

Matematika
Geometria – 1
HF Munkafüzet

v2.1

Szent Margit Gimnázium

szmg.hu
2022

Matematika

Geometria - 1 - HF Munkafüzet

v2.1

Szent Margit Gimnázium

szmg.hu
2022

szmg.hu

Szerkesztette: Vízányó Zsolt Sch.P. ©

TARTALOMJEGYZÉK

GEOMETRIA A: ALAPOZÁS.....	7
I) Alapfogalmak, alaptételek, görög betűk, jelölések	7
1) Alapfogalmak: amiket nem magyarázunk: pont, egyenes, sík.....	7
2) Görög betűk	7
3) Halmazelméleti jelek (szemléltetés Venn diagrammmal)	9
4) Jelölések	11
5) Háromszög nevezetes vonalai, pontjai	12
6) Nevezetes háromszögek	15
7) Egyéb fogalmak, elnevezések	15
II) Síkidomok, konvexitás, szögek, alakzatok	17
1) Definíciók.....	17
2) Konvexitás	17
3) A radián – ívmérték.....	18
4) Szög: az elfordulás mértéke	18
5) Szögek rajzolása szögmérővel és szögmérő nélkül.....	19
6) Számolás.....	19
7) Elfordulás: pozitív, negatív	19
8) Szög-radián átszámolás: egyenes arányosság	20
9) Sokszög.....	21
10) Számolások sokszögeknél	23
11) Egybevágóság.....	25
12) Nevezetes háromszögek, szögek.....	26
III) Alapszerkesztések - csak körzővel, és beosztás nélküli egyélű vonalzóval	27
1) A rombusz	27
2) Alapszerkesztések: mindig rombuszt szerkesztünk	27
3) Egyéb műveletek szögekkel	28
4) Gyakorlás.....	29
IV) Ponthalmazok a síkban	30
1) Ponthalmazok tulajdonságai: a szerkesztés elve	30
2) Helyzetek: a diszkusszió elve.....	39
GEOMETRIA B: TRANSZFORMÁCIÓK.....	42
I) Alapfogalmak, alaptételek, jelölések.....	42
1) A függvények.....	42
2) Valós-valós függvények, egyéb függvények.....	42
3) Az injektív függvények.....	43
4) Geometriai transzformáció	43

II)	A geometriai szerkesztések menetei	43
III)	A tengelyes tükrözés (egybevágósági transzformáció).....	43
1)	Definíció + tulajdonságok	44
2)	Tengelyesen tükrös alakzatok: vagyis egy megfelelő tengelyre nézve invariáns alakzatok	45
3)	Alappéldák.....	46
4)	Egyéb, tengelyes tükrözésen alapuló példák	50
IV)	Forgatás (egybevágósági transzformáció)	53
1)	Definíció + tulajdonságok	53
2)	Forgassunk.....	54
3)	Kiegészítő szögek; Mellékszögek; Merőleges szárú szögek	55
4)	Forgásszimmetrikus alakzatok: mindig tegyük hozzá: mi körül és hány fokra.....	55
5)	(Számelmélet a forgatással kapcsolatban – kimarad).....	56
6)	Alappéldák.....	56
7)	Egyéb gyakorló példák.....	58
V)	A középpontos tükrözés (egybevágósági transzformáció).....	60
1)	Tükrözzünk.....	60
2)	Definíció + tulajdonságok	60
3)	Fordított állású szögek.....	61
4)	Középpontosan szimmetrikus alakzatok	61
5)	Alappéldák.....	62
6)	Gyakorló példák.....	64
VI)	A párhuzamos eltolás bevezetése: vektorok	68
1)	Vektorok definíciója.....	68
2)	Elnevezések	68
3)	Röviden a relációkról, és két vektor azonossága.....	69
4)	Vektorok kapcsolata	70
5)	Pontok és vektorok.....	70
6)	Műveletek vektorokkal.....	70
7)	Gyakorlás	76
8)	Felezőpontokba mutató vektorok és egyéb gyakorlás.....	80
9)	Vektorok koordinátákkal	80
VII)	A Párhuzamos eltolás (egybevágósági transzformáció).....	82
1)	Definíciója és tulajdonságai.....	82
2)	Végezzünk eltolást.....	82
3)	Párhuzamos szárú szögek.....	82
4)	Az ismert szögpárok összefoglalása	84
5)	Szögpárok gyakorlása	84
6)	Alappéldák.....	85
7)	Gyakorló példák.....	88
VIII)	Transzformációk ismétlése	91

GEOMETRIA C: A HÁROMSZÖG	93
I) Elnevezések, csoportosítások.....	93
1) Elnevezések, definíciókkal.....	93
2) Csoportosítások.....	94
II) Oldalak közti kapcsolat; Szögek közti kapcsolat.....	94
1) Háromszög oldalai közti kapcsolat: a háromszög-egyenlőtlenség	94
2) A háromszög szögei közötti kapcsolat.	96
3) Δ -ek egybevágóságának – illetve egyértelmű szerkeszthetőségének alapesetei	98
III) A Δ nevezetes vonalai, pontjai, körei: 1 rész	102
1) Oldalfelező merőlegesek $\Rightarrow$ a Δ köré írt kör középpontja.....	102
2) Szögfelezők $\Rightarrow$ Δ -be írt kör és hozzáírt kör	104
IV) A Thalész tétel.....	107
1) Bevezetés: a mértani hely fontossága.	107
2) A tétel.....	107
3) Alappéldák.....	108
4) Gyakorló példák	113
V) Δ nevezetes pontjai, körei: 2. rész - Magasság $\Rightarrow$ magasságpont	115
1) Áll.: a Δ -ben a magasságvonalak egy ponton mennek át, és ez a magasságpont: M.....	115
2) Példák.....	115
GEOMETRIA D: NÉGYSZÖGEK, SÍKIDOMOK, TERÜLET.....	120
I) A négyszögek	120
1) Elnevezések, csoportosítások.....	120
2) Átlók száma, belső szögek összege	121
3) Rendszerezük a négyszögeket	122
4) A paralelogramma.....	123
5) Trapéz.....	124
II) Síkidomok kerülete, területe.....	126
1) Kerület.....	126
2) A területszámítás fölépítése	126
3) Számítások.....	128
4) Gyakorlás.....	128
5) Területdarabolások	130
6) Nagyítás, kicsinyítés	132
7) Rács sokszögek, sokszögek a koordinátasíkon.....	133

szmg.hu

GEOMETRIA A: ALAPOZÁS

I) Alapfogalmak, alaptételek, görög betűk, jelölések

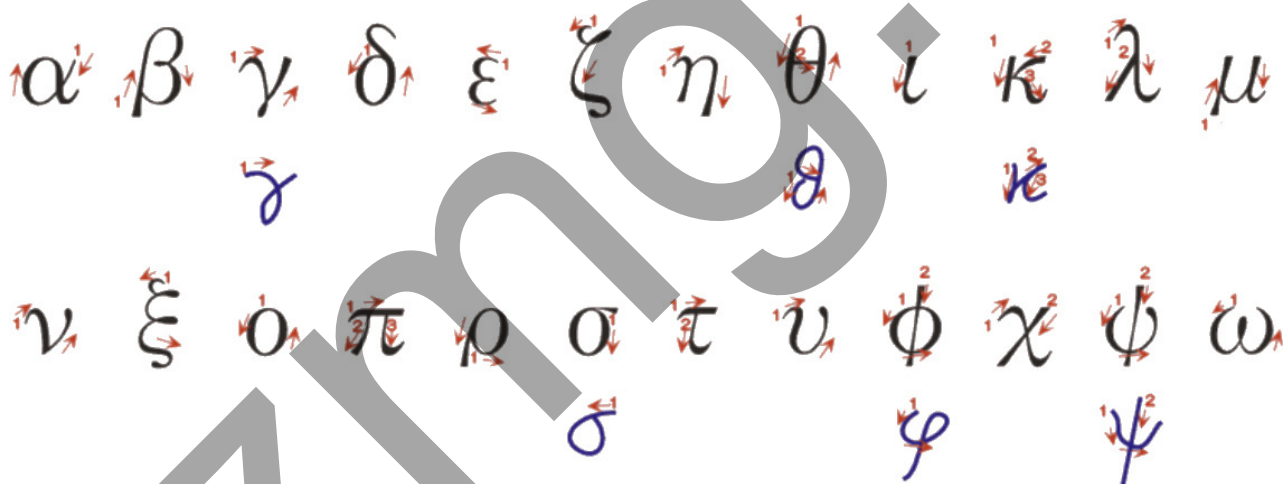
- 1) Alapfogalmak: amiket nem magyarázunk: pont, egyenes, sík
- 2) Görög betűk

