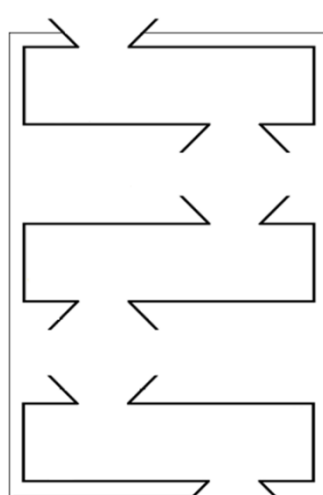
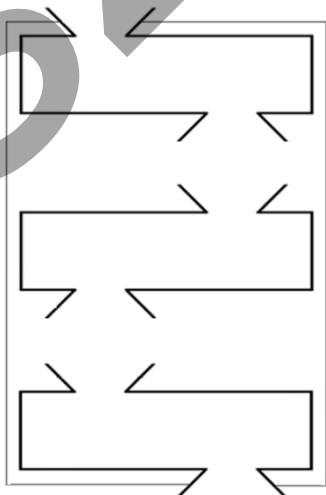
$b \circ c \circ a \equiv$

$c \circ a \circ c \equiv$

Írd be a gépek nevét, a műveletet és add meg a függvénykompozíciót:

$-2 \cdot \text{sgn}(x) \equiv$

$\text{sgn}(-2x + 3) \equiv$



d) Egyenletek, egyenlőtlenségek

(i) $\operatorname{sgn}\left(\frac{6-2x}{3x+2}\right) = -1$

Vegyük észre, hogy ez az argumentumra egy _____

(ii) $\operatorname{sgn}(x) < 1,2$

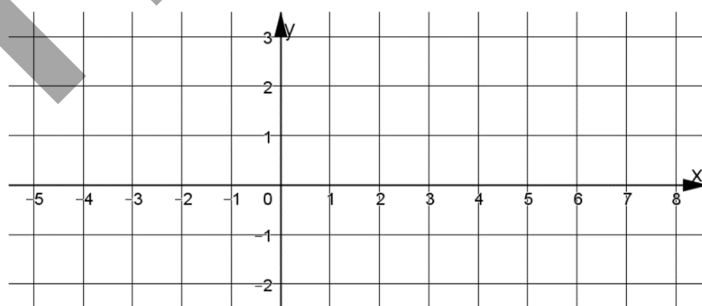
(iii) $\operatorname{sgn}(2x-3) < \frac{x}{3}$

I.

II.

III.

Ábrázoljuk is:



(iv) $\operatorname{sgn}(3x-1) = x^2 - 2x + 1$

I.

II.

III.

II/2) Az egészrész és az egészrész függvény

- a) Def.: Egy valós szám egészrésze a nála nem nagyobb egészek közül a legnagyobb. (Az a legnagyobb egész szám, amely nem nagyobb az x -nél.)

$$\begin{array}{llll} [5]= & [4,3]= & [-1]= & [-2,4]= \\ [0]= & \left[\frac{18}{5} \right]= & \left[-\frac{27}{8} \right]= & \left[6,9 \right]= \end{array}$$

A definíció alapján: $x-1 < [x] \leq x$

Ugyanis: Ha $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow [x]=x$.

Ha azonban kisebb egy egész számnál, akkor nála nagyobb nem lehet az $[x]$

Az egészrész függvény által meghatározott érték az *(argumentum-1)*-nél nagyobb, az argumentumnál kisebb egyenlő.

pl.: $[x]=5 \Leftrightarrow x \in$

Egyenlet:

$$[5x] = -22 \Leftrightarrow$$

- b) A függvény
 $\text{int}(\cdot): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}; x \mapsto [x]$

$$D_{\text{int}(\cdot)} = \mathbb{R}$$

Zérushelyek: $x \in$

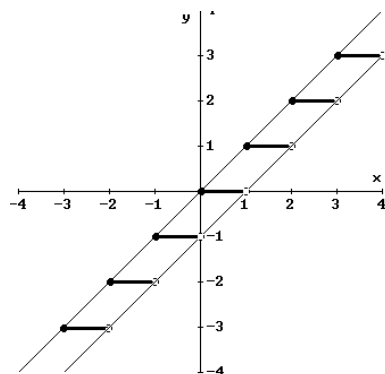
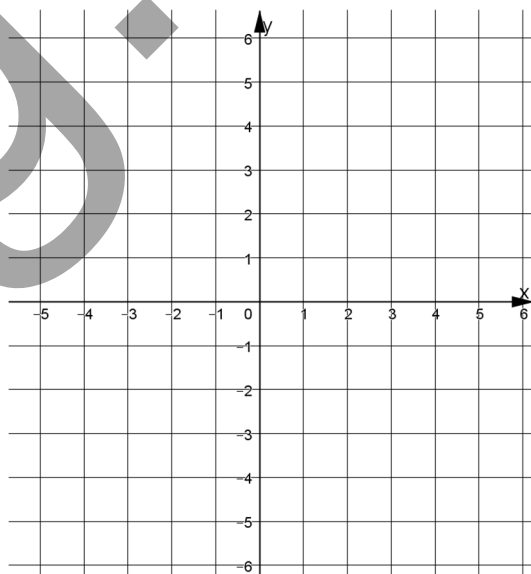
$$\left. \text{int}(\cdot) \right|_{[a; a+1[} \equiv \left. \text{const}(a) \right|_{[a; a+1[} \quad a \in \mathbb{Z}$$

Menet:

$$R_{\text{int}(\cdot)} =$$

Injektivitás:

Az előző pontnál érdemes megfigyelni, hogy a függvény képe az $x-1$ és az x hozzárendelésű függvények képe közé szorul be.



c) Egészrészt tartalmazó függvények, egyenletek

(i) Ábrázold az $\text{int}(x)+2$ hozzárendelésű fv-t!

Trafó:

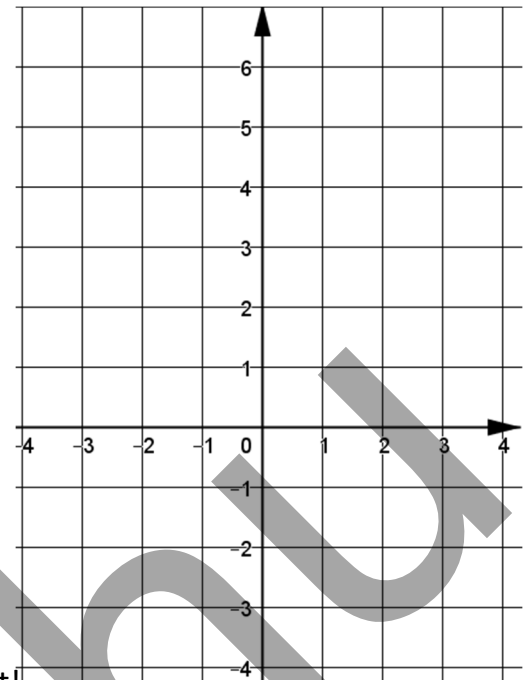
D =

Zérushelyek: $x \in$

Menet:

R =

Injektivitás:



(ii) Ábrázold a $[x-0,2]$ hozzárendelésű függvényt!

Trafó:

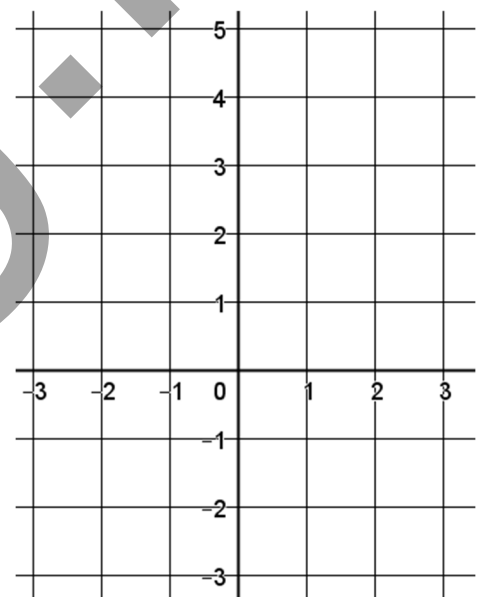
D=

Zérushelyek: $x \in$

Menet:

R_f =

Injektivitás:



(iii) Oldd meg: $[x]=x$

(iv) **Alappélda:** $[x]=3x+2$

1. mo:

$[x] \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

tanm_fuggvenyek_egyenletek_F_3_2_c.ggb

2. mo.:

$$x-1 < [x] \leq x$$

$$3[2x+2]-1=4x+3$$

II/3) Törtrész és törtrész függvény

tanm_fuggvenyek_egyenletek_F_3_3.ggb

a) Def: $\{x\} := x - [x]$

$$x-1 < [x] \leq x$$

$$\{5,3\} =$$

$$\{0,8\} =$$

$$\{6\} =$$

$$\{-4\} =$$

$$\{-4,3\} =$$

$$\{-0,672\}$$

$$\left\{\frac{44}{7}\right\} =$$

$$\left\{-\frac{23}{5}\right\} =$$

b) A függvény: $\text{frac}(\cdot): \mathbb{R} \rightarrow$

Segít a definíció: $\{x\} := x - [x]$

$D_{\text{frac}} =$

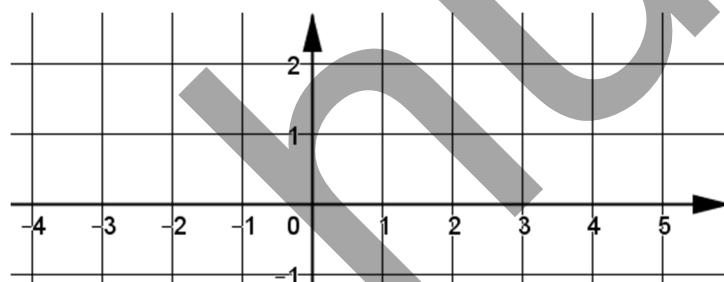
Periodikus

Zérushely:

Menet:

Injektivitás:

$R_{\text{frac}} =$



c) Törtrészes egyenletek, egyenlőtlenségek. Nagyon fontos az értékkészlet figyelés!

(i) Mivel egyenlő?

$$\{\text{sgn}(x)\} =$$

$$\text{sgn}(1 - \{x\}) =$$

(ii) $\{x\} = 0,8$

(iii) Egyenletek

$$\{x\} = -0,2$$

Alappélda: $\{3x\}=0,6$

$\{-2x+3\}=0,6$

$\operatorname{sgn}\{x\}=[x]$

II/4) Az abszolútérték

a) Def.: $|x| =$

Ez szemléletesen azt mutatja meg, hogy milyen távol van az adott szám a 0-tól.

$$|5,3| = \quad \quad \quad |-6,2| = \quad \quad \quad |0| = \quad \quad \quad \left| -4,9 \right| =$$

Ősképkérés:

$$|x| = 2$$

A definíció ekvivalens a következő definícióval:

$$|x| := \operatorname{sgn}(x) \cdot x$$

$$\text{Áll.: } |a| = |-a|$$

$$\text{Vegyük észre: } x^2 =$$

b) A függvény

$$\operatorname{abs}(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+_0; x \mapsto |x|$$

$$D_{\operatorname{abs}} = \mathbf{R}$$

Két intervallumra kell leszűkíteni, és azon a két intervallumon két különböző lineáris fv-ként viselkedik.

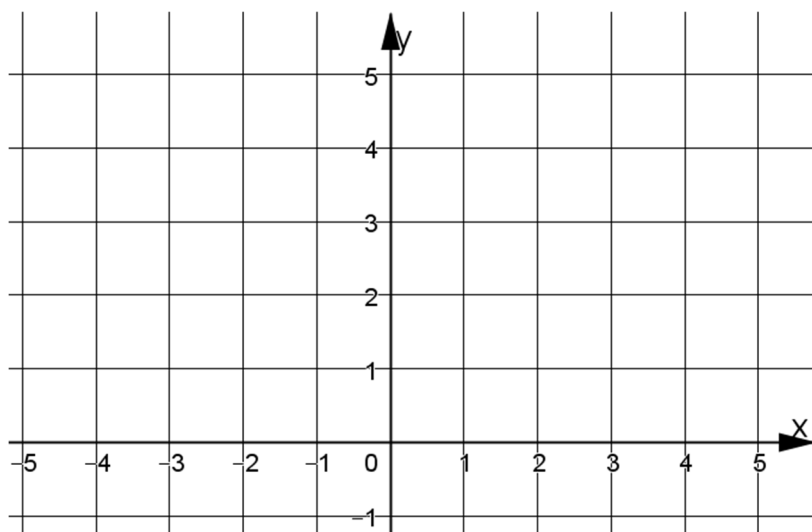
ZH:

menet:

] ; [		[]	] ; [	
$\operatorname{abs}() \equiv$ fv.			$\operatorname{abs}() \equiv$ fv.	

Nem injektív.

Alulról korlátos.



Figyelem: „abszolútértéknél töréspont ott van, ahol az argumentum jelváltó”!

c) Definíciók függvényjellemzéshez:

... $x_0 \in D_f$ az $f(\)$ fv. minimum (maximum) helye és $f(x_0)$ a fv. min. (max.) értéke,
ha $\forall x \in D_f \Rightarrow f(x_0) \leq (\geq) f(x)$.

... $f(\)$ fv. páros, ha $\forall x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$ és $f(x)=f(-x)$
Pl: x^2 fv., vagy $|x|$ vagy x^4 fv.

... $f(\)$ fv. páratlan, ha $\forall x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$ és $f(x)=-f(-x)$
Pl: x fv., vagy x^3 fv.

d) Az Abs() fv. ábrázolása

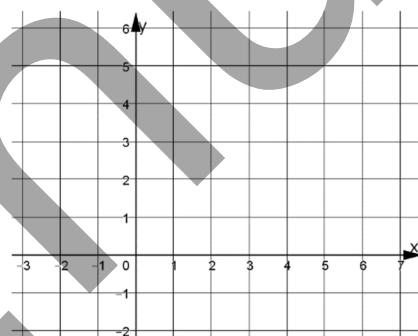
Ábrázold és jellemezd: $f(\) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; y = |x-2|$

Intervallumonkénti – töréspontok szerinti – ábrázolás:

Argumentum-töréspont - keresés:

I.

II.



A belső függvény trafója: Függvényérték trafó (az abs. értékkel!)

$b(\) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; y =$

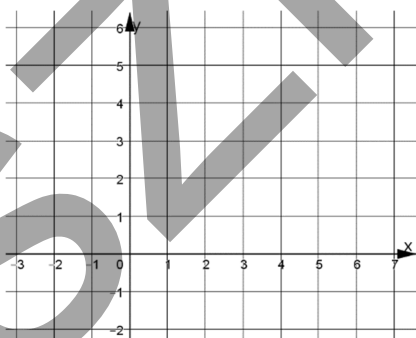
$k(\) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; y =$

$k \circ b = k(b(\)) =$

Az $b(\)$ függvény képe lineáris.

A $k(\)$ függvény egy abszolútérték függvény, vagyis a nemnegatív értékeket nem trafózza, a negatív értékeknek az ellenkezőjét veszi.

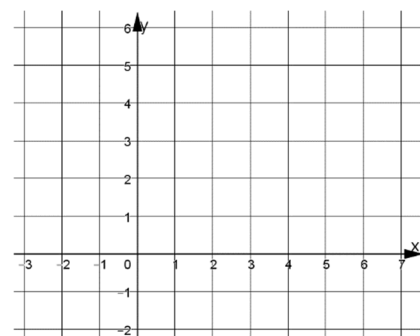
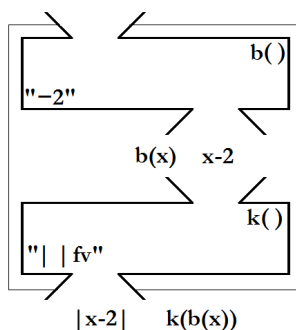
Vagyis ami az x tengely alatt van, azt „tükrözi az x tengelyre”.



függvénykompozíciós ábrázolás:

Argumentum trafó

Csak röviden:



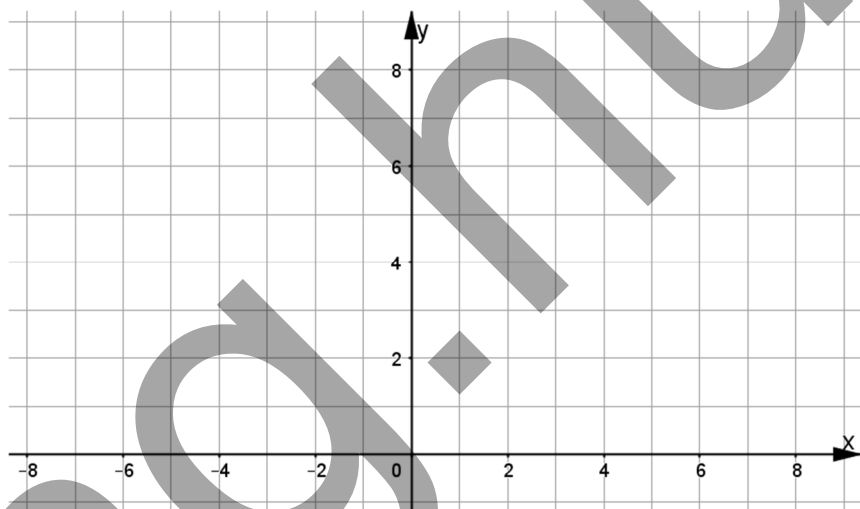
e) Egyszerűbb egyenletek

$$\text{Egyenlet: } |x-1| = \frac{1}{2}x+3$$

Egyenletmegoldás mindig: Intervallumonkénti – töréspontok szerinti!

I.

II.



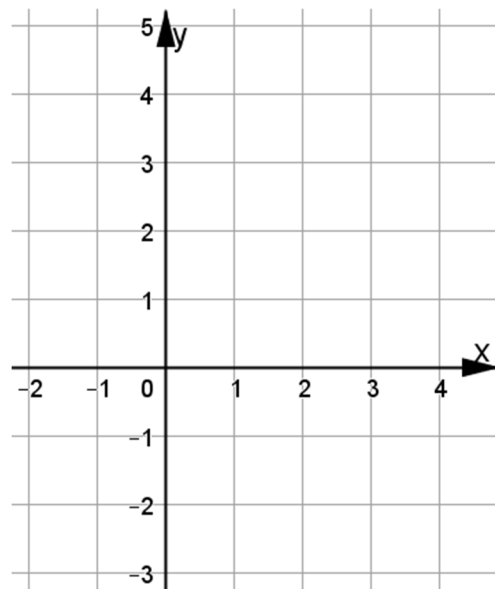
$$2\left|\frac{x}{2}-1\right|-3=-2x+7$$

tanm_fuggvények_egyenletek_F_3_4_c_4_abs_egyenlet.ggb

Egyenletmegoldás mindig: Intervallumonkénti – töréspontok szerinti!

I.

II.



f) Összetettebb egyenletek: Abszolútértékek összege, különbsége ill. egymásba-skatulyázott abszolútértékek

$$(i) \quad |10-2x| + |3x-2| = \frac{x}{2} + 12$$

tanm_fuggvenyek_egyenletek_F_3_4_c_4_abs_egyenlet.ggb

Először is bölcsőbb a következő formára hozni:

$$| \quad \quad \quad | + |3x-2| = \frac{x}{2} + 12$$

Egyenletmegoldás mindig: Intervallumonkénti – töréspontok szerinti!

Keressük meg a töréspontokat: Jobb az előjel grafikont nézni.



Ezek után csak 3 szétválasztás van:

I.

II.

III.

Nézzük meg a baloldal intervallumokra szűkített függvényeit:

I.

II.

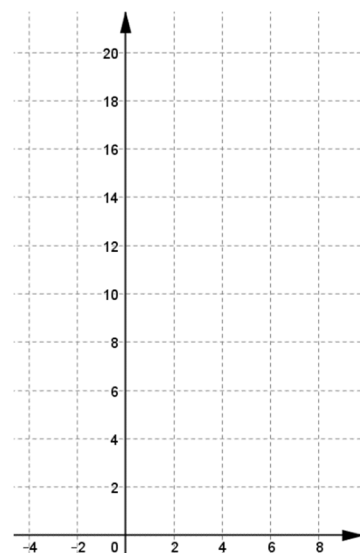
III.

(bo.: szűkített fv.)

(bo.: szűkített fv.)

(bo.: szűkített fv.)

VEGYÜK ÉSZRE: $f(\cdot): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; f(x) = |3x-2| + |2x-10|$
függvény a kisebbik törésponttól balra szig. m. cs.
illetve a nagyobbiktól jobbra szig. monoton nő.



(ii) $-|2-x| + |-2x-7| = x+5$

tanm_fuggvények_egyenletek_F_3_4_c_4_abs_egyenlet.ggb

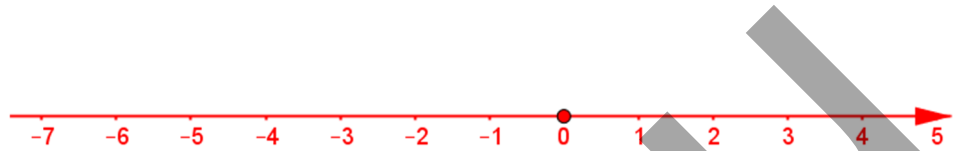
Először is bölcsebb – lenne – a következő formára hozni:

$$| \quad | \quad | \quad | = x+5 \quad \text{Még a sorrend is számítana...}$$

De most ügyetlenek vagyunk, és az eredetit nézzük – és senyvedünk.

Egyenletmegoldás mindig: Intervallumonkénti – töréspontok szerinti!

Keressük meg a töréspontokat: Jobb az előjel grafikont nézni.



Ezek után csak 3 szétválasztás van:

I.

II.

III.

Nézzük meg a baloldali intervallumokra szűkített függvényeit:

I.

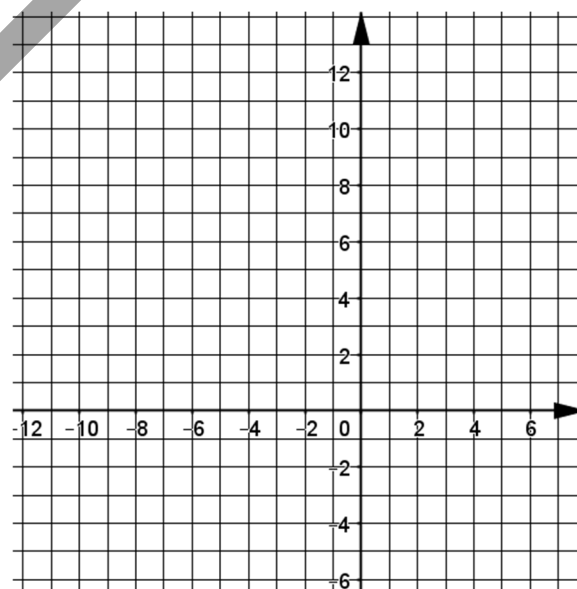
II.

III.

(bo.: szűkített fv.)

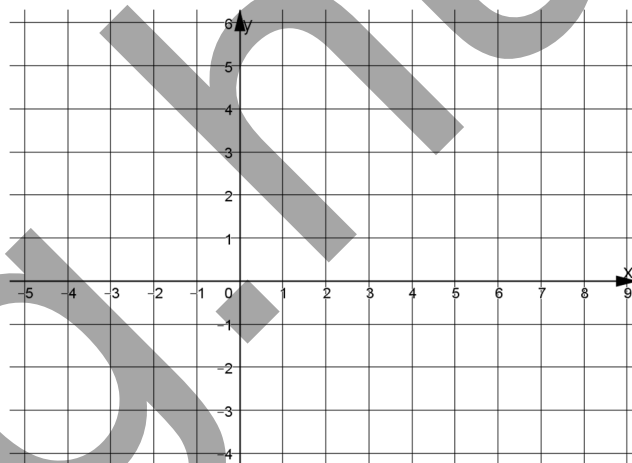
(bo.: szűkített fv.)

(bo.: szűkített fv.)

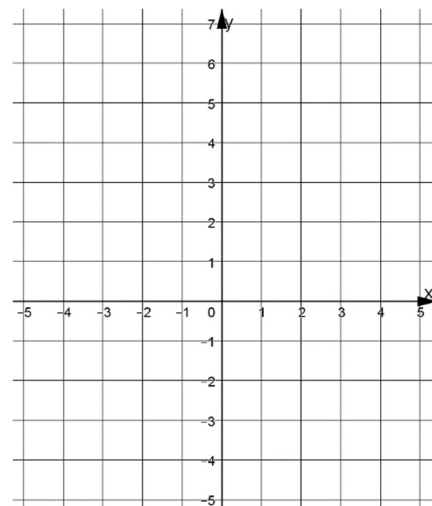


(iii) Egymásba-skatulyázott abszolútértékek

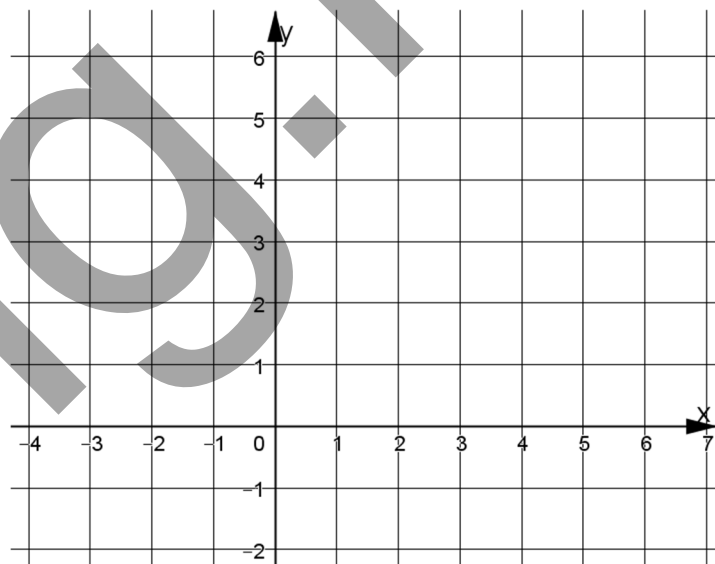
$$\left| |x-2|-3 \right| = \frac{x}{2} + 1 \quad \text{ESETEKRE BONTÁS!}$$



$$4 \left| |2x+1|-4 \right| = 2x+17$$



$$|1-2x| - |3-x| = x+2$$



III. Függvény-transzformációk

III/1) A merőleges affinitás – nem egybevágósági transzformáció – sőt, szögeket sem tart...

tanm_fuggvenyek_egyenletek_F_4_1_meroleges_aff.ggb

a) Def.: adott t egyenes (tengely) és $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0;1\}$

$$t^\lambda(): S \rightarrow S; P \mapsto P'$$

$$\text{ahol: } P \in t \Rightarrow P \equiv P'$$

$$\text{Egyébként: } PP' \perp t$$

$$\lambda > 0 \Rightarrow P \text{ és } P' \text{ ugyanabban a félsíkban vannak}$$

$$\lambda < 0 \Rightarrow P \text{ és } P' \text{ két különböző félsíkban vannak}$$

$$d(t; P') = |\lambda| \cdot d(t; P)$$

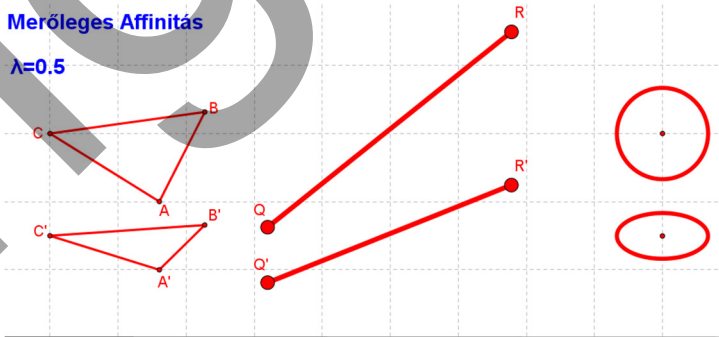
$$\text{Jelölés: } t^\lambda(P) = P'$$

b) Tulajdonságok (szokástól eltérően előre vesszük, mert nem egyértelműek)

- Illeszkedéstartó
- Nem távolságtartó és nem is szögtartó
- Általában nem szimmetrikus, kivéve ha $\lambda = -1$ (Ekkor: tengelyes tükrözés)
- Körüljárás-tartás: λ pozitív igen, negatív: megfordítja
- Kölcsönösen egyértelmű (injektív)
(egy pontnak csak egy ősképe van)
- Általában nem szimmetrikus
- Egyenest egyenesbe visz (majd belátjuk – a kp-os hasonlósági trafónál)
- Fixpont, fix egyenes, fix alakzatok (ha $\lambda \neq 1$); Invariáns egyenesek, invariáns alakzatok

Merőleges Affinitás

$$\lambda = 0.5$$



- Speciális eset:
 $\lambda = -1$: Tengelyes tükrözés

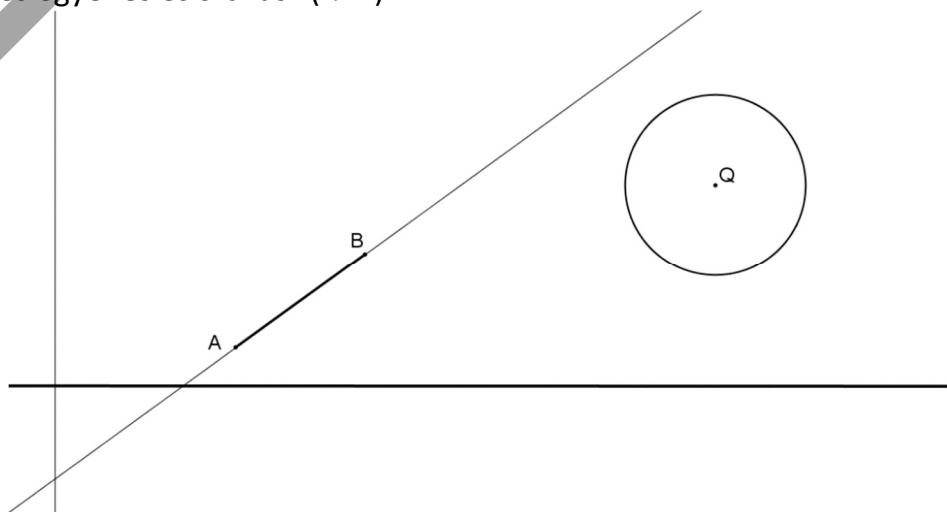
c) Szerkessz illet:

Egyenes: t -re merőleges

t -re nem merőleges egyenes és szakasz ($\lambda = 2$)

Kör:

$$\lambda = -1/2$$



III/2) Függvénykompozíciók és az inverz függvény

a) Külső-belső függvény

$$f(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y = \text{sgn}(x)$$

$$g(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y = x + 2$$

$$h(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y = -3x$$

Mit csinál az „f()” függvény?: A bedobott argumentumnak veszi a szignumát.

Mit csinál a „g()” függvény?: A bedobott argumentumhoz hozzáad 2-őt.

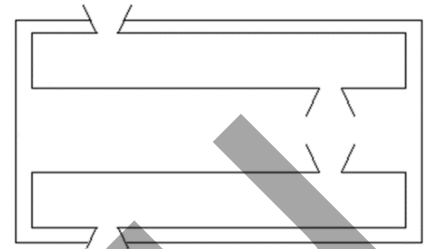
Mit csinál a „h()” függvény?: A bedobott argumentumnak veszi a -3 -szorosát.

$$f \circ g \equiv f(g())$$

Írd be a gépbe a „működésüket”!

Az elkészült függvény:

$$c(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y =$$



$$g \circ f \equiv$$

Írd be a gépbe a „működésüket”!

Az elkészült függvény:

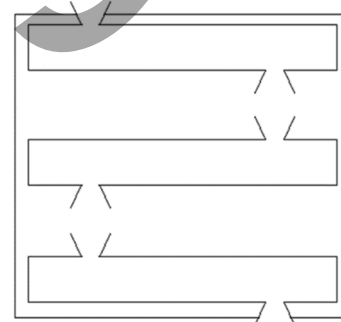
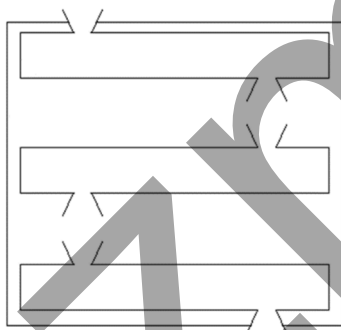
$$d(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y =$$



Írd föl a következő függvényeket kompozíciókkal, géppel! A kis gépek jobb felső sarkába írjuk a felső függvények nevét (f(), g(), h(), stb.) – bal alsóba, amit „csinál”.

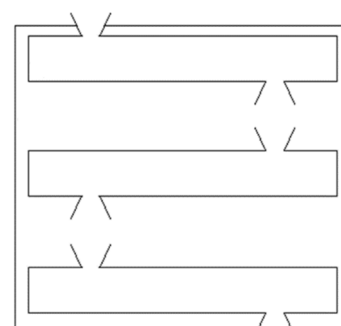
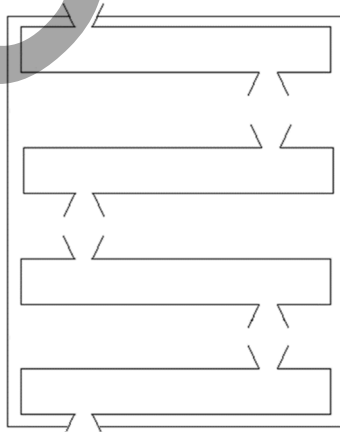
$$-3 \cdot \text{sgn}(x+2)$$

$$\text{sgn}(x+2)+2$$



$$-3 \cdot \text{sgn}(-3x+2) =$$

$$-3x+4 =$$



b) Inverz függvény

Csakis az injektív (kölcsonösen egyértelmű) függvényeknek van inverze.