α	β	γ	δ	ϵ	ζ	η	θ	ι	κ	λ	μ	ν	ξ	$\omicron$
α, A	β, B	γ, Γ	δ, Δ	$\epsilon(\varepsilon), E$	ζ, Z	η, H	$\theta(\vartheta), \Theta$	ι, I	κ, K	λ, Λ	μ, M	ν, N	ξ, Ξ	$\omicron, O$
alpha	béta	gamma	delta	epszilon	dzéta	éta	théta	i-óta	kappa	lambda	mű	nű	kszi	omikron

π	ρ	σ	τ	υ	ϕ	χ	ψ	ω
π, Π	ρ, P	σ, Σ	τ, T	υ, Υ	$\phi(\varphi), \Phi$	χ, X	ψ, Ψ	ω, Ω
pí	rhó	szigma	tau	üpszilon	phí	khí	pszi	ómega

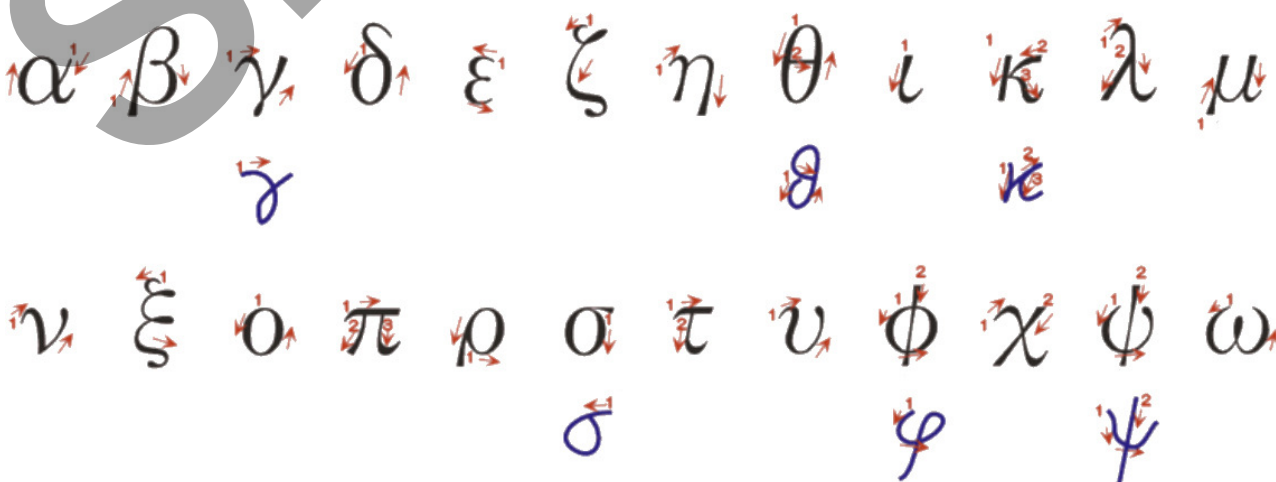
A görög betűvetés alapja, betűírási technika:

The stroke order of Greek characters



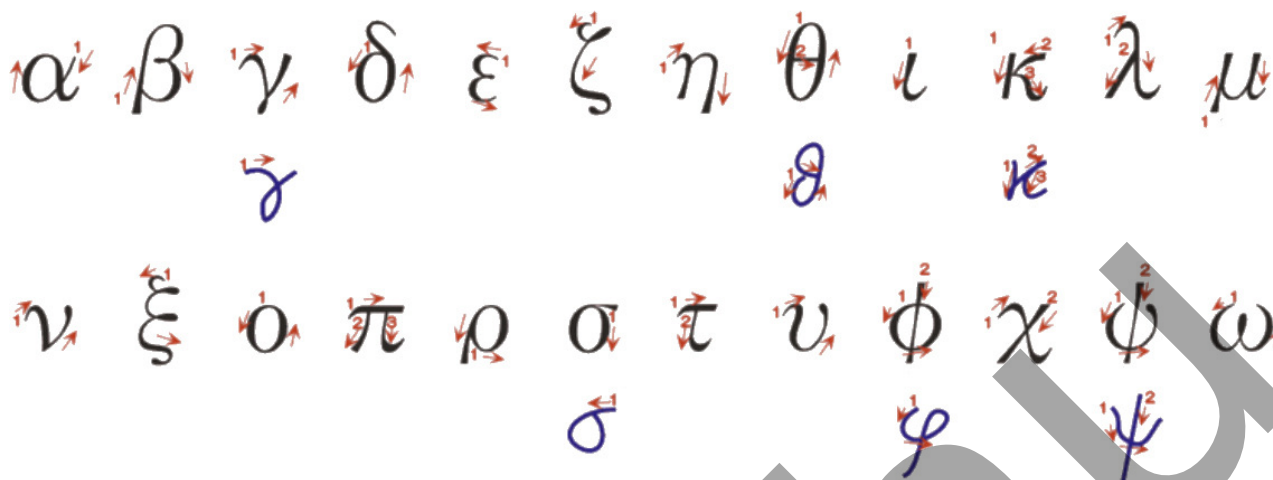
Írd át pirossal a sorszámozás alapján, a nyilak irányában a betűket alább – közben mondd ki a nevüket!

The stroke order of Greek characters



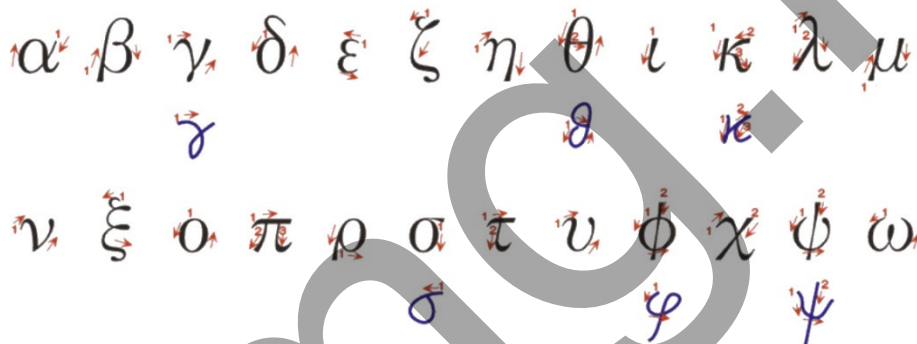
Írd át pirossal a sorszámozás alapján, a nyilak irányában a betűket alább – **közben mondd ki a nevüket!**

The stroke order of Greek characters



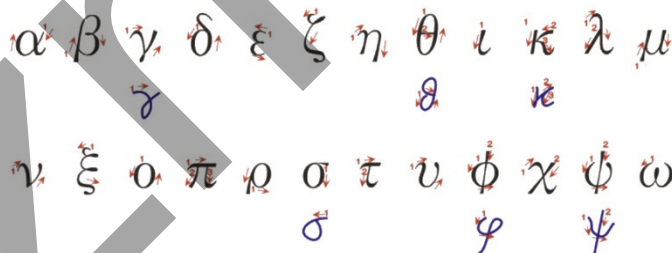
Írd át pirossal a sorszámozás alapján, a nyilak irányában a betűket alább – **közben mondd ki a nevüket!**

The stroke order of Greek characters



Írd át pirossal a sorszámozás alapján, a nyilak irányában a betűket alább – **közben mondd ki a nevüket!**

The stroke order of Greek characters



Írd le a görög betűket nevükkel a vonalra: α alfa ...

3) Halmazelméleti jelek (szemléltetés Venn diagrammmal)

Oldd meg:

$$(2x-3)^2=(5x+2)^2$$

$$\frac{3x-2}{5}-\frac{2(5-2x)}{3}-1=x-\frac{4x+8}{6}$$

Írd le a részhalmazok definícióját jelekkel és szavakkal is.

Rajzolj illet, ahol $A \subset B$

Írd le két halmaz metszetének definícióját szavakkal is és jelekkel is.

Rajzolj illet!

Írd le a görög betűket nevükkel a vonalra: α alfa ...

Adott az $A=\{1;2;3;4;5\}$ halmaz.

Adj meg egy olyan három elemű – egyjegyű számokból álló – B halmazt, amellyel az A diszjunkt! Rajzold is fel őket, beírva az elemeket!

Adj meg egy olyan 3 elemű B halmazt, amellyel az A uniója: $A \cup B = \{1;2;3;4;5;6;7\}$ Rajzold is fel őket, beírva az elemeket!

Adj meg egy olyan 3 elemű B halmazt, amellyel az A uniója: $A \cup B = \{1;2;3;4;5\}$ Rajzold is fel őket, beírva az elemeket!