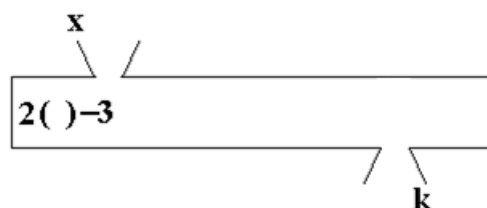
$$f(): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; y=2x-3$$

Kérdés: Mit kell bedobni a függvénybe, hogy alul k „pottyanjon” ki?

Legyártjuk a „visszafelé tekerős” függvényt az eredetiből, vagyis invertáljuk!

$$f^{-1}(): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; y=$$

Vagyis ha _____-t dobok be a fv-be, akkor k értéket ad.



III/3) A külső függvény lineáris, a belső a „trafózáadó”, pl: $\text{sgn}()$, $\text{frac}()$, $\text{int}()$, $\text{abs}()$.

„Függvényérték-transzformáció”

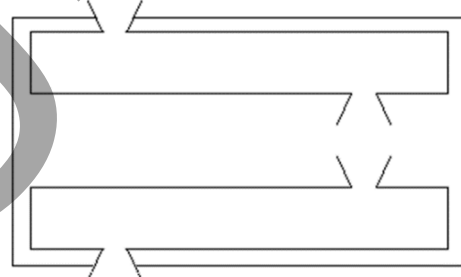
fv_trafo_kulso_fv_függvényérték_trafo_F_4_3.ggb

a) $g(): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; y=\text{sgn}(x)+2,5$

b) $(): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; y=$

k) $(): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; y=$

$g() \equiv$



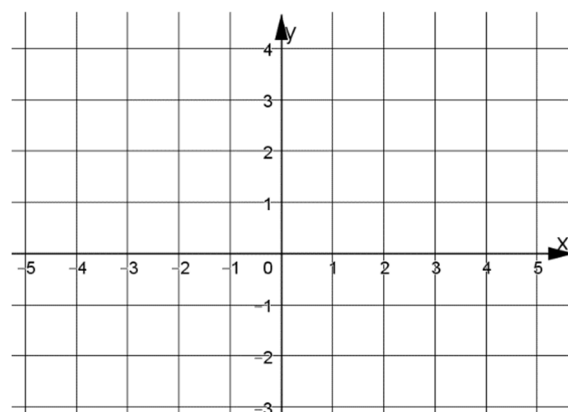
Vagyis a $\text{sgn}()$ fv minden kiadott értékéhez még 2,5-öt hozzáad a másik függvény.

Képileg: a szignum függvény minden értelmezés-tartománybeli helyhez tartozó érték helyett 2,5 egységgel magasabban található értéket rendel:

„feltolja” a fv. képét 2,5 egységgel.

Geometriai transzformációval leírva:

$\text{graf}_{g()} =$

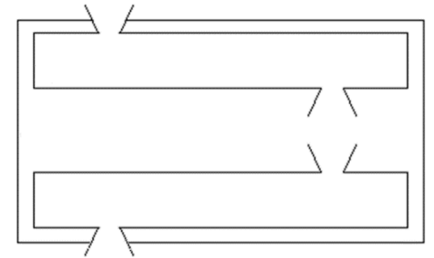


b) $g(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y = [x] - 3$

$b(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; b(x) =$

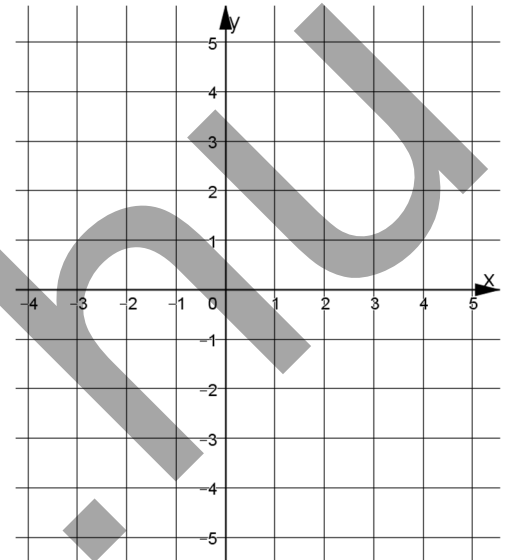
$k(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; x \mapsto$

$g \equiv$



Vagyis az egészrész fv. minden kiadott értékéből még 3-at levon a másik függvény. Képileg: az egészrész függvény minden értelmezés-tartománybeli helyhez tartozó érték helyett 3 egységgel lentebb található értéket rendel: „letolja” a fv. képét 3 egységgel.

A trafó: $\text{graf}_{g()} =$

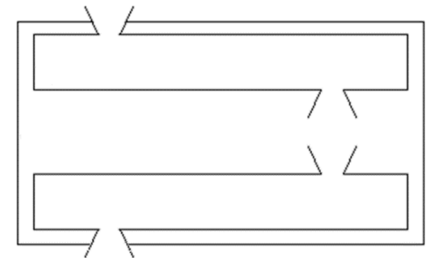


c) $f(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y = -\frac{2}{3}\{x\}$

$b(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y =$

$k(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y =$

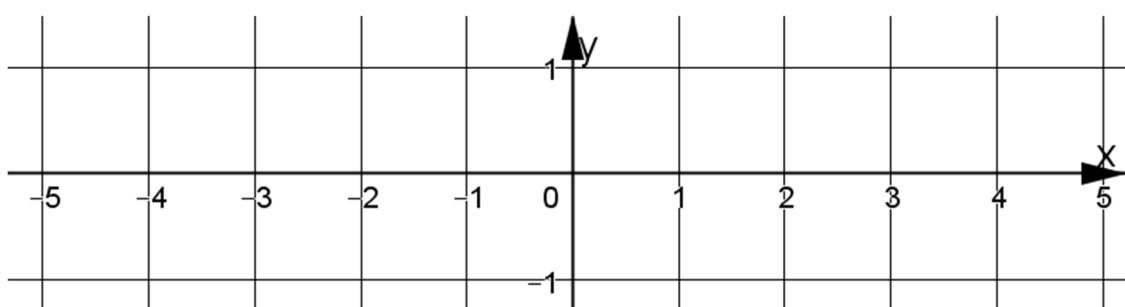
$f \equiv$



Vagyis a $\text{frac}()$ fv. minden kiadott értékének veszi a $-\frac{2}{3}$ -át a másik függvény. Képileg: a törtrész függvény minden értelmezés-tartománybeli helyhez tartozó érték helyett annak a $-\frac{2}{3}$ -át rendeli: $-\frac{2}{3}$ -os merőleges affinitással „tükrözi az x tengelyre, majd „összenyomja” az y tengely mentén/v. „összenyomja az x-tengelyre” az eredeti törtrész fv. képét.

A trafó: $\text{graf}_{f()} =$

„Vesszük a törtrész fv. grafikonjának az x tengelyre vett $\lambda = -2/3$ arányú merőleges affin képét”



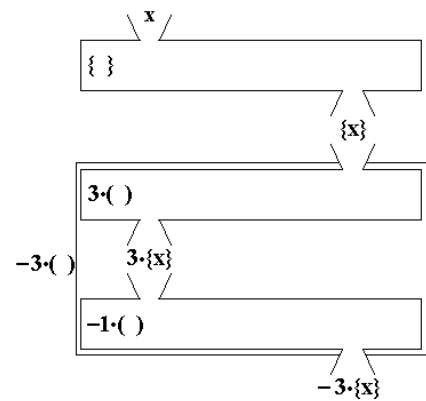
d) $g(\cdot): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; y = -3\{x\}$

$b(\cdot): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; y =$

$k(\cdot): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; y =$

$g \equiv$

A trafó: $\text{graf}_g =$

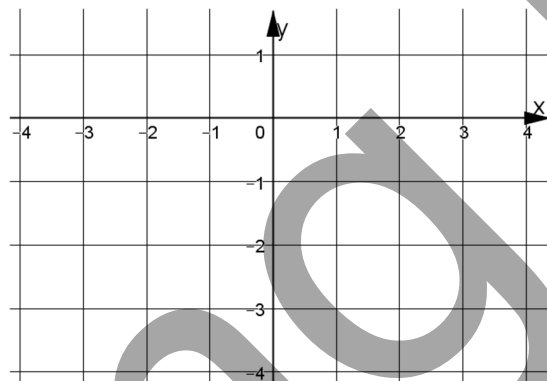


Vagyis a $\text{frac}(\cdot)$ fv. minden kiadott értékének veszi a (-3) -szorosát a külső függvény.

Képileg: a törtrész függvény képét a 3-mal szorzó függvény $x^{\lambda=3}$ merőleges affinitással „széthúzza” az y tengely mentén.

Végül a -1 -gyel szorzó függvény tükröz az x tengelyre.

Ez persze egyben is megy: -3 -mal szorzó függvény: $x^{\lambda=-3}$ merőleges affinitással trafózza a beledobott függvény képét.



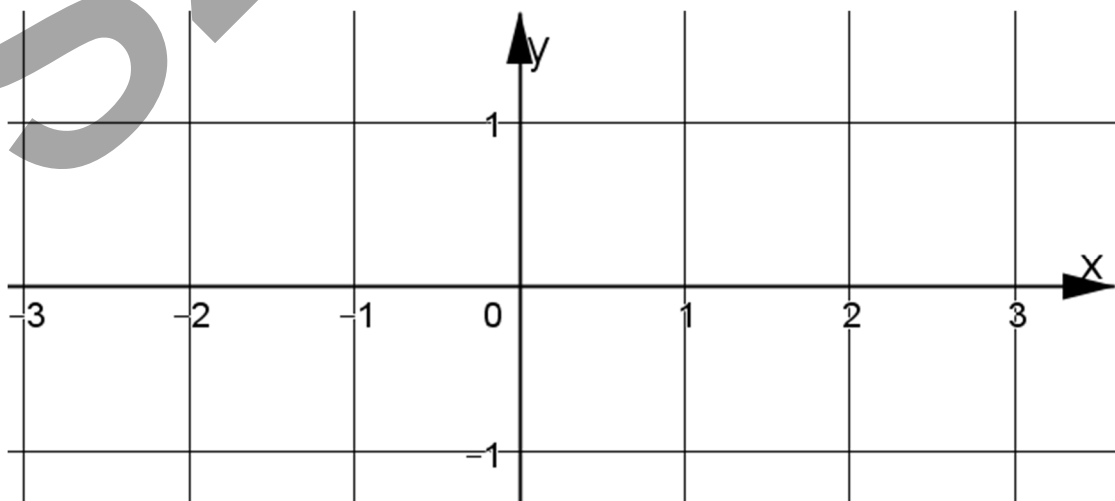
e) $f(\cdot): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto -\frac{2}{3}\{x\} + 1$

$b(\cdot): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; y =$

$k(\cdot): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; y =$

$f \equiv$

A trafó: $\text{graf}_f =$



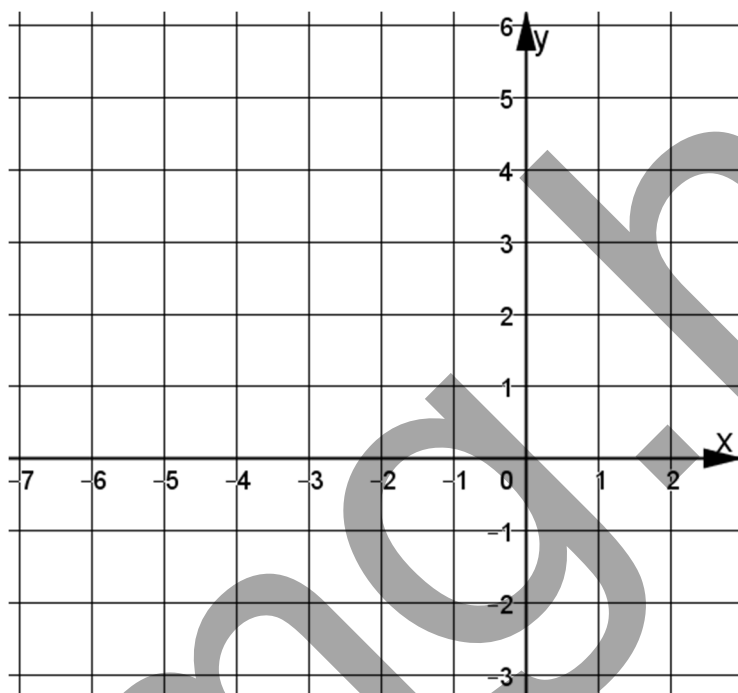
f) Függvényérték-transzformáció abszolútérték függvénnyel

$$g(\cdot): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y = ||x+3|-2|+1$$

Egy kicsit tanulmányozhatjuk ezen azt is, hogy hogyan „trafózz” maga az abszolút érték függvény.

Tudjuk, hogy a pozitív értékeket békén hagyja, a negatívokat -1 -gyel szorozza. A negatív értékek helyett -1 -szeresüket adja, vagyis tükrözi ezeket a III. és IV. síknegyedbe eső pontokat az x tengelyre.

Tehát először „feltükrözzük” az $x+3$ grafikonjának x tengely alá eső szárát az x tengelyre. Majd ezt a V alakot lentebb toljuk 2 egységgel, majd megint a V alak x tengely alá eső részét tükrözzük az x tengelyre. Végül az így kapott W alakot felemeljük 1-gyel.



Def.: lokális minimum (maximum): ... $x_0 \in D_f$ lokális minimumhely (maximumhely), ha $\exists k_\delta(x_0) \rightarrow \forall x \in k_\delta(x_0) \cap D_f \Rightarrow f(x) \geq (\leq) f(x_0)$

g) Összefoglalás: Külső függvénnyel trafózzuk az eredetit – függvényérték trafó

Ha a külső függvény lineáris, akkor a belső függvényt az y tengely mentén trafózzom.

Ha egynél nagyobb számmal szorzom, akkor az y tengely mentén „széthúzó” a függvény képét”. Ha 0 és egy közé eső számmal szorzom (vagyis egynél kisebb pozitívvval szorzom), akkor az y tengely mentén „összenyomom” a függvény képét.

Negatív számmal történő szorzás: először tükrözöm az x tengelyre, majd mintha pozitívvval szoroznék...

Ha hozzáadok vagy kivonok belőle egy pozitív számot, akkor fel illetve lefelé tolom a függvényt.

Egzaktul:

ha a külső függvény: $ax+b$ ($a \neq 0$);

vagyis a függvénykompozíció: $a \cdot f(\cdot) + b$,

akkor először: $x^{\lambda=a}(\cdot)$ trafó; majd: $E^{v(0;b)}$ trafó: $E^{v(0;b)}(x^{\lambda=a}(\text{graf}_f(\cdot)))$

III/4) A belső függvény a lineáris.

„Változó (argumentum)-transzformáció”

a) $f(): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; y = |x-3|$

Mielőtt nekilátunk a vizsgálatnak, szögezzük le:
ez nem az $|x|-3$ hozzárendelésű függvény. Hiszen pl. az $f()$ fv.
értékkészlete a nem-negatív számok,
az $|x|-3$ -é pedig lehet -3 tól fölfelé bármi, pl. -2 is.
Mondjuk $f(0)=3$, de $|0|-3=-3$

b) $(): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; y =$

$\text{abs}(): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; y =$

$f() \equiv$

Először is vizsgáljuk meg az abszolútérték függvényt:

A minimumhelye, „csúcsa” az $x=0$ helyen van, és ott 0-t vesz föl.

Azonban az $|x-3|$ hol veszi fel ezentúl a 0 értéket?

Úgy lehetne mondani, hogy „3-mal később, 3-mal nagyobb számnál”, hiszen minden bedobott változóból először le kell vonni 3-at. Vagyis ezentúl az $x=3$ helyen veszi fel azt a 0 értéket, amelyet korábban az $x=0$ helyen vett fel.

Hol veszi fel ezentúl a korábban $x=2$ -höz tartozó $|2|=2$ értéket?

„3-mal később, 3-mal nagyobb számnál”. Hiszen az $x-3$ belső függvény az 5-ből csinál 2-őt, amelyet be kell dobni az $|$ fv-be.