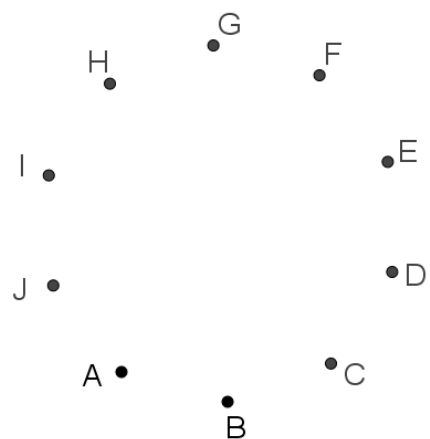
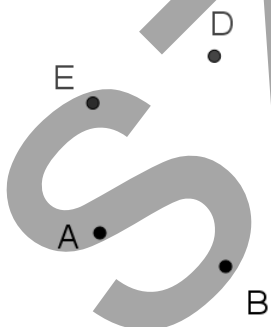
Adj meg egy olyan 3 elemű B halmazt, amellyel az A metszete: $A \cap B = \{2;4\}$ Rajzold is fel őket, beírva az elemeket!

Írd le két halmaz uniójának definícióját!

Hány kézfogás történik akkor, ha mindenki kezét fog mindenkivel és

a) 5-en találkoznak b) 10-en találkoznak,

Gondolkodj úgy, ahogy egy sokszög átlóit szoktuk számolni!



c) És ha 100-an találkoznak? Számold ki!

$$\{1;2;3;4;5\} \setminus \{1;2;3\} =$$

$$\{1;2;3;4;5\} \setminus \{1;2;3;4;5\} =$$

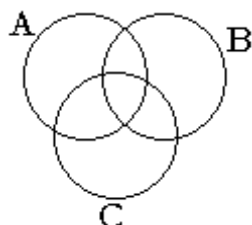
$$\{1;2;3;4;5\} \setminus \{3;4;6;7\} =$$

$$\{1;2;3;4;5\} \setminus \{1;2;3;4;5;6;7;8\} =$$

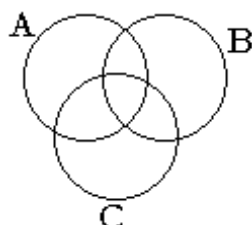
$$\{1;2;3;4;5\} \setminus \{8;9;10\} =$$

Add meg sáírozással a következő halmazműveletek eredményét (ceruzával, hogy javíthass)!

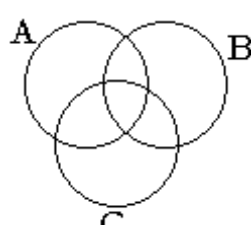
$$A \setminus B$$



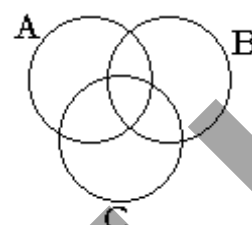
$$(A \cup B) \cap C$$



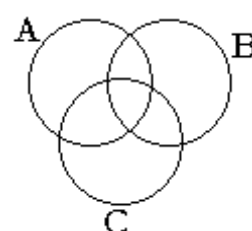
$$(A \cap C) \cup (A \cap B)$$



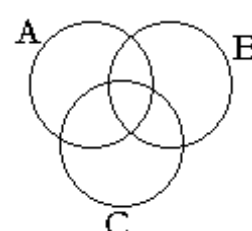
$$(A \cap C) \cup B$$



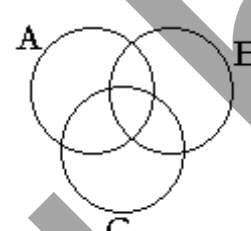
$$A \cap (C \cup B)$$



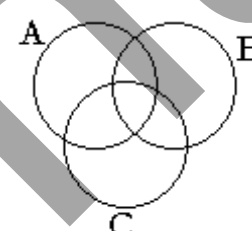
$$A \setminus (B \cup C)$$



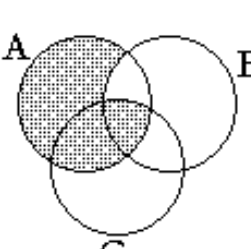
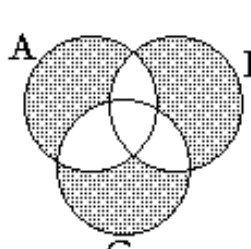
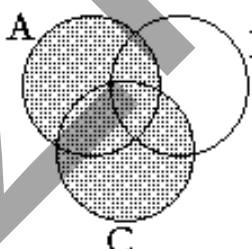
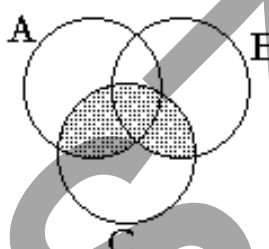
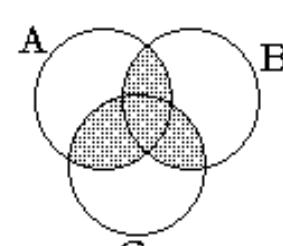
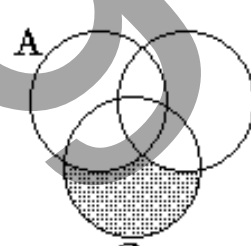
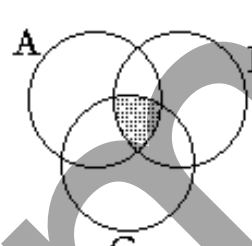
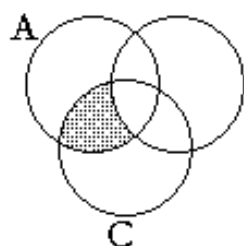
$$(A \setminus B) \setminus C$$



$$A \setminus (B \setminus C)$$



Add meg a sáírozott területeket halmazművelettel alattuk!

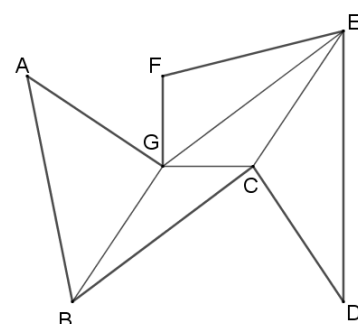


4) Jelölések

Van 5 db. papírból kivágott $\triangle$ -em. Olyanok, hogy egymáshoz tudom őket úgy tologatni, hogy az érintkező oldalaik pontosan illeszkedjenek. Pl. az ábra alapján: hétszög keletkezett.

A csúcsai POZITÍV KÖRÜLJÁRÁSSAL vannak elnevezve.

Mekkora a keletkezett hétszög szögeinek összege? Számold ki



Oldd meg: $2x^5=32x$

Rajzolj föl egy zárt és két félig nyílt szakaszt úgy, hogy együtt egy zárt szakaszt alkossanak!

Egy háromszögben: $\alpha < \beta < \gamma$. A legnagyobb duplája a legkisebbnek, és 20° -nagyobb a középsőnél. Mekkora a szögek? (Egyenlettel!)

Oldd meg:
$$\frac{n(n-3)}{2} + 80 = \frac{(n+5)(n+2)}{2}$$

- 5) Háromszög nevezetes vonalai, pontjai
a) Írd le a háromszög oldalfelező merőlegeseire vonatkozó ismereteket!

A következő szabályos nyolcszögben húzd meg vonalzóval az A csúcsból az összes átlót. Utána a B-ből, és így sorban. Alább válaszolj a kérdésekre:

Hány átló indult az A csúcsból? A:

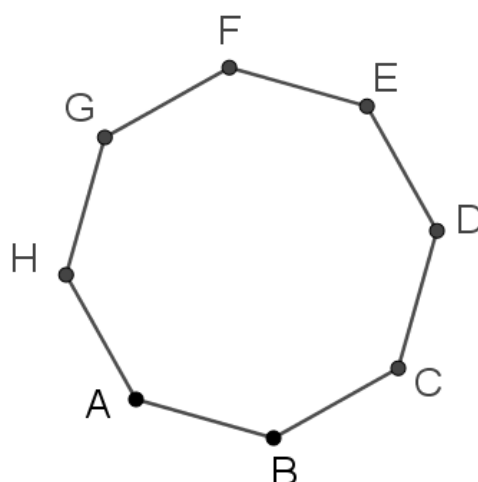
Hány átló indult a B csúcsból? B:

Hány átló indult a C csúcsból? C:

Hány átló indult a G csúcsból? G:

Egy nyolcszögben egy csúcsból hány átló húzható?

Összesen a 8 csúcsból hány átló húzható?



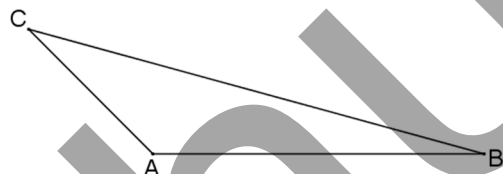
Add meg az ÉT-t, majd vond össze a két törtet:

(Szorzattá alakítás → ÉT → egyszerűsítés → közös nevező...)

$$\frac{2-4x}{12x^2-12x+3} - \frac{3x-2x^2}{2x^3+x^2}$$

b) Magasságvonal

Rajzold meg a háromszög magasságvonalait:



c) Súlyvonal

Adott az alábbi háromszög. Az oldalak felezőpontját jelöld meg (vonalzóval felezhetsz): az a oldal felezőpontja: F_a ; a b oldalé F_b és van még F_c . Húzd meg a súlyvonalakat. Egy pontban kell, hogy messék egymást (S pont). Mérd le vonalzóval a hosszukat, majd írd le az ábra alá:

$s_a =$

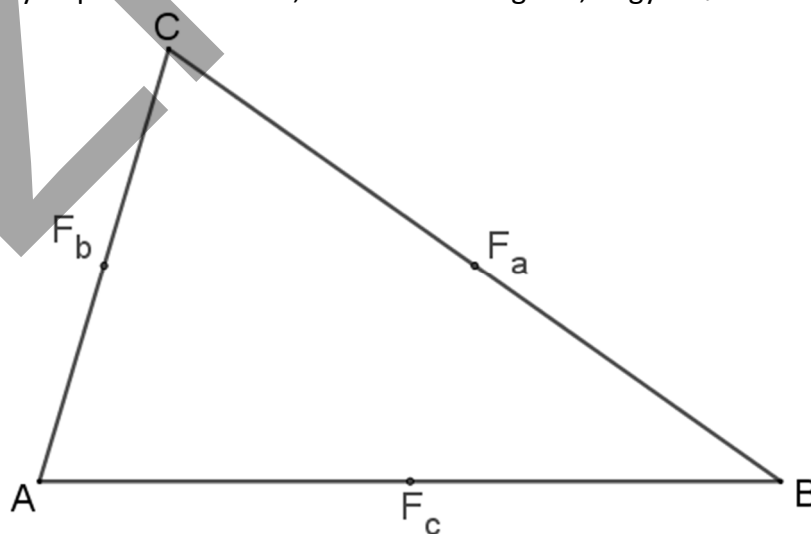
$s_b =$

$s_c =$

Mérd le az A és S távolságát: $AS =$

Mérd le az S és az F_a távolságát: $F_a S =$

Nézd meg, hogy mennyire pontosan mértél, szerkesztettél: igaz-e, hogy $2 \cdot F_a S = AS$?

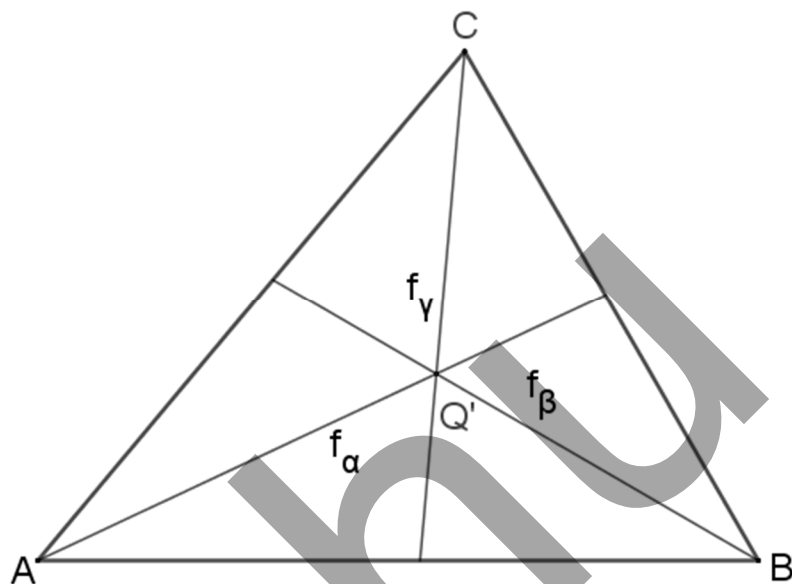


Írd le a súlyvonalakkal, súlyponttal kapcsolatos ismereteket:

d) Szögfelezők

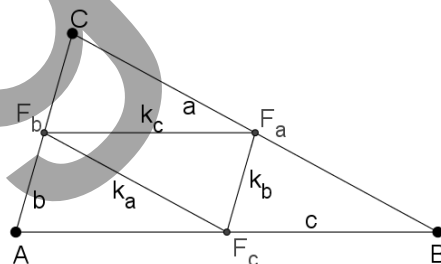
Egy $\alpha=50^\circ$, $\beta=60^\circ$, $\gamma=70^\circ$ Háromszögben meghúzom a szögfelező egyeneseket, melyek egy Q pontban metszik egymást. Számold ki és írd be az ABQ' , $Q'BC$ és CAQ' háromszög szögeinek nagyságát!

Oldd meg: $4x^3+6x^2=16x+24$



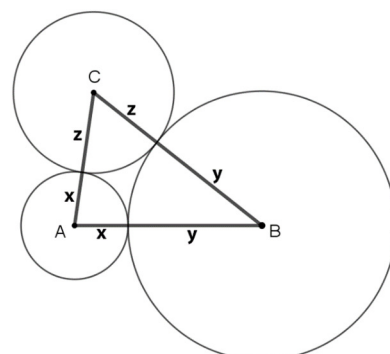
e) Középvonalak

Egy háromszög 3 db. középvonala $k_a=7$, $k_b=4$ és $k_c=8$ egység hosszú. Mekkora az oldalai?



Írd le a 48 osztóit fa-struktúrával! (Tudod, először kanonikus alak...)

* Adott egy 5; 7 és 8 cm oldalú $\triangle$. A csúcsok mint középpontok körül három, páronként egymást érintő kört rajzolunk. Mekkora a körök sugarai?

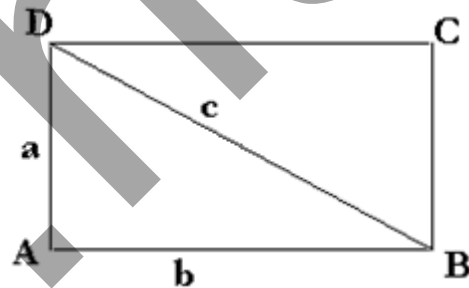


6) Nevezetes háromszögek

Szerkessz egy 6 cm oldalú szabályos háromszöget, majd vonalzóval húzd meg az egyik magasságát, és a levágott félszabályos háromszög oldalait húzd meg piros színnel, majd írd be a szögeit!

Egy téglalap átlója kétszer akkora, mint a rövidebb oldala.
Mekkora szöget zár be az átlóval a rövidebb oldal? Miért?

Oldd meg: $\frac{n(n-3)}{2} + 84 = \frac{2n(2n-3)}{2}$



7) Egyéb fogalmak, elnevezések

Írd föl jelekkel:

Az f egyenes és a Q pont távolsága 5 cm:

Q pont nem illeszkedik az e egyenesre:

Az f egyenes merőleges a g -re:

Az e egyenes nem párhuzamos h -val:

Az ABC háromszög B csúcsnál található szöge 45° :

Ha 10 ember találkozik, és mindenki mindenkivel kezet fog, hány kézfogás történik? (Először számold meg, hogy pl. Aladár hány másikkal fog kezet...)

Oldd meg: $\frac{n(n-3)}{2} + 63 = \frac{2n(2n-3)}{2}$

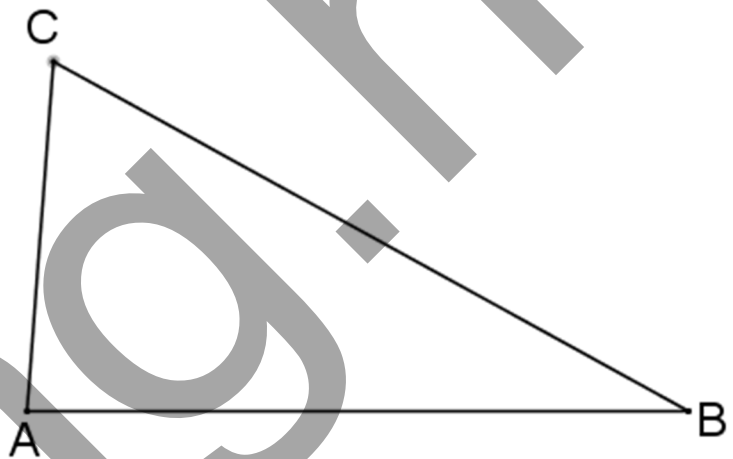
Mérd le az alábbi háromszög szögeit, majd add össze őket:

$\alpha =$

$\beta =$

$\gamma =$

$\alpha + \beta + \gamma =$



Rajzold meg a fenti ábrán az oldalfelező merőlegeseket a metszéspontjukig (Q). Rajzold meg a Q középpontú, háromszög köré írt kört. Ha jól rajzoltál, akkor a csúcspontok mind a körre esnek...