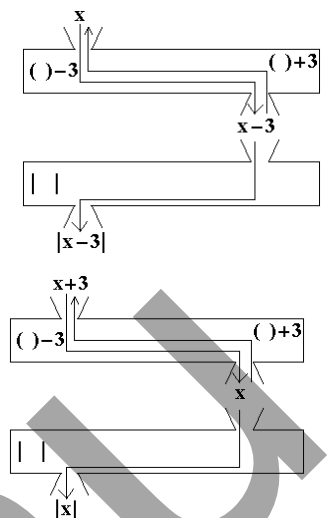
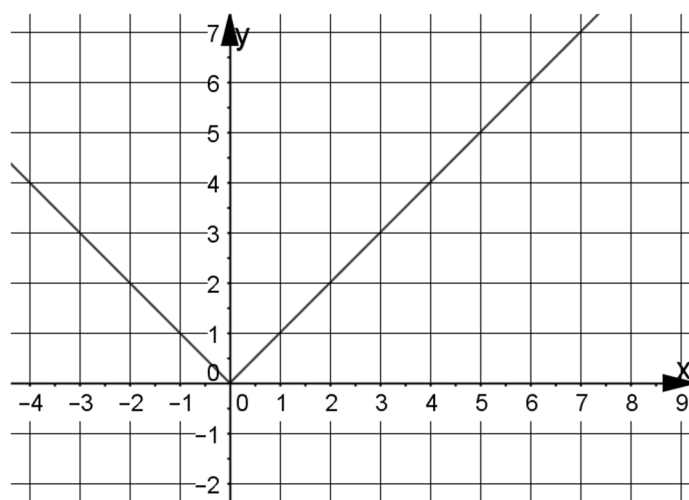
Az eredeti fv. x_0 helyen $|x_0|$ értéket vett föl. Az új függvénybe mit kell behelyettesíteni, hogy $|x_0|$ értéket adjon? A belső függvény kimenetébe dobjuk be az x_0 értéket, és nézzük meg, hogy mit kellett ahhoz bedobni, hogy a belső fv. x_0 -t adjon, vagyis mi az x_0 belső fv. szerinti ősképe: $b^{-1}(x_0)$

Szumma-szummárum: minden szokásos értéket „3-mal később” vesz föl; a belső függvény inverze is mutatja: az eredeti szám helyett annak a belső függvény inverzével trafózott ősképet kell bedobni a függvénykompozícióba, hogy a szokásos értéket kapjuk.

Tehát a kép *jobbra* tolódik 3 egységgel:

$$\text{graf}_f() = E_{(3;0)}^{\vee}(\text{graf}_{\text{abs}}())$$

Az eredeti függvény grafikonja a belső függvény inverzével trafózódik az x tengely mentén.



b) $g(): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; y = |x+2,5|$

$b(): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; y =$

$\text{abs}(): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; y =$

$g() \equiv$

Az abszolútérték függvényt: minimum helye, „csúcsa” az $x=0$ helyen van, és ott 0-t vesz föl.

Azonban az $|x+2,5|$ hol veszi fel ezentúl a 0 értéket?

Úgy lehetne mondani, hogy „2,5-mal korábban, 2,5-tel kisebb számnál”, hiszen minden bedobott változóhoz először hozzá kell adni 2,5-öt. Vagyis ezentúl az $x=-2,5$ helyen veszi fel azt a 0 értéket, amelyet korábban az $x=0$ helyen vett fel.

Tehát ha eddig x_0 helyen y_0 értéket vett föl, akkor ezentúl ezt az y_0 értéket az $x_0-2,5$ helyen veszi fel.

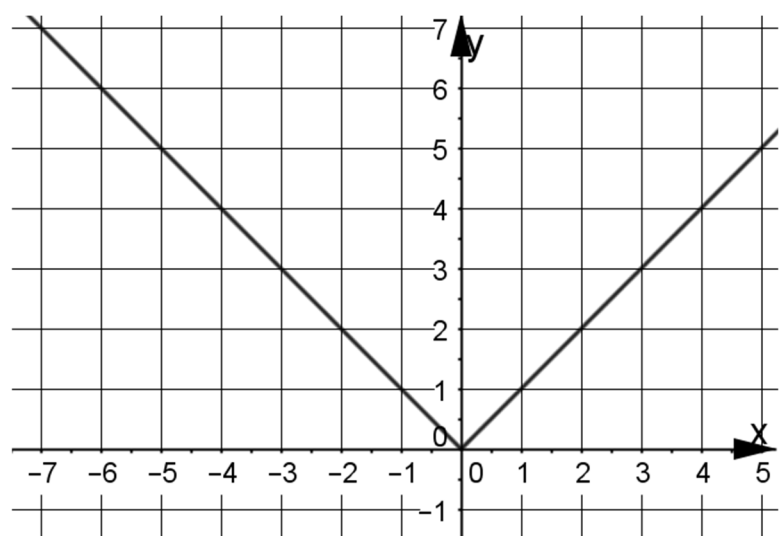
Az eredeti fv. x_0 helyen $|x_0|$ értéket vett föl. Az új függvénybe mit kell behelyettesíteni, hogy $|x_0|$ értéket adjon? A belső függvény kimenetébe dobjuk be az x_0 értéket, és nézzük meg, hogy mit kellett ahhoz bedobni, hogy a belső fv. x_0 -t adjon, vagyis mi az x_0 belső fv. szerinti ősképe: $b^{-1}(x_0)$

Szumma-szummárum: minden szokásos értéket „2,5-tel korábban” vesz föl; a belső függvény inverze is mutatja: az eredeti szám helyett annak a belső függvény inverzével trafózott ősképet kell bedobni a függvénykompozícióba, hogy a szokásos értéket kapjuk.

Tehát a kép balra tolódik 2,5 egységgel.

$$\text{graf}_g() = E^{(-2,5; 0)}(\text{graf}_{\text{abs}}())$$

Az eredeti függvény grafikonja a belső függvény inverzével trafózódik az x tengely mentén.



c) $f() : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y = \{x/3\}$

$b() : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y =$

$\text{frac}() : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y =$

$f() \equiv$

Ha eddig egy mondjuk piros ponttal jelzett y_0 értéket vett fel az x_0 helyen, akkor mit kell bedobni a függvénykompozícióba, hogy ugyanezt az „pirossal jelzett” y_0 értéket vegye föl?

Azt az értéket, amelyre a belső függvény x_0 -ad ki, ad át a külső függvénynek:

$b^{-1}(x_0)$ -t.

Konkrétan:

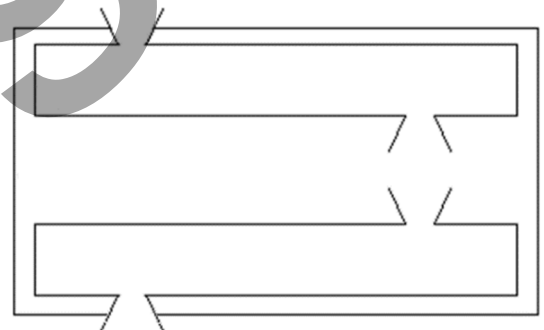
a belső függvény inverz függvénye: $b^{-1}() : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y = 3x$

ha x_0 -hoz a $\text{frac}()$, vagyis törtrész $\{ \}$ fv. $\{x_0\}$ -t y_0 -t rendel, akkor: $b^{-1}(x_0)$ -t, vagyis $3x_0$ -t kell bedobni a belső függvénybe, hogy a törtrész-függvénybe x_0 érkezzen, amiből ő y_0 -t gyárt. Vagyis:

Így háromszor akkora x -et kell bedobni a függvénykompozícióba, mint a törtrész függvénybe, hogy ugyanezt az y_0 -t adja ki a fv. Vagyis az x_0 -helyett $3x_0$ helyen veszi föl az y_0 értéket.

$\text{graf}_V() =$

Összességében: a belső függvény inverzével trafózzuk az x tengely mentén a külső függvény grafikonját.

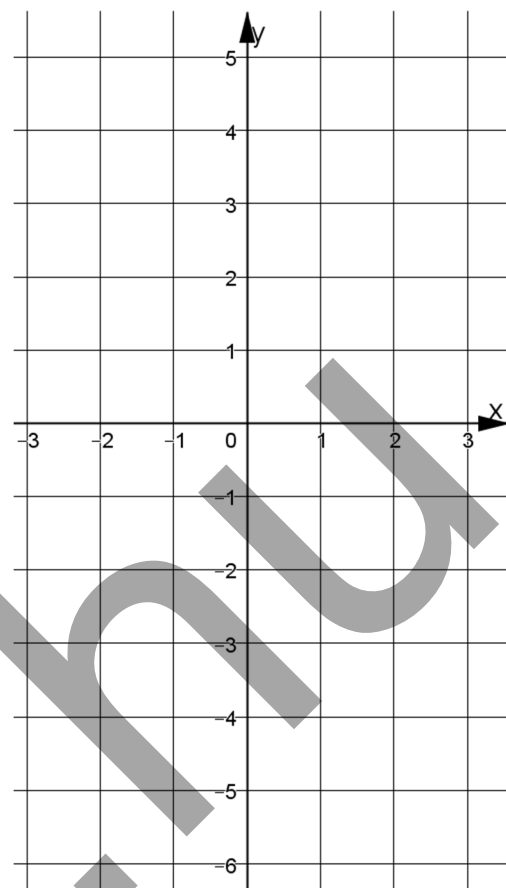
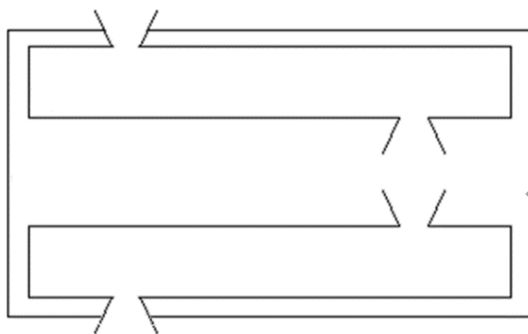


d) $f(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y = [2x]$

$b(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y =$

$\text{int}(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y =$

$f() \equiv$

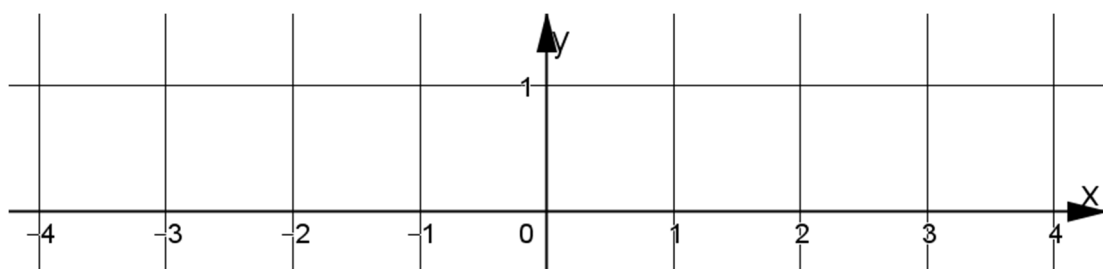
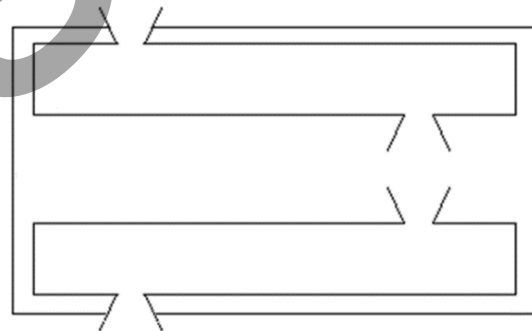


e) $f(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y = \{-3x\}$

$b(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y =$

$\text{frac}(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y =$

$f() \equiv$

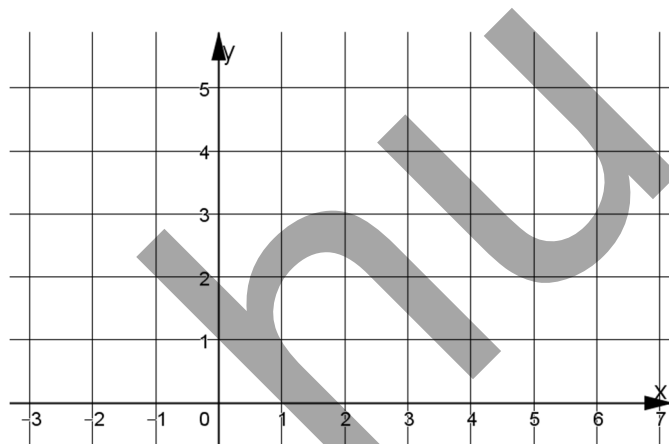
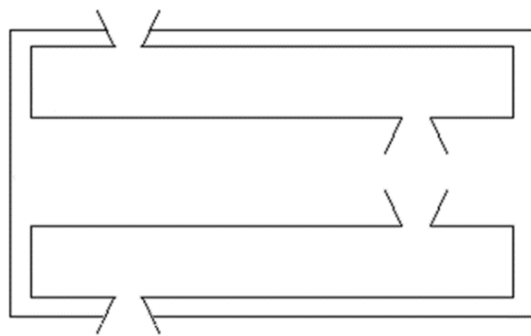


f) $f(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y = |2x - 5|$

b) $b(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y =$

int() $: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y =$

$f() \equiv$



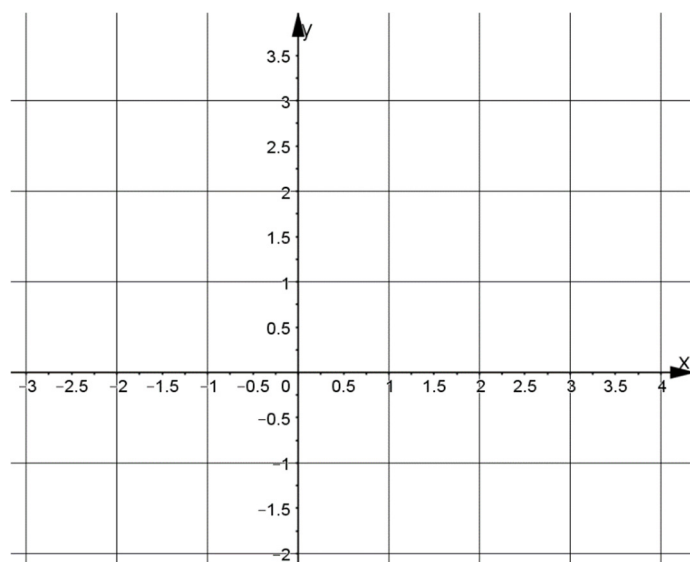
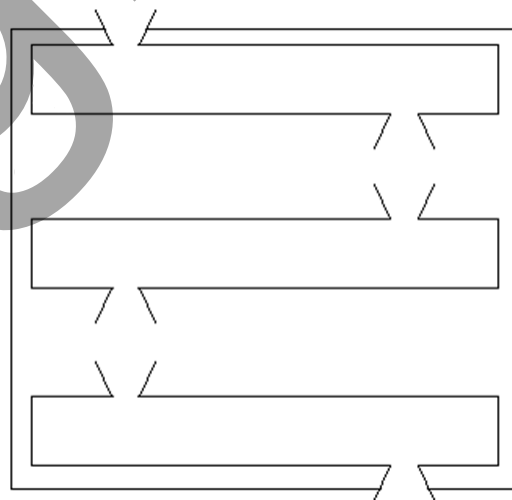
g) Minden együtt: $g(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y = -1,5 \cdot \text{frac}(2x - 1) + 3$

b) $b(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y =$

frac() $: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y =$

k() $: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y =$

$f() \equiv$



III/5) Add meg a trafót, illetve a trafóból az a, b, c, d számokat, ha: $g(x) = a \cdot f(c \cdot x + d) + b$ és $g(x) = -3 \cdot f(x+5) + 1$

$$g(x) = \frac{2}{3} \cdot f(x-3) - 2$$

$$g(x) = -\frac{4}{3} \cdot f\left(\frac{2x}{3}\right) + 1$$

$$g(x) = -2 \cdot f(2x-3) - 4$$

$$\text{graf}_g(x) \equiv E^{v(0;-3)}(x^{\lambda=-2/3}(\text{graf}_f(x)))$$

$$\text{graf}_g(x) \equiv E^{v(0;2)}(x^{\lambda=0,5}(y^{\lambda=-3}(\text{graf}_f(y))))$$

$$\text{graf}_g(x) \equiv E^{v(0;1)}(x^{\lambda=5}(E^{v(-2;0)}(\text{graf}_f(x))))$$

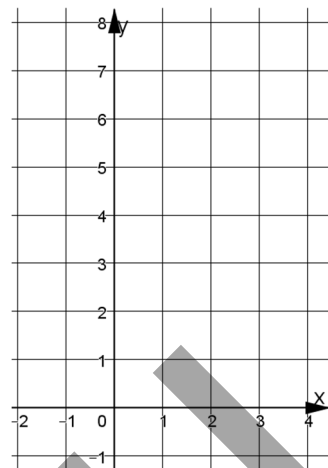
$$\text{graf}_g(x) \equiv E^{v(0;-2)}(x^{\lambda=-4}(E^{v(1;0)}(y^{\lambda=1/3}(\text{graf}_f(y))))))$$

III/6) Mit tesz egy lineáris fv. meredekségével az a -val ($a \in \mathbf{R}$) történő szorzás?