Mérd le az $\angle AQB$ -et, a $\angle BQC$ -et és a $\angle CQA$ -et, majd hasonlítsd össze az $\angle AQB$ -et a γ -val, a $\angle BQC$ -et az α -val és a $\angle CQA$ -et a β -val! Mit tapasztalsz?

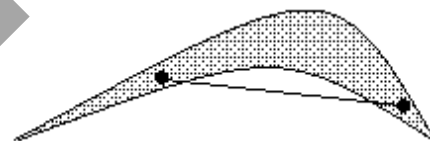
II) Síkidomok, konvexitás, szögek, alakzatok

1) Definíciók

Rajzolj egy olyan négyszöget, amelyet egy egyenessel három részre vághatunk!

Aki 5-ös akar lenni...: Egy 30 csúcús konvex sokszöget egy két csúcán áthaladó egyenessel levágtam egy konvex sokszöget, így két konvex sokszöget kaptam. Ha összeszámolom a két konvex sokszög átlóinak a számát, akkor az összeg 116-tal kevesebb, mint ahány átlója volt az eredeti sokszögnek. Hány oldalú sokszöget vágunk le?

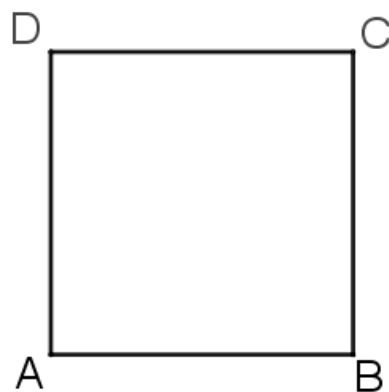
Miért *nem jó* definíció a „*konkáv*”-ságra a következő: Olyan alakzat, amelynek bármely két pontját összekötő szakasznak van olyan pontja, amely nem eleme az alakzatnak. Írd le a választ!



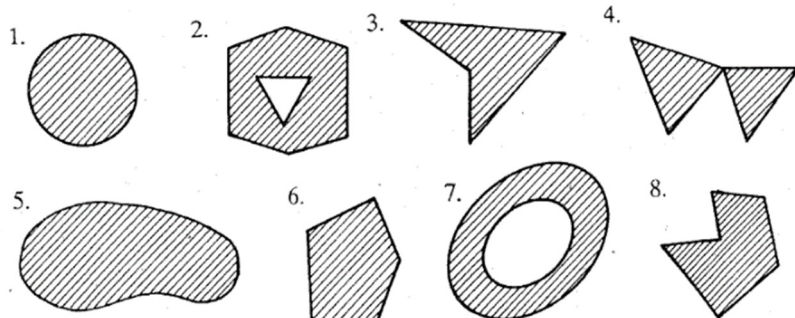
2) Konvexitás

Nem köt.: darabolj fel egy négyzetet egyenes vonalakkal 7 db. nem feltétlenül egybevágó négyzetre (ceruzával megrajzolva a vágásvonalakat)!

* Fel lehet-e darabolni egy négyzetet 3001 db. nem feltétlenül egybevágó négyzetre? Válaszodat indokold!



Melyik konvex, melyik konkáv az alábbiak közül? Írd alá!



Add meg normálalakban a végeredményt:

$$0,000\ 172 =$$

$$1\ 500\ 000^2 =$$

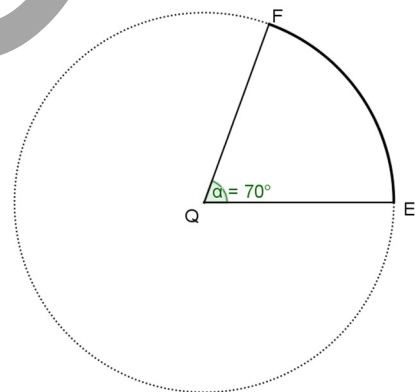
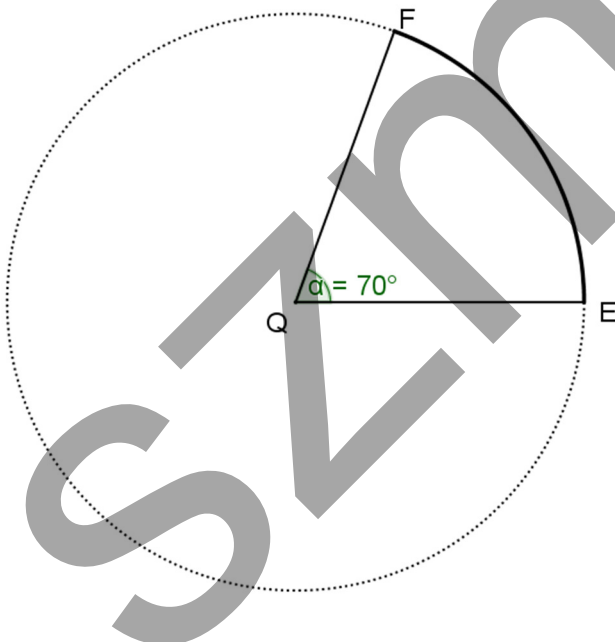
$$1\ 400\ 000\ 000 \cdot 0,000014 =$$

Nem köt.: Van-e olyan konvex alakzat, melyet egyenesek mentén ollóval felvágva keletkezik nem konvex alakzat is? (Mutasd meg, ha van, vagy magyarázd el miért nincs...)

Oldd meg: $3x^3=27x$

3) A radián – ívmérték

Adott két kör. Mindkettőben ugyanakkora a berajzolt szög. Céna segítségével mérd le szöghöz tartozó ívhoszt, majd oszd el a sugárral. Megkapod a szöghöz tartozó ívmértéket (radiánt). Ha jól számolsz, mindkettőnél ugyanakkora lesz.



4) Szög: az elfordulás mértéke

Melyik az a legkisebb természetes szám, amelynek 12 db. osztója van?

Oldd meg: $3x^3=48x$

- 5) Szögek rajzolása szögmérővel és szögmérő nélkül
A teljes szög hányad része a derékszög?

Egy háromszögnek hány tompaszöge lehet? Miért?

Konvex v. konkáv az a négyszög, amelyben: $\alpha=20^\circ$; $\beta=30^\circ$; $\gamma=40^\circ$? (Először számold ki a δ -t!)

- 6) Számolás

Mennyi az α és a β , ha $\alpha+\beta=150^\circ$ $2\alpha-3\beta=50^\circ$

Öt szög teljes szöget ad ki együtt. Növekvő sorba állítva őket 10° a különbség a párok közt. Mekkora ezek a szögek?

Egy háromszög szögei úgy aránylanak egymáshoz, mint: 2:3:4. Mekkora a szögek? Úgy oldd meg, ahogy az órán csináltuk!

- 7) Elfordulás: pozitív, negatív

8) Szög-radián átszámolás: egyenes arányosság

Fejezd ki fokban:

$$\frac{4\pi}{5} \text{ radián}$$

$$3\pi \text{ radián}$$

$$\frac{2\pi}{3} \text{ rad.}$$

Fejezd ki ívmértékben (radiánban)

$$150^\circ$$

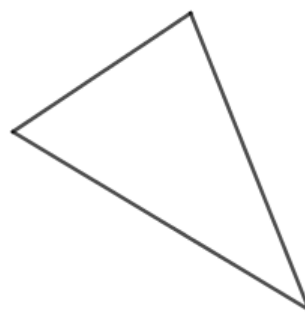
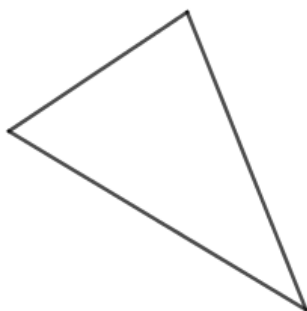
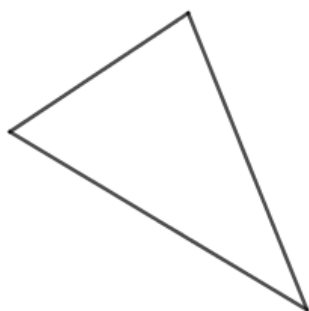
$$144^\circ$$

$$225^\circ$$

Oldd meg: $\frac{4x-2}{4x^2-4x+1} - \frac{6x^2-3x-3}{8x^2-2} = -2$

Oldd meg: $16a^4 = 81$

Nem köt.: Darabolj föl egy háromszöget 2; 3; 4 db. derékszögű háromszögre!