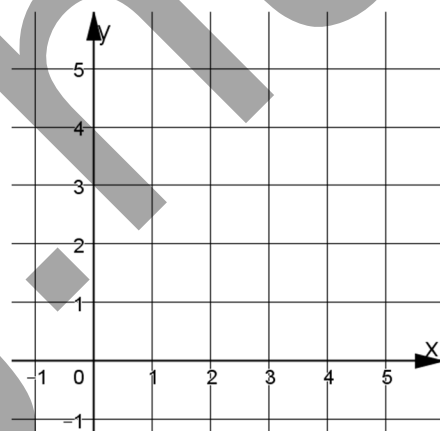
IV. Intervallumonként lineáris fv-ek folytatása

IV/1) Oldd meg grafikusan is

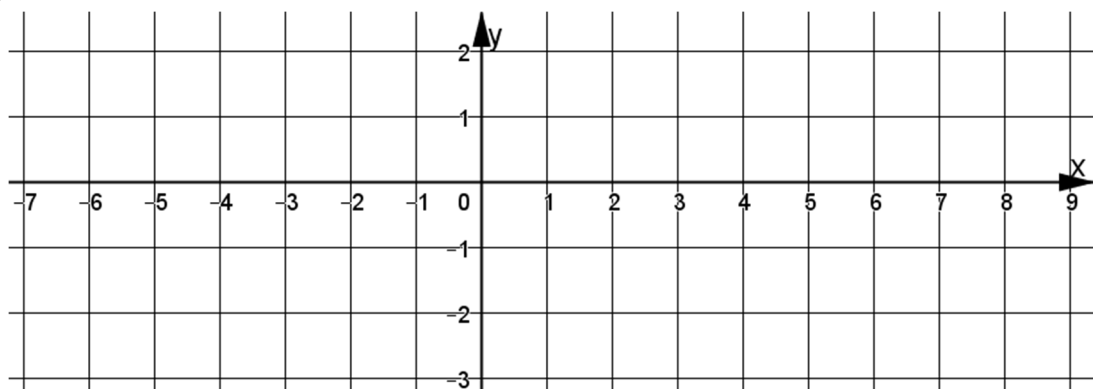
a) $3|x-1|+2=x+5$



b) $|2x-3|=x/2+1$



c) $\left|-\frac{x}{2}+1\right|-2=-\frac{x}{4}$



IV/2) Több abszolút érték: grafikusan is

a) $|x-1| - |2x-3| = -0,5$

Először is vizsgáljuk meg, mely intervallumokra kell szétszedni a bal oldal függvényét.

Intervallumonkénti mo. - töréspontok keresésével:

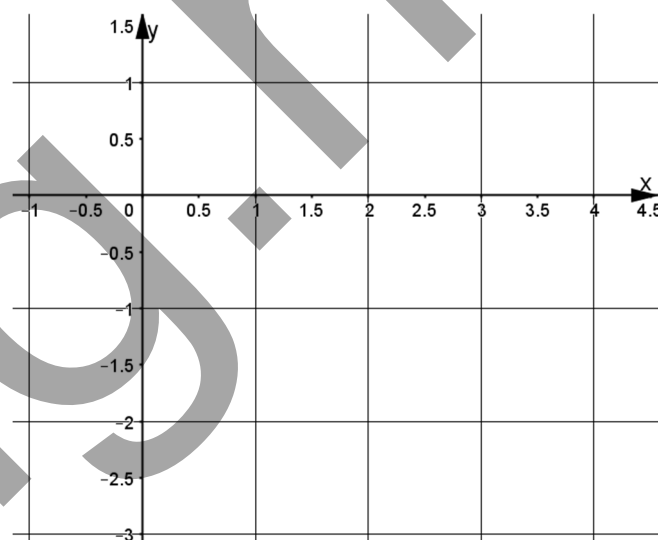


I.

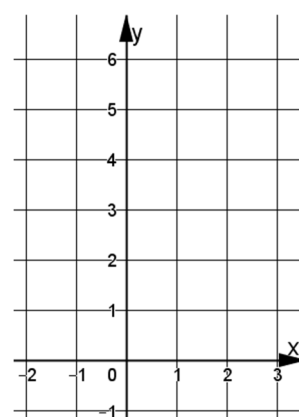
II.

III.

$$\begin{array}{l} f \mid \\ \mid -\infty; \mid : \\ f \mid \\ \mid \quad ; \quad \mid : \\ f \mid \\ \quad : \end{array}$$



b) $|2x-1| + |-1-3x| = x+2$



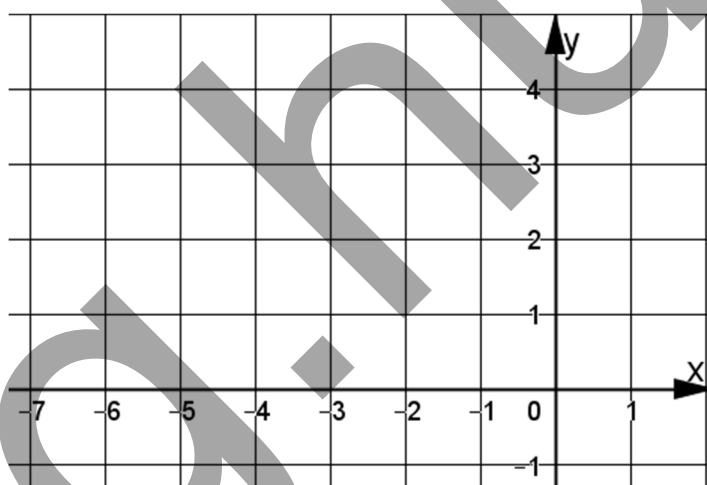
c) $|x+3| > \frac{x}{3} + 2$

I.

II.

Vizsgáljuk meg grafikusán is!

$$\begin{array}{l} f \\] \quad ; \quad] \\ f \\ : \end{array}$$



d) $2 \cdot |\operatorname{sgn}[x]| = \{x\} - 1$

e) $|||x| + 2x| + 3x| + 1| = -|\operatorname{sgn}(x)| + 1$

f) $2 \cdot \operatorname{sgn}((x-2)^2 - 1) = |2x-3| - 1$

I.

II.

III.

V. Számsokaság jellemzése – egy kis statisztika:

V/1) Távolságösszegek minimuma

- a) Adott: $a=-3$; $b=2$. Kell az a szám a számegyenesen, amelynek a két számtól vett távolságának összege minimális.

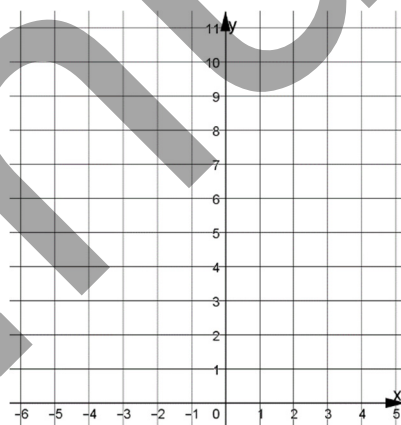
Legyen a keresett szám: x .

Ekkor az „ a ”-tól vett távolsága:

A „ b ”-tól vett távolsága:

Vizsgáljuk meg a következő függvényt, hol van a minimum helye:

$f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; y =$



Vagyis látható, hogy bármely számot választva a $[-3; 2]$ intervallumból x -nek, a távolságösszeg: lesz, és az a minimum.

Ábrázoljuk: $a, b \in \mathbb{R}; f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; y = |x-a| + |x-b|$

Legyen pl.: $a < b$.

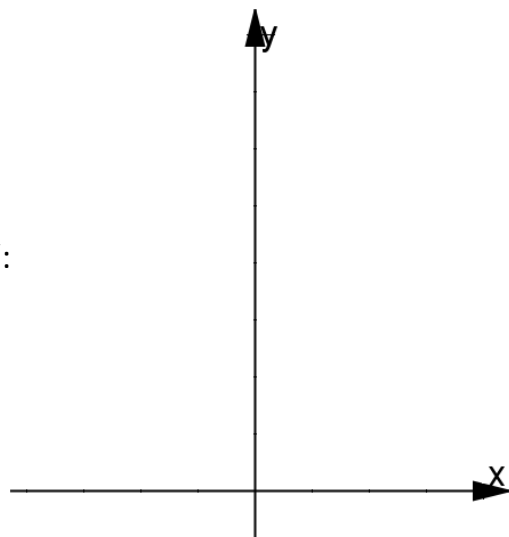
Ekkor:

I.

II.

III.

Vagyis látható, hogy a függvény a következő menetű:



V/2) Számsokaság jellemzése

a) Definíciók

Egy dobókockával 20-szor dobtunk, s táblázatba foglaltuk, hogy melyik számot hányszor dobtuk:

szám:	1	2	3	4	5	6
darab:	3	4	3	5	2	3

A táblázat alapján a 20 adat növekvő sorrendben:

1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 6.

Az adathalmazt mintának is szoktuk nevezni.

- **Terjedelem:** A legegyszerűbb mérőszám, amivel a szóródást jellemezhetjük: a terjedelem. A számsokaság legnagyobb és legkisebb számának különbségét terjedelemnek nevezzük. A fenti számsor terjedelme: 5
- **Átlag (számtani közép):** az adatok összege osztva az adatok számával. Jelen példában: $(3 \times 1 + 4 \times 2 + 3 \times 3 + 5 \times 4 + 2 \times 5 + 3 \times 6) : 20 = 3,4$
- **Módusznak nevezzük a leggyakoribb adatot.** Jelen esetben legtöbbször a 4-es fordul elő, így a módusz = 4. Ha lenne még egy adat, ami szintén ötször fordulna elő, akkor két módusza lenne az adathalmazunknak. Tehát móduszból lehet több is.
- **Mediánnak nevezzük a (növekvő vagy –néha csökkenő -) sorba rendezett adatok középső elemét.** Ha 21-szer dobtunk volna, akkor a sorba rendezett adatok tizenegyedik eleme lenne a medián. **Most páros darab adat van, ilyenkor a két középső adat átlagát nevezzük mediánnak.** Így most a tizedik és a tizenegyedik adat átlagát kell kiszámolni: $(3 + 4) : 2 = 3,5$.

A növekvő (v. csökkenő) sorrendbe tett számok közül: $2k+1$ db esetén a $k+1$ -edik (a középső), $2k$ db. esetén a k . és $k+1$. számtani közepe (a két középső számtani közepe).

- b) Egy faluban 38-as lábtól 42-es lábúig élnek az emberek. Egy szegény cipész csak egy méretet tud gyártani. Melyik legyen az? Módusz, Medián, Átlag (számtani közép)

- c) Írjuk fel, hogy melyik *hónap* az osztályban a születéshónapok módusza és mediánja.

- d) Péter matek jegyei: 4; 5; 4; 4; 1; 2; 5; 3; 1; 5
Mekkora a terjedelem, a módusz, a medián?

- e) Írjuk fel: az osztályban tanulók lábméretének terjedelme, módusza, mediánja, számtani közepe.

- f) Készítsünk olyan 10 természetes számból álló számadatsort, amely módusza 2, mediánja 3, átlaga 8.

Mo.:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.

- g) Állítás: Adott egy A számsokaság: elemei $a_1; a_2; a_3 \dots a_k$.

$$\sum_{i=1}^k |x - a_i| = \min \Leftrightarrow x = \text{a számsokaság mediánja.}$$

Figyelem, ez nem halmaz, lehet sok egyforma is!!!

Nem bizonyítunk, csak felvázoljuk a bizonyítás gondolatmenetét:

Pl.: 5 db szám: $-10; -5; -1; 2; 5$

$$\text{ABS}(x - (-10)) + \text{ABS}(x - (-5)) + \text{ABS}(x - (-1)) + \text{ABS}(x - 2) + \text{ABS}(x - 5) =$$

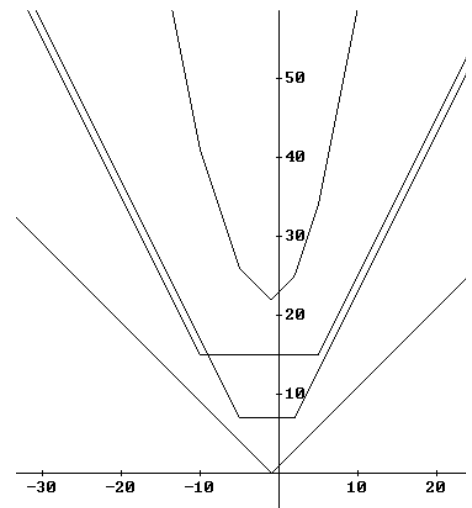
$$f(x) = |x+10| + |x+5| + |x+1| + |x-2| + |x-5|$$

Vigyázat, ez a szám véletlenül sem a számtani közép:

$-10; -5; -1; 2; 5$

mediánja:,

míg számtani közepe:



Másodfok a Pitagorasz-tétel előtt

I. A másodfokú függvény

I/1) Definíció és a parabola

- a) Def.: Az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = ax^2 + bx + c$ (a, b, c paraméter; $a \neq 0$) hozzárendelési szabályú függvényeket másodfokú függvényeknek nevezzük.

Tétel: (11. osztályban később bizonyítjuk): **A másodfokú függvények grafikonja parabola**, melynek tengelye párhuzamos az ordinátával.

- b) A parabola

tanm_fuggvenyek_egyenletek_G_1_1_b_parabola.ggb

A parabola definíciója

Adott egy v vezéregyenes és egy $F \notin v$ fókuszpont.

Parabola := $\{P \in \text{Sík} \mid d(P; F) = d(P; v)\}$

Elnevezések:

F : fókusz (v. gyújtópont)

v = **vezéregyenes** v. **direktrix**

a parabola **paramétere** = $p = d(F; v)$
(ez távolság, adat)

tengely: a v -re merőleges, fókuszon áthaladó egyenes: tengely

tengelypont v. **csúcspont**:

tengely $\cap$ parabola:

vezérsugár:

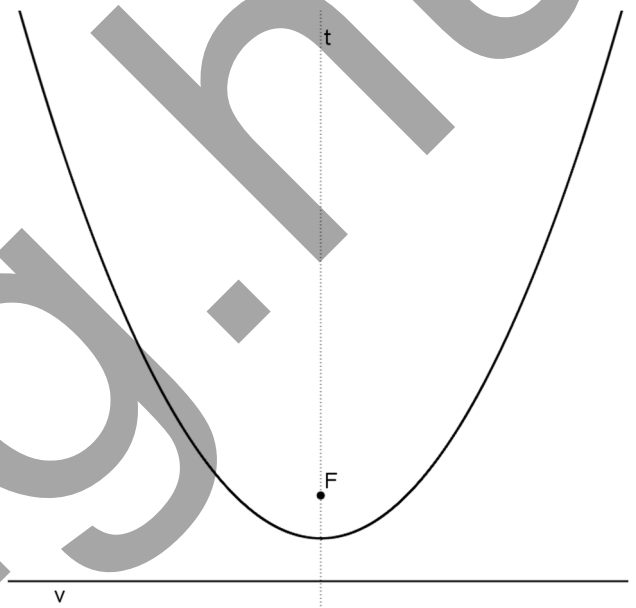
a fókuszról a parabola egy pontjához húzott szakasz;
illetve a pontból a vezéregyenesre állított merőleges szakasz.

A definícióból következő néhány alaptulajdonság:

Tükrös a tengelyre

A C tengelypont felezi a fókusz és a vezéregyenes távolságát.

Szerkesszünk meg egy 1 cm paraméterű parabola néhány pontját.