Fejezd ki fokban:

$$\frac{7\pi}{12} \text{ radián} \leftrightarrow$$

$$3,5\pi \text{ radián} \leftrightarrow$$

$$\frac{8\pi}{3} \text{ rad.} \leftrightarrow$$

Fejezd ki ívmértékben (radiánban)

$$67,5^\circ \leftrightarrow$$

$$15^\circ \leftrightarrow$$

$$405^\circ \leftrightarrow$$

Öt szög ívmértéke a következőképp aránylik egymáshoz: 3:4:5:8:10 Együtt 2π radiánt adnak ki. Mekkora az ívmértékek? Majd számold át őket fokra!

9) Sokszög

Rajzolj fel 4 pontot úgy, hogy

a) egy egyenest
határozzanak csak meg

b) pontosan 4 egyenest
határozzanak meg

c) 6 egyenest
határozzanak meg!

* 10 pont maximum hány egyenest határoz meg? (Két pont egy egyenest határoz meg, de ha mondjuk mind a 10-et „egymás mellé teszem”, akkor csak egy egyenest határoznak meg!)

Rajzolj egy körbe szögmérővel

a) Szabályos háromszöget

b) Szabályos négyszöget (négyzetet)

c) Szabályos ötszöget

d) Szabályos hatszöget

Az elkészített ábrákon mekkorák a középpontból csúcsba mutató sugarak szögei? Mekkorák a szabályos sokszögek szögei? (Írd alájuk mindkettőt)

Számold ki a következő sokszögek egy csúcsból induló átlóinak számát, összes átlójának számát és a belső szögeinek összegét:

6-szög

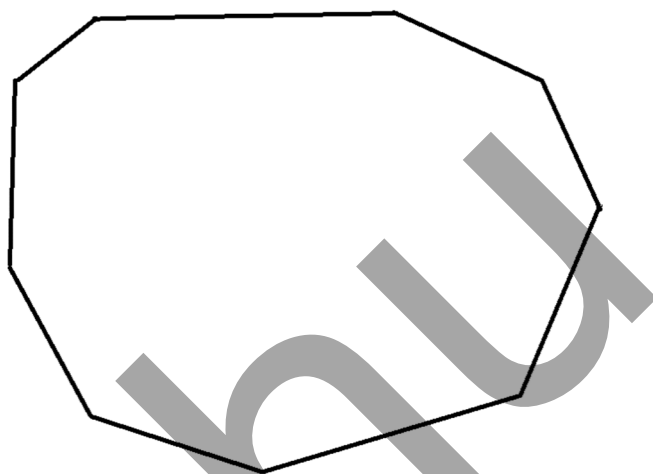
10-szög

15 szög

Egy sokszögnek 20 átlója van. Hány csúcsa van? (egyenlettel!)

10) Számolások sokszögeknél

Betűzd meg a sokszög csúcsait ($A_1 A_2 \dots A_9$ POZITÍV KÖRÜLJÁRÁS!) Számold össze az egy csúcsból húzható átlóit (válaszd ki az egyiket és húzd is meg). Számold ki az összes átló számát! Számold meg, hogy az egy csúcsból húzható átlók hány háromszögre bontják a sokszöget! Számold ki a belső szögek összegét!



Hány átlója van egy sokszögnek és mennyi a belső szögek összege, ha oldalainak száma:

a) 17

b) n db.

Hány oldalú az a sokszög, amelynek 14 átlója van? (Egyenlettel!)

Adott egy 20 csúcsú konvex sokszög. Egy csúcsából hány átló húzható? Ezek az átlók hány $\triangle$ -re vágják a sokszöget? Mekkora a belső szögeinek az összege? Hány átlója van összesen?

Hány oldalú az a sokszög, melyben a belső szögek összege 4500° .

Mekkora annak a konvex sokszögnek a belső szögösszege, amely egy csúcsából 17 átló húzható?

Egy konvex sokszögnek 23-mal kevesebb átlója van, mint a 2-vel több csúcsúnak. Hány csúcsa van?

Egy sokszög átlóinak száma 30-cal kevesebb, mint egy kétszer annyi csúcsúnak. Hány csúcsa van?

Adott egy 13 oldalú konvex sokszög. Egy csúcsából hány átló húzható. Mekkora a belső szögeinek az összege? Hány átlója van?

Hány oldalú a sokszög, amelynek 8-szor annyi átlója van, mint oldala?

Egy konvex sokszög átlóinak száma 90. Hány oldalú a sokszög?

Egy konvex sokszögnek 65 átlója van. Hány oldalú a sokszög?

Egy konvex sokszögnek 17-tel kevesebb átlója van, mint a nála 2 oldallal több oldalú sokszögnek. Hány oldalúak a sokszögek?

Egy konvex sokszög belső szögeinek összege 2160° -kal kevesebb, mint a kétszer annyi csúcsú sokszögnek. Hány csúcsa van az eredeti sokszögnek?

Egy konvex sokszögnek 135-tel több átlója van, mint a fele annyi csúcsú konvex sokszögnek. Hány csúcsa van az eredetinek?

11) Egybevágóság

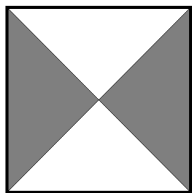
Írd le az egybevágóság alapeseteit: jelekkel is és szavakkal is!

Oldd meg: $(2x+5)^2=(4x-3)(x+7)$

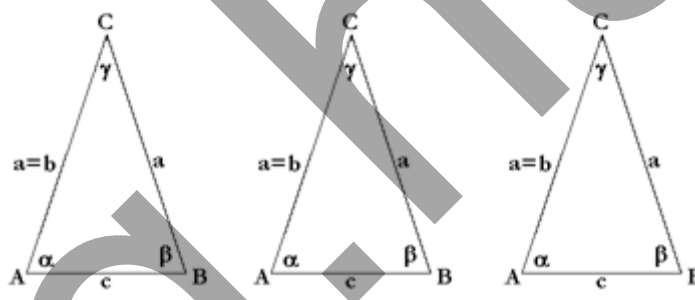
Oldd meg: $(3x-13)^2=(14x+2)^2$.

Egy konvex sokszögnek 55-tel kevesebb átlója van, mint egy nála öttel több csúcsú konvex sokszögnek. Hány csúcsa van?

Rajzolj az ábra alapján egy 5 cm oldalhosszúságú négyzetet. Meghúztuk a két átlót. A sátrózott két háromszöget rajzold a négyzet mellé úgy, hogy azok egy újabb (kisebb) négyzetet alkossanak. Mekkora az eredeti négyzet területe? Mekkora az újé? Mekkora az új négyzet oldala (ezt vonalzóval mérd le)



Hibátlanul bizonyítsd be az órán belátott tételt – pontosan úgy, ahogy az órán: **Az egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szögei megegyeznek, illetve az alaphoz tartozó magasság, oldalfelező merőleges, súlyvonal és a vele szemkötti szög szögfelezője azonos, mind ugyanaz a szakasz.**



12) Nevezetes háromszögek, szögek

Egy egyenlőszárú $\triangle$ egyik szöge 50° .
Mekkora a másik kettő szöge?
(vigyázat, kétféle megoldás-pár is van!)

Szerkessz körzővel egy
4 cm oldalú egyenlőoldalú $\triangle$ -et.

Szerkessz vonalzóval, körzővel és szögmérővel egy olyan félszabályos háromszöget, melynek a rövidebbik befogója 4 cm. Írd rá az oldalaira a nevüket és írd föl a megfelelő két oldalra vonatkozó összefüggést! Írd be a szögek nagyságát is!

III) Alapszerkesztések - csak körzővel, és beosztás nélküli egyélű vonalzóval

1) A rombusz

Szerkessz két olyan rombuszt, melynek oldalai 4 cm-esek, de nem egybevágók.

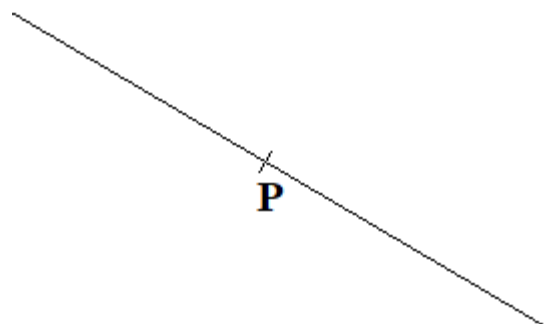
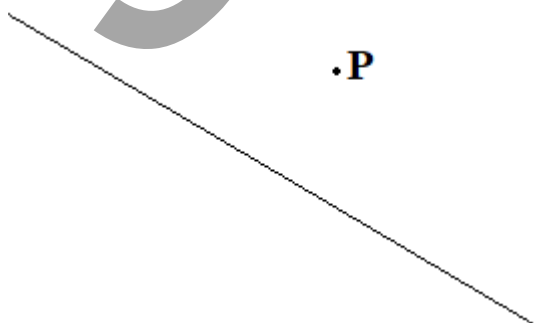
Szerkessz egy olyan rombuszt, melynek van derékszöge!

Írd le a rombusz ekvivalens definícióit, illetve egy fontos tulajdonságát.

2) Alapszerkesztések: mindig rombuszt szerkesztünk

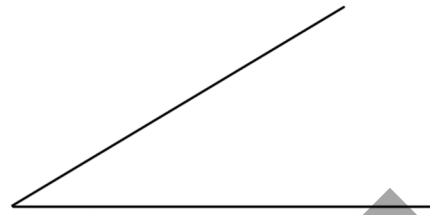
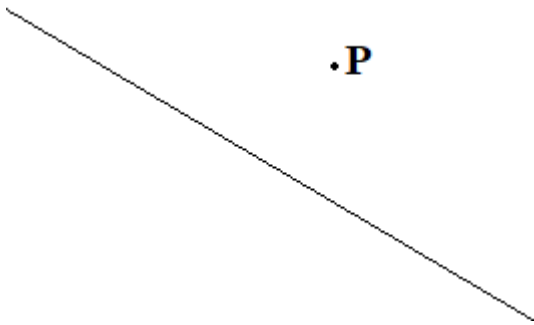
Szerkessz egy adott e egyenesre merőlegest P -ből!

Szerkessz egy e egyenesre merőlegest P -ben



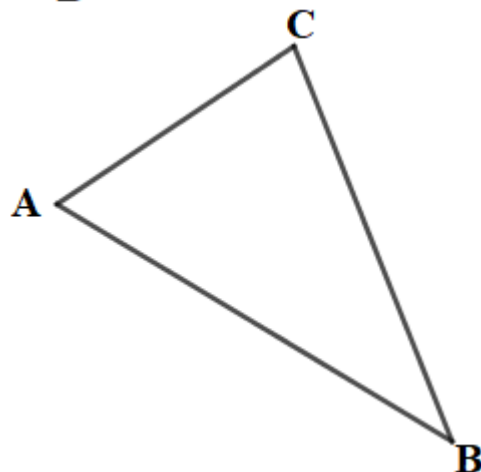
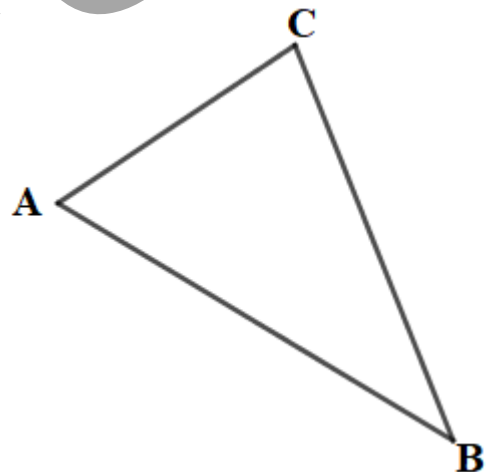
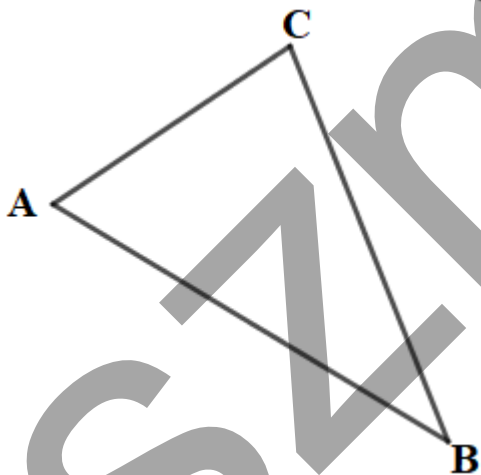
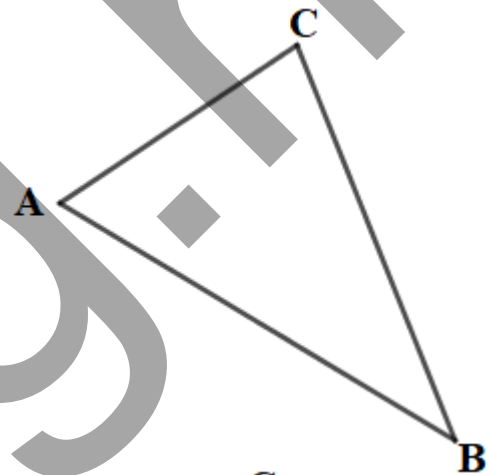
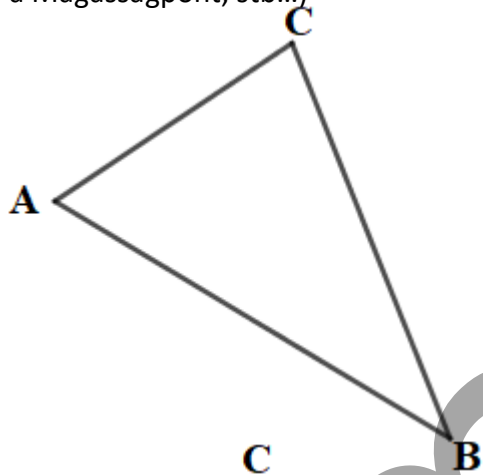
Szerkessz P -ből párhuzamost e -vel. $e \parallel f$

Szerkesztéssel felezd meg a hegyesszöget!

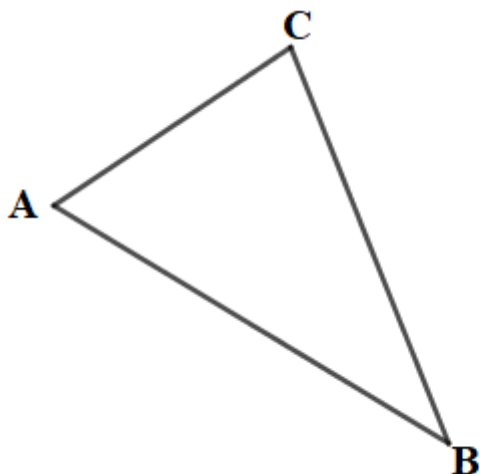


3) Egyéb műveletek szögekkel

Szerkeszd meg (köző-vonalzó!) az egyikben az M -et (magasságpont); a másikban a körülírt kör középpontját (Q) (rajzold is körbe!) ; a harmadikban a beírt kör középpontját (Q') és a beírt kört, a negyedikben az S súlypontot, az ötödikben pedig a három középvonalat... (Olvasd el a füzetedben, hogy mi a Magasságpont, stb...)



A P -ből induló félegyenesre felmérve szerkeszd föl egymás után (egymáshoz illesztve) a $\triangle$ szögeit (másold át őket). Mit tapasztalsz?



P

4) Gyakorlás

Szerkessz egy egyenlőszárú háromszöget, amelynek az alapja 6 cm, az alapon fekvő szögek 75° fokosak. (szerkesztéssel készíts 75° -ot!) Szerkeszd meg a beírt körét!

Szerkessz $\phi=60^\circ$ -ot, $\lambda=45^\circ$ -ot, $\varepsilon=75^\circ$ -ot. (Írd bele a nevüket!)

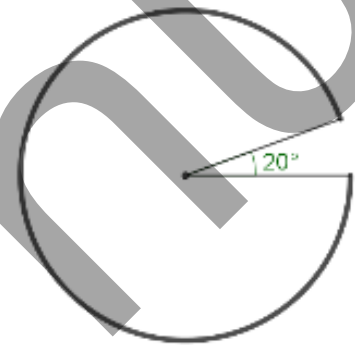
Aki 5-ös akar lenni évvégén...: Elvileg körzővel-vonalzóval 41° nem szerkeszthető. De ha adnak egy 23° -os szöveget, akkor már igen. Hogyan? Adj rá módszert! (Nem kell megszerkeszteni, csak írd le, hogyan tennéd.)

IV) Ponthalmazok a síkban

1) Ponthalmazok tulajdonságai: a szerkesztés elve

a) Távolság 1 ponttól:

Mekkora egy 10 m sugarú kör alakú horgásztó területe? Ha körbe akarjuk úgy venni kerítéssel, hogy egy olyan kapunak hagyunk helyet, mely a középpontból 20° alatt látszik, akkor milyen hosszú kerítés kell?