I/2) Az alapfüggvény és vizsgálata

$\text{sqr}() : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y = x^2.$

$D_{\text{sqr}}() =$

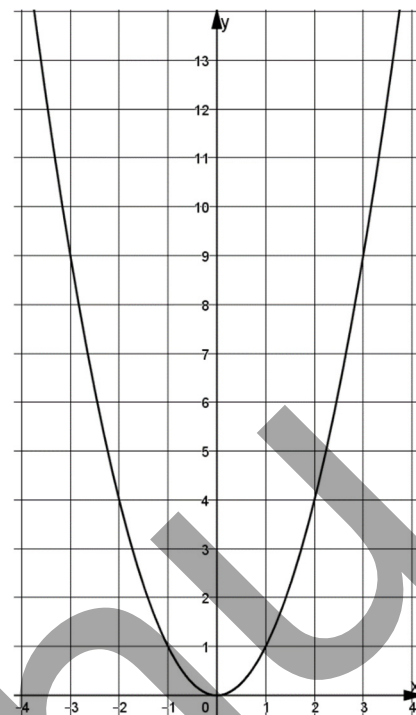
Paritása:

Grafikonja: tükrös az _____

Injektivitás:

ZH: $x =$

Menet:

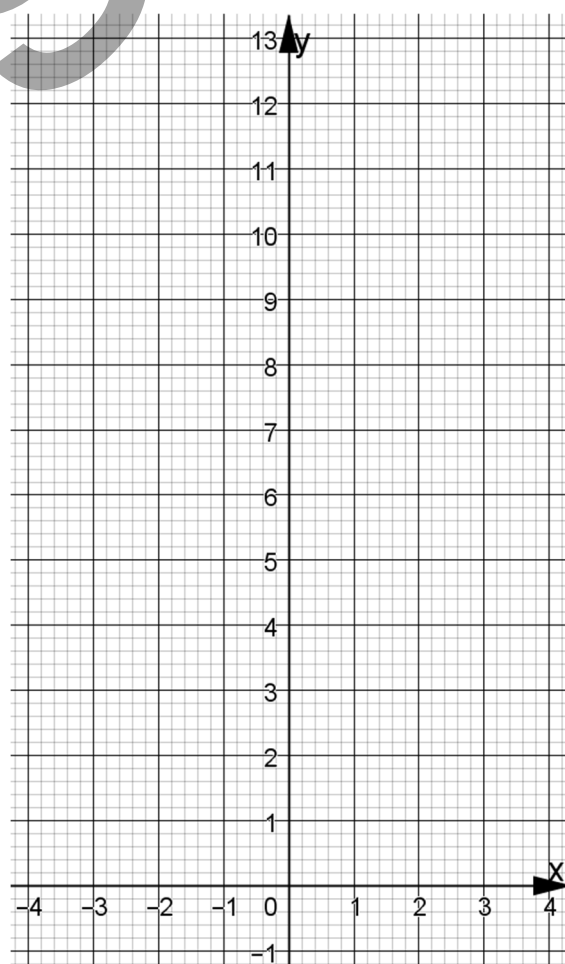


Intervallumok- helyek:	$] -\infty; 0[$	$[0]$	$] 0; \infty[$
(Előjel:)			
Menet:			
Szélsőérték:			

Csúcspont: $C(\quad ; \quad)$

$R_{\text{sqr}} =$

Alakja: felfelé nyíló parabola



l/3) Trafózzuk a másodfokú alapfüggvényt

Először jellemzés nem kell, csak tologassuk a koordináta rendszerben. **A csúcspontot és a parabola állását érdemes figyelni!**

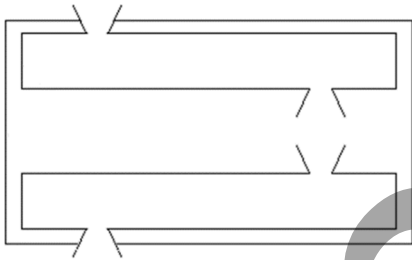
Add meg a transzformációt és a csúcspont koordinátáját, ha az alap függvény hozzárendelési szabálya: $x \mapsto x^2$;

illetve mondd meg a zérushelyek számát!

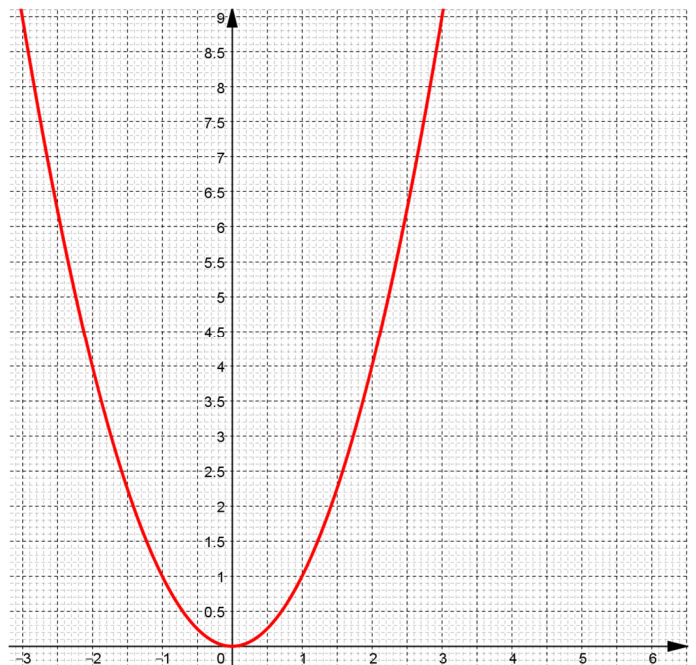
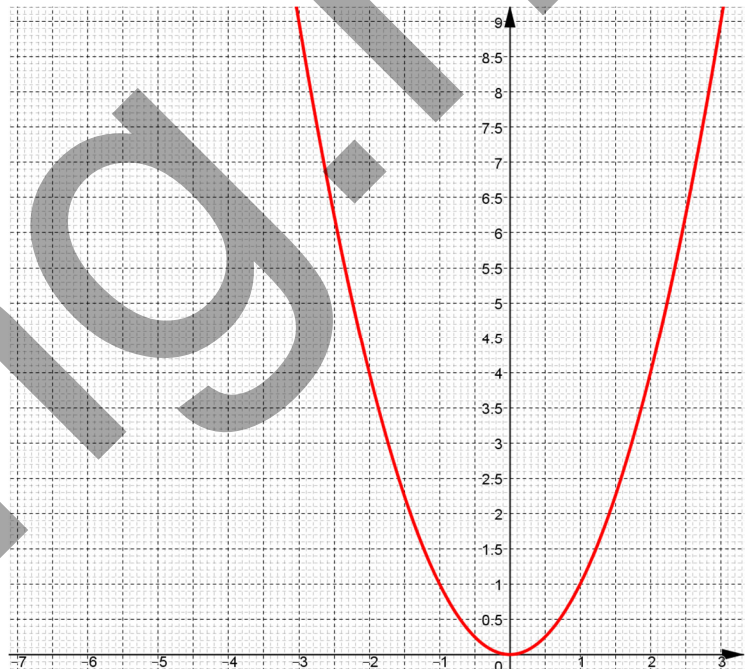
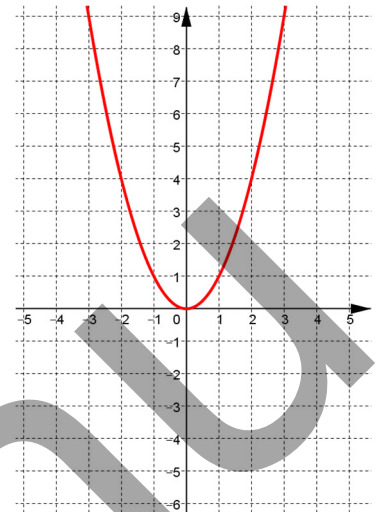
$$g(x) = -x^2 + 1$$

$$y = -\frac{2}{3}x^2 + 2$$

$$y = (x+3)^2$$



$$f(x) = (x-2)^2$$



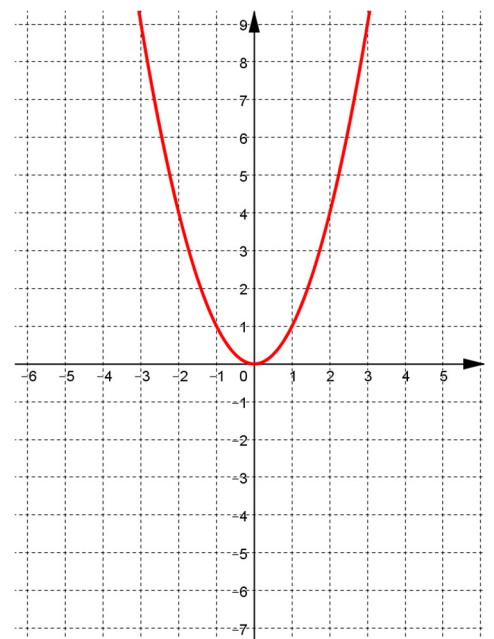
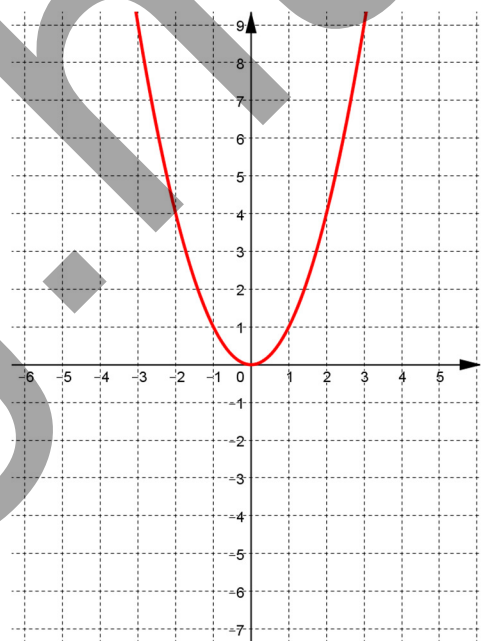
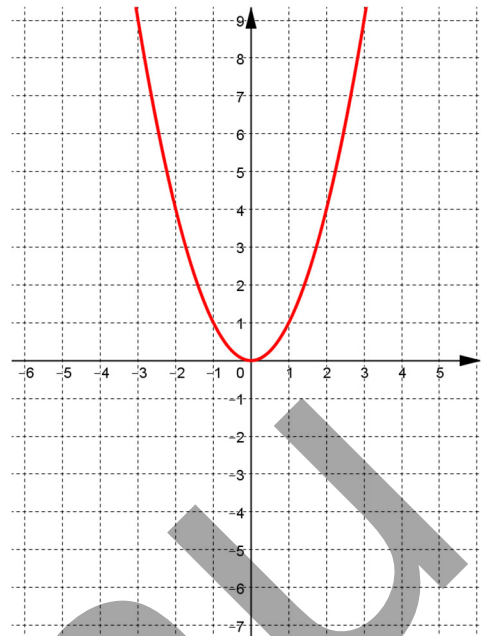
$$x \mapsto \frac{1}{2}(x-3)^2 + 2$$

$$y = -2(x+2)^2 + 3$$

$$x \mapsto -\frac{3}{2}(x+1)^2 - 2$$

$$f(x) = -\frac{1}{3}(2x-5)^2 + 1$$

$$y = -\frac{5}{6}\left(2 + \frac{3x}{2}\right)^2 + 4$$



I/4) Jellemezd és ábrázold

a) $f():\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}; x\mapsto -\frac{1}{2}(x-3)^2+2$

$D_f=$

Trafó:

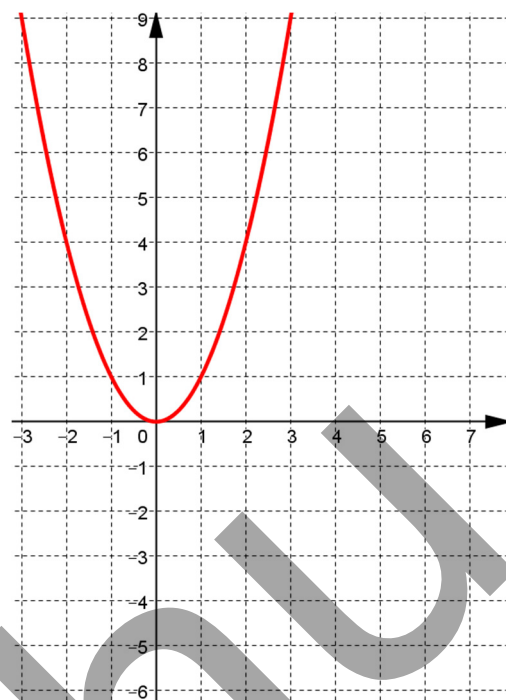
$C(\quad ; \quad)$

Alakja

ZH:

Menet:

$R_f=$



b) $g():[-4;2]\rightarrow\mathbf{R}; x\mapsto 3(x+1)^2-\frac{4}{3}$

$D_g=$

Trafó:

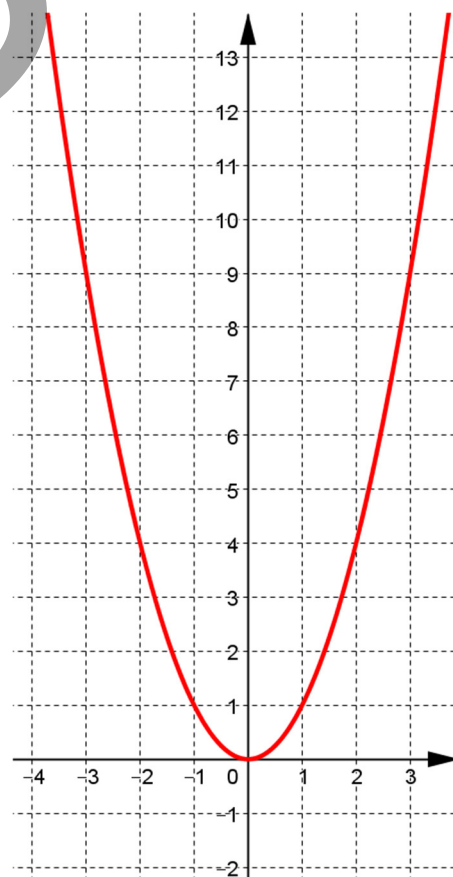
$C(\quad ; \quad)$

Alakja

ZH:

Menet:

$R_g=$



- c) Írd föl, hogy milyen transzformációkkal jutunk el a $\text{graf}(x^2)$ -től a következő hozzárendelési szabályú függvénye képéig. Add meg a **csúcspont** koordinátáját, az **állását** és azt, hogy van-e **zérushelye**, és ha van, hány zérushely van!

$$y = -3(x-2)^2 - 6$$

$$y = -\frac{2}{5}(3-x)^2 + 1$$

$$y = (2x-1)^2$$

$$y = -3\left(\frac{1}{2}x + 4\right) + 7$$

Írd föl azt a 2. fokú fv. hozzárendelési szabályt, melyet a következőképpen kaptunk x^2 fv. grafikonjából. Add meg a **csúcspont** koordinátáját, az **állását** és azt, hogy van-e **zérushelye**, és ha van, hány zérushely van!

$$E^{v(0;3)}(x^{\lambda=-0,3}(E^{v(-5;0)}))$$

$$E^{v(0;-2)}(x^{\lambda=3}(E^{v(2;0)}))$$

$$E^{v(0;-1)}(x^{\lambda=-1/3}(E^{v(-2;0)}))$$

Vegyük észre: hogy $(ax)^2 = a^2(x)^2$, vagyis az y tengelyre történő merőleges affinitású képe megegyezik egy x tengelyre történő merőleges affinitású képpel.

I/5) A csúcsponti egyenlet

- a) Írj föl egy olyan lefelé nyíló parabola grafikonú másodfokú fv-t, melynek:

$C(-1;6)$, és lefelé nyílik:

$C(3;-2)$, és felfelé nyílik:

- b) A parabola csúcsponti egyenletének általános alakja

$a \neq 0$; $a(x-u)^2 + v$ (Vigyázat, az u és v lehet pozitív, 0, negatív) $\Rightarrow C(u;v)$

$a > 0 \Rightarrow$ minimum hely: u , minimum érték: v

$a < 0 \Rightarrow$ maximum hely: u , maximum érték: v

Pl: $-3(x-2)^2 + 4$ $u =$ $v =$ $C(\quad)$

$\frac{2}{3}(x+5)^2 - 3$ $u =$ $v =$ $C(\quad)$

c) A „csúcsonti egyenlet” konkrét példákon.

$$f():[0;3] \rightarrow \mathbf{R}; x \mapsto \frac{3}{4}(2x-2)^2+1$$

$D_f =$

Trafó:

$C(\quad ; \quad)$

Alakja

ZH:

Menet (szélsőértékek!):

$R_f =$

$$g():[-5;0] \rightarrow \mathbf{R}; y = -\frac{1}{2}(2x+6)^2+8$$

$D_g =$

Trafó:

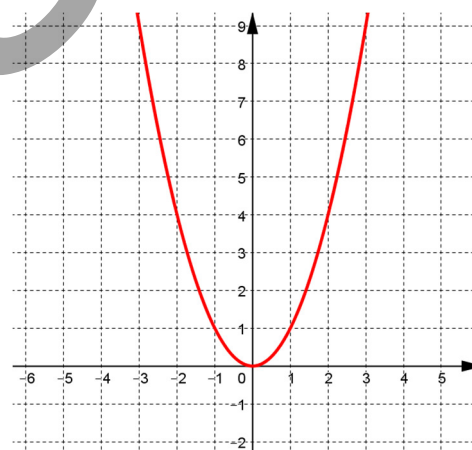
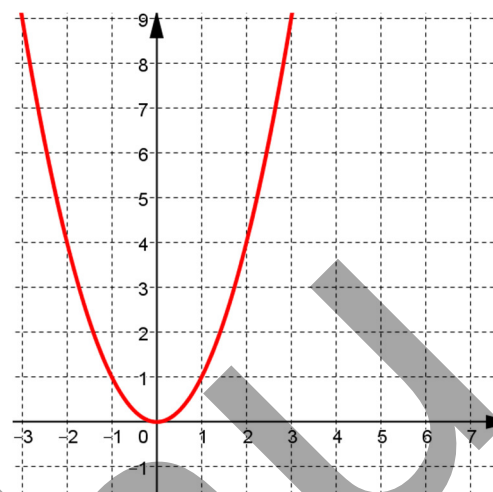
$C(\quad ; \quad)$

Alakja

ZH:

Menet (szélsőértékek!):

$R_g =$



II. A négyzetgyök és a négyzetgyök függvény

II/1) Bevezetés, definíció és példák

a) Adott területű négyzetek oldalhosszai

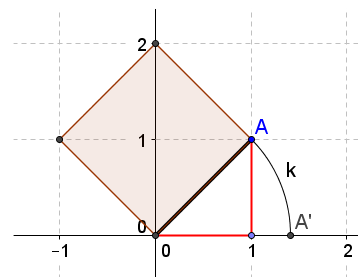
Egyenlőszárú derékszögű $\triangle$, két befogója: 1–1 egység.

Az átfogóra emelt négyzet területe: 2.

Mekkora lehet ennek a négyzetnek az oldala?

Az a szám (ha van olyan) amelyet ha négyzetre emelek, 2-öt kapok

Tudjuk, hogy ha $x_1 < x_2$ és $x_1, x_2 \in \mathbf{R}_0^+ \Rightarrow x_1^2 < x_2^2$.



oldal hossza		oldal hossza		terület		terület
1	<	oldal < 2		$\Rightarrow 1^2$	<	2 < 2^2
1,4	<	oldal < 1,5		$\Rightarrow 1,4^2$	<	2 < $1,5^2$
1,41	<	oldal < 1,42		$\Rightarrow 1,41^2$	<	2 < $1,42^2$
1,414	<	oldal < 1,415		$\Rightarrow 1,414^2$	<	2 < $1,415^2$
1,4142	<	oldal < 1,4143		$\Rightarrow 1,4142^2$	<	2 < $1,4143^2$
1,41421	<	oldal < 1,41422		$\Rightarrow 1,41421^2$	<	2 < $1,41422^2$
1,414213	<	oldal < 1,414214		$\Rightarrow 1,414213^2$	<	2 < $1,414214^2$

Körülbelül: 1,4142 13562 3730950488016887242097

Ezt nem szeretjük és pontatlan is, ezért azt írjuk, hogy $\sqrt{2}$, és ez azt a nemnegatív számot jelenti, amelynek a négyzete 2.

b) Szerkesztés

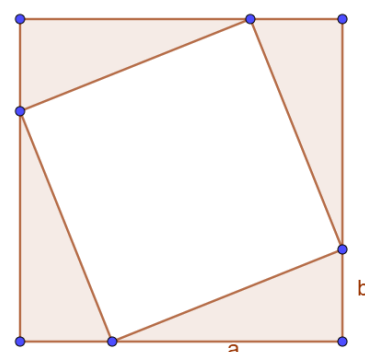
A fehér négyzet területét figyeljük meg:

$$T = (a+b)^2 - 2ab =$$

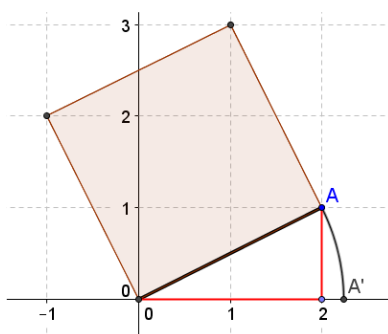
Ez azt jelenti, hogy a fehér négyzet oldala:

Így: Derékszögű háromszögben az átfogó =

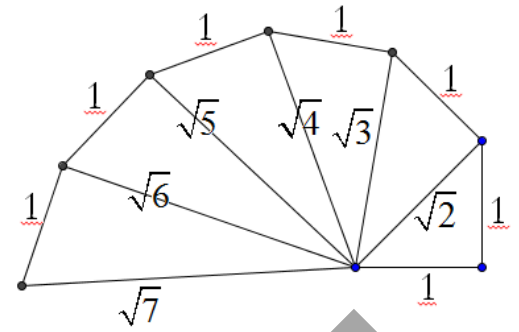
Jelekkel: $c =$



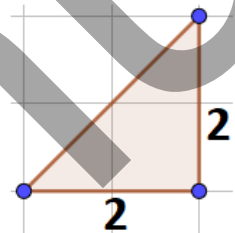
Például a következő négyzet területe így: 5 egység, vagyis az oldala: $\sqrt{5}$



Nyilván tudnánk így pl $\sqrt{5}$ hosszú szakaszt szerkeszteni. $\sqrt{7}$ -et is!!!
 $\sqrt{2}; \sqrt{3}; \sqrt{4}; \sqrt{5}; \sqrt{6}; \sqrt{7}$



De úgy is lehet pl. $\sqrt{8}$ -at szerkeszteni, hogy 2x2-es derékszögű háromszöget rajzolok...



- c) **Def:** Valamely nemnegatív valós szám négyzetgyöke az a nemnegatív valós szám, melynek négyzete az eredeti szám.

$$a \in \mathbf{R}^+_0 \Rightarrow \sqrt{a} := c \in \mathbf{R}^+_0 \rightarrow c^2 = a$$

A kérdése: „Mit kell négyzetre emelni ahhoz, hogy az argumentumot megkapjuk?”

Pl.: $\sqrt{9} = 3$ $\sqrt{2,25} = 1,5$

- d) Példák: $\sqrt{1} = 1$ mert $1^2 = 1$

$$\sqrt{64} = \text{mert } 8^2 = 64$$

$$\sqrt{0,36} = \text{mert } 0,6^2 = 0,36$$

$$\sqrt{0} = \text{mert } 0^2 = 0$$

$$\sqrt{\frac{25}{9}} = \text{mert } \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$$

$$\sqrt{200} \text{ kb. mert } 14,1^2 \text{ kb. } 200$$

$$(\sqrt{64})^2 =$$

$$(\sqrt{43,1})^2 =$$

$$(\sqrt{3})^4 =$$

$$\sqrt{-9} =$$

$$\sqrt{17^2} =$$

$$\sqrt{17^4} =$$

$$\sqrt{17^6} =$$

$$\sqrt{17^8} =$$

$$\sqrt{57600} = \sqrt{2^8 \cdot 3^2 \cdot 5^2} =$$

$$\sqrt{2^6 \cdot 3^4 \cdot 11^{12}} =$$

Vegyük észre: a négyzetgyök „lefelezi” a kitevőt!

$$\sqrt{30} \approx$$

$$\sqrt{0} = 0 \text{ mert } 0^2 = 0$$

$\sqrt{-4}$ értelmetlen (számunkra), mert bármely valós szám négyzete nemnegatív.

$$-\sqrt{2} \approx -1,4142...$$

$$\sqrt{(-75)^{12}} = \quad \text{mert} \quad = (-75)^{12}.$$

$$\sqrt{2^8} = \quad \text{mert} \quad = 2^8.$$

$$\sqrt{5^2} = \quad \sqrt{(-5)^2} = \quad \sqrt{a^2} =$$

$$\sqrt{2^{-4}} = \quad \sqrt{10^{-8}} = \quad \sqrt{0,000001} =$$

„A NÉGYZETGYÖK LEFELEZI AZ ALATTA TALÁLHATÓ ARGUMENTUM KITEVŐJÉT”

Rögtön kérdezhetnénk: ha $(-2)^2 = 4$ és $2^2 = 4$, akkor milyen alapon szűkítjük le a nemnegatívakra? Mert valamelyikre le kell:

Ugyanis ha

hétfőn:

$$\sqrt{4} = 2$$

majd kedden:

$$\sqrt{4} = -2$$

szerdán adjuk össze őket: $2\sqrt{4} = 0$ stb.

Még most tisztázzuk:

$$\text{Egyenlet: } x^2 = 4$$

Ennek az egyenletnek két megoldása van

$$x^2 - 4 = 0$$

$$(x-2)(x+2) = 0$$

$$x_1 = 2; x_2 = -2$$

$$\text{Művelet } \sqrt{4} = ?$$

Ez egy művelet elvégzése

Egy műveletnek **egy végeredménye** lehet:

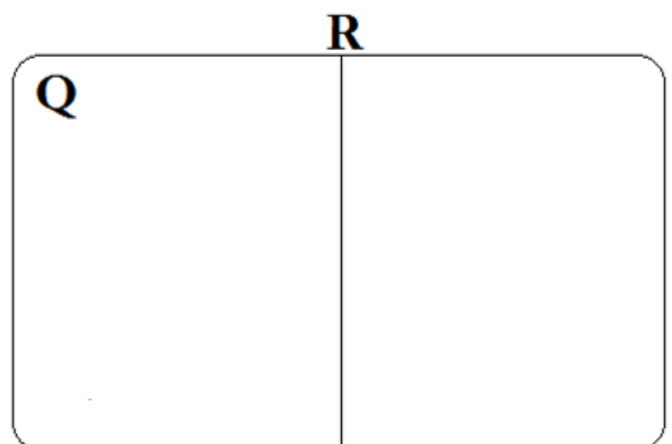
$$\sqrt{4} = 2$$

Még egyszer: egy művelet lehet nem injektív: $(-2)^2 = (2)^2$.

Egy egyenletnek lehet két megoldása. (Isd. előbb)

De egy műveletnek csak egy eredménye lehet.

- e) **Irracionális számok:** azok a számok, amelyek nem írhatók föl két egész szám hányadosaként. Az irracionális számok csakis végtelen NEM szakaszos tizedestörttel írhatók fel / közelíthetők meg bármely pontossággal.



II/2) Azonosságok, számítások

a) $a, b \geq 0 \Rightarrow \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

Biz.: Mindkét oldal négyzete, majd felhasználva a szorzás kommutativitását és asszociativitását!

Pl: $\sqrt{3} \cdot \sqrt{5} =$

Gyakorlása

$$\sqrt{28} \cdot \sqrt{63} =$$

$$\sqrt{14400000000} =$$

Kiemelés a gyökjel alól

$$\sqrt{18} =$$

$$\sqrt{27} =$$

$$\sqrt{160} =$$

$$\sqrt{2^5 \cdot 7^3 \cdot 11^4} =$$

Vegyük észre: **pozitív** számoknál:

$$\sqrt{a^{2k}} = \quad \text{hiszen} \quad = a^k. \quad \text{pl: } \sqrt{2^{14}} =$$

Mi van akkor, ha az „a” negatív?

Pl.: $\sqrt{(-3)^2} =$

$$\sqrt{(-5)^6} =$$

$$\sqrt{(-a)^{2k}} =$$

$$\sqrt{25a^2} =$$

$$\sqrt{5^2} =$$

$$\sqrt{(-5)^2} =$$

$$\sqrt{7^6} =$$

$$\sqrt{(-7)^6} =$$

$$\sqrt{96} =$$

$$\sqrt{4320} =$$

Gyorsan felbontjuk: $10 \cdot 432 = 10 \cdot 4 \cdot 108 = 10 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 27 =$

Így: $\sqrt{4320} =$

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} =$$

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt{6} =$$

$$\sqrt{3^3} \cdot \sqrt{3} =$$

$$\sqrt{18} \cdot \sqrt{12} =$$

$$\sqrt{20} \cdot \sqrt{45} =$$

$$\sqrt{200} =$$

Mindig ilyen legyen a végeredmény!

b) Hatványozás

$$\sqrt{23} \cdot \sqrt{23} =$$

$$\sqrt{23} \cdot \sqrt{23} \cdot \sqrt{23} \cdot \sqrt{23} =$$

$$(\sqrt{6})^2 =$$

$$(\sqrt{6})^3 =$$

$$(\sqrt{6})^5 =$$

$$(\sqrt{13})^2 =$$

$$(\sqrt{13})^3 =$$

$$(\sqrt{13})^4 =$$

$$(\sqrt{13})^5 =$$

$$(\sqrt{13})^{20} =$$

$$(\sqrt{13})^{21} =$$

c) Melléktanulmány: A $\sqrt{2}$ irracionalitása

A racionális számok azok, melyek felírhatók két egész hányadosaként. Pl.: $\frac{12}{5}$ stb. De megmutatható, hogy nincs két olyan egész szám, mely hányadosa $\sqrt{2}$ lenne.

d) $a \geq 0; b > 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$

Biz.: Mindkét oldal négyzete, felhasználva a szorzás kommutativitás- és asszociativitását!

$$\sqrt{\frac{289}{48}} =$$

Mindig ilyen (gyöktelenített nevező) legyen a végeredmény

$$\sqrt{\frac{121}{25}} =$$

$$\frac{\sqrt{147}}{\sqrt{12}} =$$

$$\sqrt{\frac{25}{9}} =$$

$$\sqrt{1,21} =$$

$$\sqrt{0,64} =$$

$$\sqrt{6,4} =$$

$$\sqrt{12,5} =$$

$$\sqrt{\frac{80a^3b^5}{45x^4}} =$$

$$\sqrt{0,2} =$$

$$\sqrt{0,32} =$$

$$\sqrt{0,0064} =$$

$$\sqrt{0,00000324} =$$

$$\frac{\sqrt{120ax^3}}{\sqrt{45a^3x}} =$$

$$\sqrt{2,125} =$$

e) Alap gyakorlatok:

$$\sqrt{x^2 - 2x + 1} =$$

$$\text{Mikor igaz: } \sqrt{x^4 - 8x^2 + 16} = 4 - x^2$$

$$\sqrt{28} =$$

$$\sqrt{\frac{180}{98}} =$$

$$\sqrt{27000} =$$

$$\sqrt{0,00005} =$$

$$\sqrt{16 \cdot 48 \cdot 125} =$$

$$\sqrt{1,69} =$$

$$\sqrt{\frac{1024 \cdot 243}{343 \cdot 250}} =$$

$$\sqrt{\frac{9}{4} : \frac{125}{36}} =$$

$$\sqrt{24^5} =$$

$$\sqrt{(-1,2)^4} =$$

$$(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1) =$$

$$(\sqrt{3} - 1)^2 =$$

$$(2\sqrt{5} + 3)^2 =$$

$$(2\sqrt{6} - \sqrt{8})(\sqrt{12} - \sqrt{3}) =$$

$$(\sqrt{5} - 2)^3 =$$

$$(\sqrt{6} - \sqrt{10})^2 =$$

$$\text{Melyik a nagyobb? } \frac{\sqrt{270}}{\sqrt{6}} \vee \frac{\sqrt{150}}{\sqrt{3}}$$

Alakítsd szorzattá (használhatsz gyökös kifejezést!):

$$x^2 - 5 =$$

$$3x^2 - 16 =$$

$$2x^2 - 3 =$$

$$x^2 + 5 =$$

f) Gyakorló példák

(i) Végezd el:

$$(\sqrt{2} + 3\sqrt{18} + 9\sqrt{50})\sqrt{2} =$$

$$(5 - 3\sqrt{2})(5 + 3\sqrt{2}) =$$

$$(4\sqrt{18} - 5\sqrt{50} + 3\sqrt{98})2\sqrt{2} =$$

$$(\sqrt{54} + 4\sqrt{3})(3\sqrt{6} - \sqrt{48}) =$$

$$(\sqrt{343} + \sqrt{245} + \sqrt{175} + \sqrt{125})(\sqrt{7} - \sqrt{5}) =$$

$$(3\sqrt{3} - \sqrt{5})(\sqrt{20} + 3\sqrt{12}) =$$

(ii) Végezd el

$$(\sqrt{15} - 2)(\sqrt{15} + 2) =$$

$$(\sqrt{5} - 2)^2 =$$

$$(2\sqrt{3} - 3)^2 =$$

$$(\sqrt{21} - \sqrt{48})(\sqrt{21} + \sqrt{48}) =$$

$$(2\sqrt{6} - \sqrt{15})^2 =$$

$$(\sqrt{15} - 3)^2 =$$

$$\text{Érdekesség: } \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} =$$

$$\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} =$$

$$\sqrt{14 - 6\sqrt{5}} =$$

$$\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} =$$

(iii) Végezd el:

$$\sqrt{7 + \sqrt{13}} \sqrt{7 - \sqrt{13}} =$$

Mi lenne, ha bővítenénk 2-vel a gyökjel alatt...

$$(\sqrt{8 + \sqrt{15}} + \sqrt{8 - \sqrt{15}})^2 =$$

$$\sqrt{\sqrt{44} + \sqrt{8}} \cdot \sqrt{\sqrt{44} - \sqrt{8}} =$$

$$(\sqrt{\sqrt{83} - \sqrt{19}} + \sqrt{\sqrt{83} + \sqrt{19}})^2 =$$

II/3) A nevező gyöktelenítése

Bővítsd úgy, hogy ne legyen a nevezőben gyök, vagyis „gyöktelenítsük a tört nevezőjét”

$$\frac{14}{\sqrt{2}} =$$

$$\frac{15}{2\sqrt{3}} =$$

$$\frac{2\sqrt{21}}{\sqrt{14}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} =$$

$$\frac{4\sqrt{3}}{2-\sqrt{7}} =$$

$$\frac{6\sqrt{15}}{7-3\sqrt{5}} =$$

$$\frac{6\sqrt{15}}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} =$$

$$\frac{5\sqrt{6}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}} =$$

$$\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{18}-\sqrt{12}} =$$

$$\frac{2\sqrt{15}}{6-3\sqrt{12}} =$$

II/4) Az inverz függvény képe az eredetihez képest

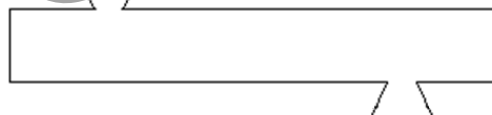
Legyen $f()$ invertálható.

Legyen adva egy $f()$ függvény grafikonjának néhány pontja:

A(-1;-2) B(0;1) C(2;5) D(4;4) E(6;7) F(7;9) G(8;8)

	A	B	C	D	E	F	G
x	-1	0	2	4	6	7	8
y	-2	1	5	4	7	9	8

Rajzoljuk föl az $f()$ és az $f^{-1}()$ függvény grafikonjának pontjait.

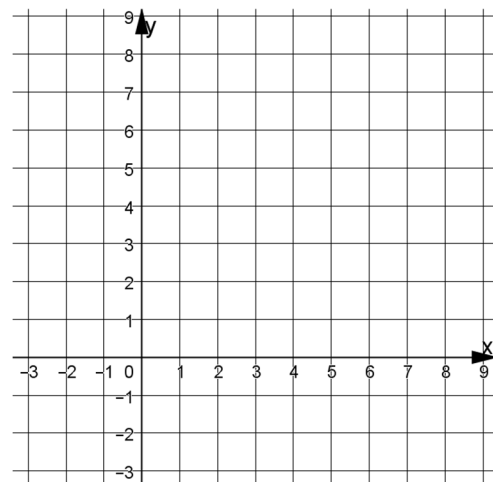


Gondolkodjunk:

Milyen transzformáció és hogy viszi az eredeti fv képét az inverzbe?

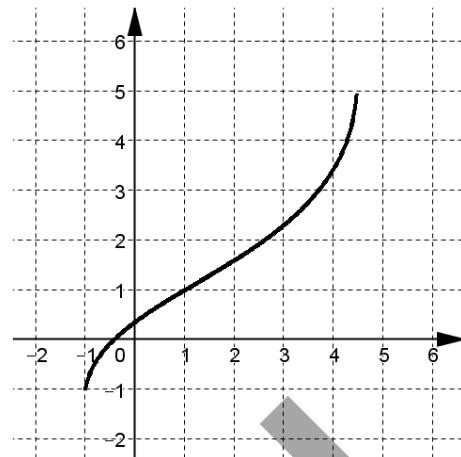
1. A fixpontok hol lehetnek?

2. mindenképp
transzformációnak kell lennie



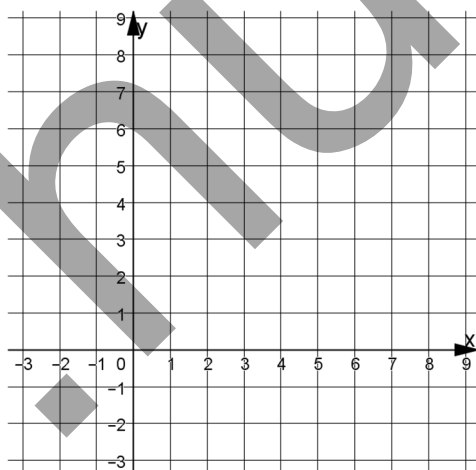
Háromszögekkel látszódik: _____

Rajzold meg az ábrán látható grafikonú függvény inverzének a grafikonját:



Invertáld a következő függvényt és ábrázold az eredetit és az inverz fv-t is:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; y = -x/2 + 1$$



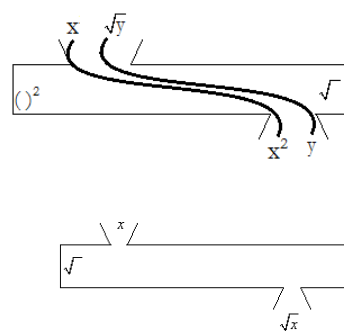
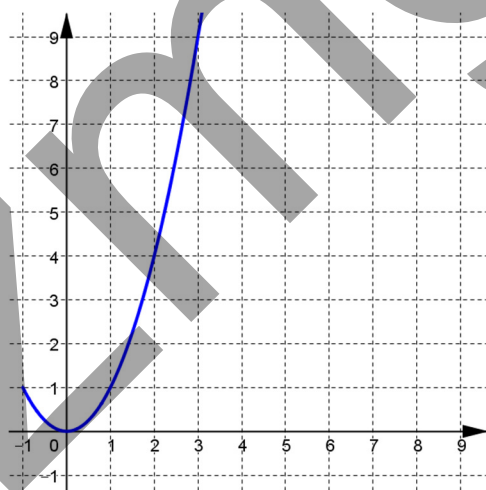
II/5) A négyzetgyök függvény

a) Az alapfüggvény

$$\text{sqrt}(): \mathbb{R}^+_0 \rightarrow \mathbb{R}^+_0; x \mapsto \sqrt{x}$$

Látható, hogy ez a függvény a következőnek az inverze:

$$\text{sqr}(): \mathbb{R}^+_0 \rightarrow \mathbb{R}^+_0; x \mapsto x^2, \text{ ezért könnyen tudjuk ábrázolni.}$$



$D_{\text{sqrt}} =$

ZH:

Menet táblázat

Injektivitás:

$R_{\sqrt{}} =$

Alakja:

A csúcspont koordinátája: $C(\quad ; \quad)$

b) Trafózzuk az alapfüggvényt: $\text{sqrt}(\) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; x \mapsto \sqrt{x}$

$f(\) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; x \mapsto -2\sqrt{x+3}+1$

$D_f =$

Négyzetgyöknél az értelmezési tartomány keresése mindig:

A négyzetgyök argumentuma:

Trafó:

$C(\quad; \quad)$

ZH:

Menet-táblázat

Alakja:

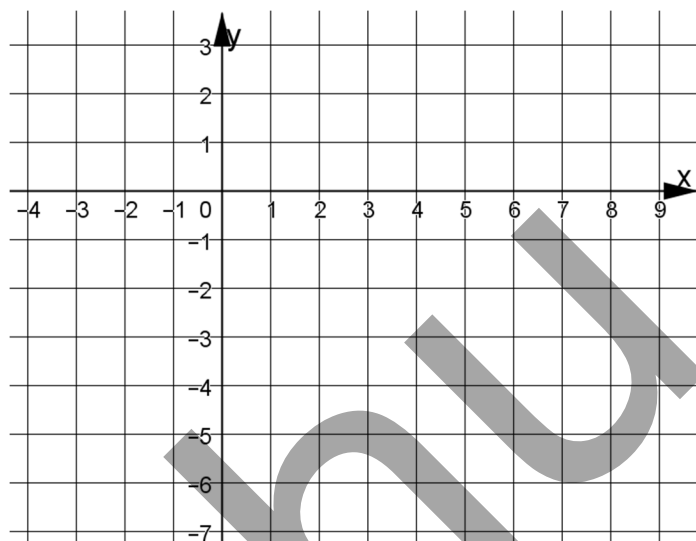
$R_f =$

Vegyük észre: a négyzetre-emelés nem ekvivalens átalakítás:

Vagyis: $a=b \Rightarrow a^2=b^2$ de visszafelé nem igaz a következtetés.

Oldjuk meg az egyenletet! Emeljük négyzetre a következő egyenlet mindkét oldalát:

$$\sqrt{x} = (x-2)$$



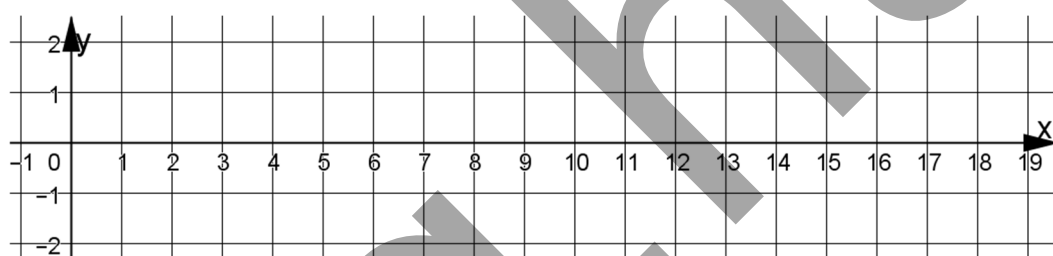
$$g(\cdot): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; y = \frac{\sqrt{x-2}}{2} - 1$$

$D_g =$

Trafó:

$C(\quad; \quad)$

ZH:



Menet

Alakja:

$R_g =$

II/6) Értelmezési tartomány: randa dolog, újra egyenlőtlenségek

Alapállás: a négyzetgyök argumentuma nem lehet negatív, tehát egy négyzetgyökös kifejezés értelmezési tartományának vizsgálata általában egy egyenlőtlenség megoldása.

$$\sqrt{2x-3}$$

$$\sqrt{x^2+5}$$

$$\sqrt{x^2-7}$$

$$\sqrt{\frac{x-2}{3-x}}$$

$$\sqrt{\frac{3-3x^2}{x+5}}$$

$$\sqrt{\frac{x^3-6x^2+9x}{x^2-9}}$$

III. A másodfokú egyenletek általános megoldásának előkészítése

III/1) „Teljes négyzetté alakítás”

2. fok: először ha kell, egy oldalra rendezünk...

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x^2 = 48 - 2x$$

$$x^2 - 3x = 1$$

$$-x^2 + 9x - 20 = 0 \Leftrightarrow -(x^2 - 9x + 20) = 0$$

A főegyüttható :

$$2x^2-7x-4=0$$

$$-3x^2-4x+1=0$$

$$x^2-6x+25=0$$

$$-6x^2+7x-2=0$$

III/2) Oldd meg – vigyázat, négyzetgyök jön be!

$$x^2-8x-4=0$$

$$2x^2+7x-15=0$$

$$3x+\frac{2}{x}=6$$

$$(2x-1)(2x+3)=2$$

$$x^2+13x-21=0$$

$$7-2x = 2x^2+x$$

$$\frac{2x-1}{x+2} = \frac{5x-4}{3x+2}$$

$$\frac{2x-4}{2x+3} = \frac{2x-3}{x+1}$$

IV. Polinom alakban megadott másodfokú függvények ábrázolása

CSÚCSPONTI EGYENLETRE ALAKÍTÁS.

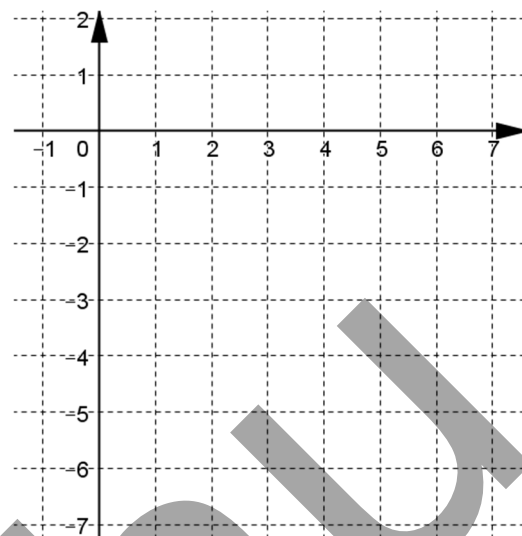
Adjuk meg a következőket: Trafó, $C(x;y)$, állás illetve hogy van-e zérushely!

Nem oszthatunk le, csak kiemelhetünk!

Cél: $a(x-u)^2+v$ Ebből látjuk a transzformációt. Vagyis csak az első két tagból emelünk ki...

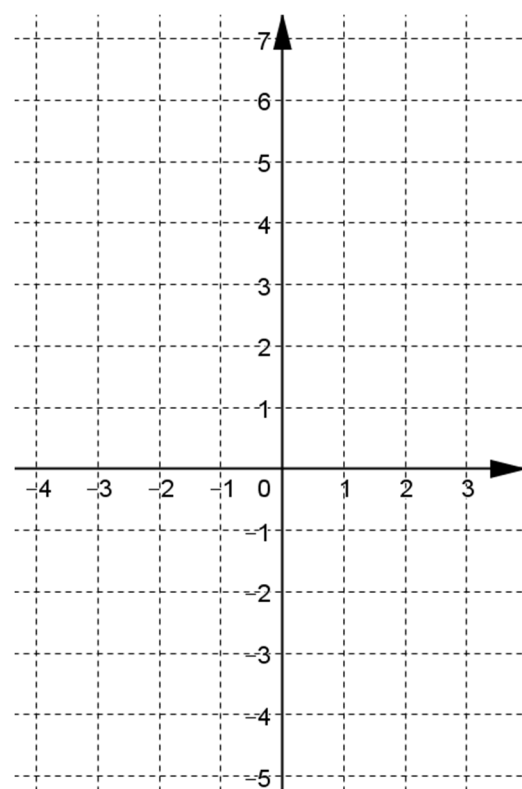
- $f(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; f(x)=x^2+3x-4$
- $g(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; g(x)=2x^2-x-15$
- $f(): [0;10] \rightarrow \mathbf{R}; f(x)=-2x^2+4x+12$
- $g(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; g(x)=3x^2-2x+2=0$
- $f(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; f(x)=-\frac{2}{3}x^2+5x-2$

- Ábrázoljuk is: $h() : [0;6] \rightarrow \mathbf{R}$; $h(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x - 5$



- $f() : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$; $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + x - 2$

- Ábrázoljuk: $f() : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$; $y = |x^2 - 4|$



V. Ismétlőpéldák

- $(\sqrt{6}-\sqrt{10})^3 =$
- Ábrázold, jellemezd: $f():[-2;1] \rightarrow \mathbf{R}; y=-3x^2+2x+5$
- $(\sqrt{2\sqrt{15}+\sqrt{48}}+\sqrt{\sqrt{60}-4\sqrt{3}})^2 =$
- $\frac{18x+2}{x-4} - \frac{15x+1}{x+5} = 3$ Mo.: $x=-1/2$
- Definiáld a parabolát!
- Gyökteleníts: $\frac{3\sqrt{6}-\sqrt{32}}{\sqrt{27}-\sqrt{8}}$
- ÉT: $\sqrt{\frac{a^3+2-a-2a^2}{a^2+2a-3}}$
- $\frac{2x^2-8}{x^2+4x+4} - \frac{3x-2}{x+5} = -\frac{5}{x+5}$
- Jellemezd, ábrázold: $g():[-1;3] \rightarrow \mathbf{R}; y=-2x^2/3+x+2$
- $(\sqrt{14-6\sqrt{5}}-\sqrt{14+6\sqrt{5}})^2 =$
- Oldd meg: $\frac{x-4}{x+4} + \frac{16x}{x^2-16} = \frac{x+4}{x-4}$
- $\frac{6}{3x} - 12 = 2x$
- $(\sqrt{10}-\sqrt{15})^2 =$
- Jellemezd, ábrázold a $[0;7] \rightarrow \mathbf{R}$ 2. fokú fv-t. Grafikonja: $E^{\mathbf{v}(0;1)}(x^{\lambda=-0,25}(E^{\mathbf{v}(4;0)}(\text{graf}_{x2})))$
- Hozd egyszerűbb alakra: $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$
- $(\sqrt{15}-\sqrt{5})^2 =$
- $(\sqrt{\sqrt{28}-2\sqrt{3}}-\sqrt{2\sqrt{7}+\sqrt{12}})^2 =$
- ÉT: $\sqrt{\frac{-x^2-3}{2x^2+5x-3}}$
- Add meg a köv. kifejezés értelmezési tartományát: $\sqrt{\frac{1}{9x^2-6x+1}} + \sqrt{5-x}$
- Gyökteleníts: $\frac{4}{\sqrt{5}-\sqrt{2}+1}$
- Ábr. és jellemzed: $f(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; x \mapsto -3\sqrt{2x+5}+1$
- $\frac{x^2}{4-x^2} - \frac{x+2}{2-x} = \frac{6}{x+2}$
- $\sqrt{9-4\sqrt{5}} - \sqrt{9+4\sqrt{5}} = ?$
- Add meg az ÉT-t: $\sqrt{12-x^2}$
- Jellemezd, ábrázold: $g():[-1;2] \rightarrow \mathbf{R}; y=-3x^2+2x+2$

- $\frac{x^2+3x+2}{2x^2-2} - \frac{x^2-4}{x^2-2x} = -\frac{2}{3x-3}$
- $(\sqrt{12}-\sqrt{18}-\sqrt{6})^2 =$
- Hozd egyszerűbb alakra: $\sqrt{8-2\sqrt{15}}$
- Ábrázold, jellemezd: $h() : [0;6] \rightarrow \mathbf{R}; h(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 2x + 3 = 0$
- Add meg azt a fv-t, mely képe: $E^{v(0;2)}(x^{\lambda=-0,25}(E^{v(3;0)}(\text{graf}_{x_2})))$

szmg.hu