Írj le 5 olyan pozitív számot, melyekre igaz, hogy nem nagyobbak 1,8-nál. Írd is le ezt a halmazt halmazelméleti jelekkel, ahogy az órán!

Írj le 5 olyan nem egész számot, melyekre igaz, hogy nagyobbak -2 -nél. Írd is le ezt a halmazt halmazelméleti jelekkel, ahogy az órán!

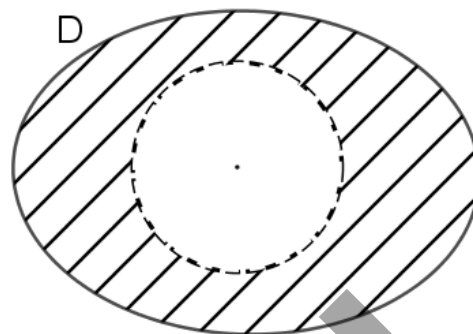
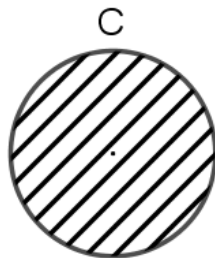
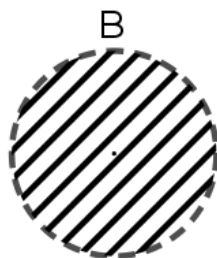
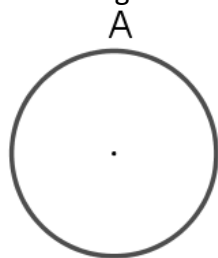
Írj le 5 olyan számot, melyek 3-nál nagyobbak ÉS 5-nél nem nagyobbak. Írd is le ezt a halmazt halmazelméleti jelekkel, ahogy az órán!

Írj le 5 olyan nem egész számot, melyek $-5,3$ -nál kisebbek VAGY $1,8$ -nál nagyobbak. Írd is le ezt a halmazt halmazelméleti jelekkel, ahogy az órán!

Szerkeszd meg:

$$K_1 = \{P \in S \mid d(P; Q_1) = 2 \text{ cm}\} \quad K_2 = \{P \in S \mid d(P; Q_2) < 1,5 \text{ cm}\} \quad K_3 = \{P \in S \mid d(P; Q_3) \geq 1,5 \text{ cm}\}$$

Írd föl a halmazokat, ahogy az órán, vagyis halmazelméleti jelekkel! Mindenhol Q a középpont és 2 egység a sugár.



$A = \{$

$B = \{$

$C = \{$

$D = \{$

Jobbra melléjük írd át a szövegeket halmazelméletileg (Pl.: $A = \{P \in S \mid d(P, Q) \leq 2\}$), majd rajzold fel őket – ráírva a nevüket.

A = Egy Q ponttól 1 cm-nél nem nagyobb távolságra található pontok halmaza.

B = Egy Q ponttól 1 cm-nél nagyobb, de 1,5-nél nem nagyobb távolságra található pontok halmaza.

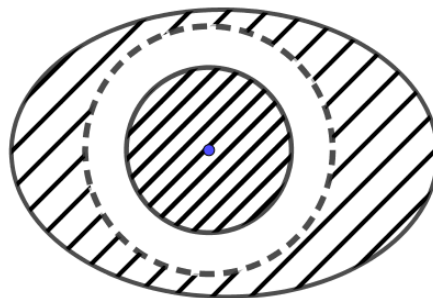
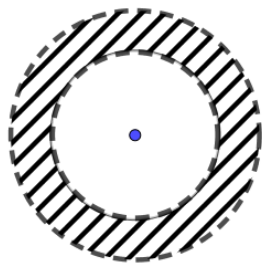
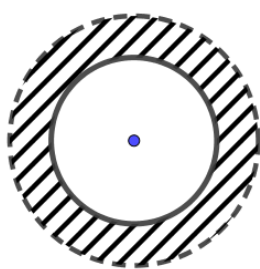
C = Egy Q ponttól 1 cm-nél nem nagyobb, vagy 1,5-nél nagyobb távolságra található pontok halmaza.

D = Egy Q ponttól 1 cm-nél nem nagyobb és 1,5-nél nem nagyobb távolságra található pontok.

E = Egy Q ponttól 1 cm-re vagy 1,5-nél nagyobb távolságra található pontok.

F = Egy Q ponttól 1 cm-re vagy 1,5-cm-re távolságra található pontok.

Írd föl a három halmazt, ahogy az órán. A kis kör sugara 2, a nagyé 3 egység.



b) Távolság 2 v. több ponttól:

Végezd föl két pontot egymástól 4 cm-re: Q_1 és Q_2 . Jobbra mellük írd föl a halmazokat, majd rajzold is fel őket (vastag vonal, szaggatott vonal, satírozás, üres karika, „bumszli”) – írd rá a nevüket!

(A feladat alatt rajzold meg őket)

A = Q_1 -től legfeljebb 2 cm-re és Q_2 -től 3 cm-nél nem nagyobb távolságra található pontok halmaza

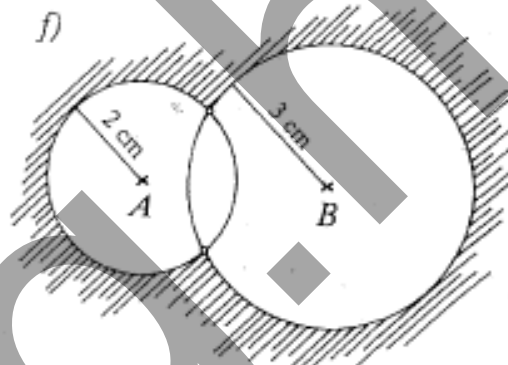
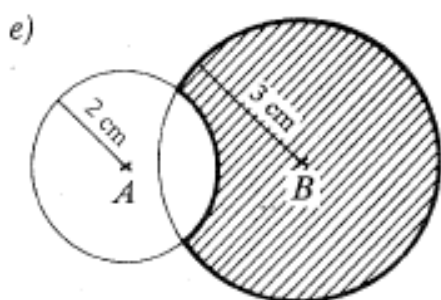
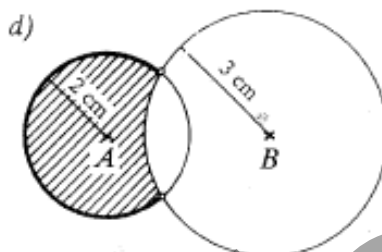
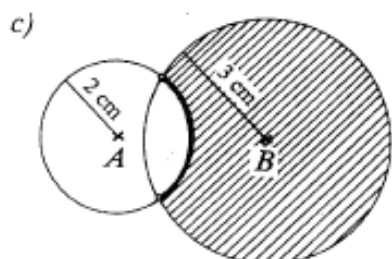
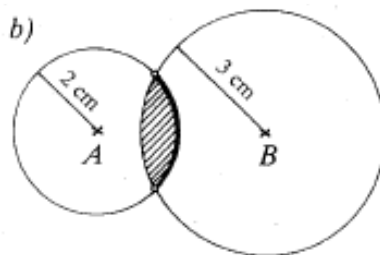
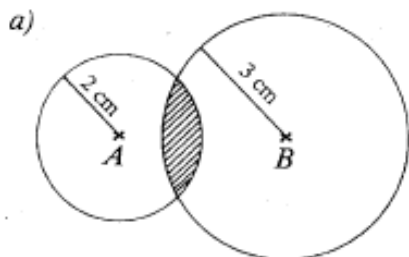
B = Q_1 -től 3 cm-re és Q_2 -től 3 cm-nél nagyobb távolságra található pontok halmaza

C = Q_1 -től 2 cm-nél kisebb vagy Q_2 -től 3 cm-nél kisebb távolságra található pontok halmaza

D = Q_1 -től 2 cm-re és Q_2 -től 3 cm-nél nagyobb távolságra található pontok halmaza

E = Q_1 -től 2 cm-nél nagyobb és Q_2 -től 3 cm-nél kisebb távolságra található pontok halmaza

Add meg a jelzett halmazokat



A=

B=

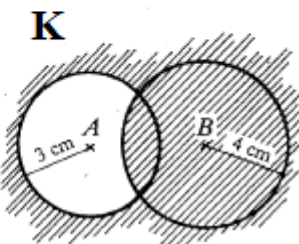
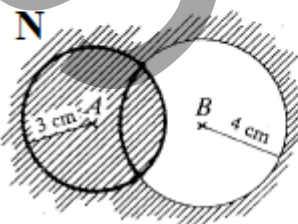
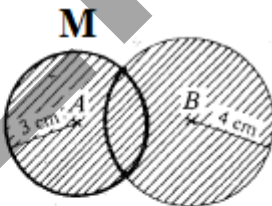
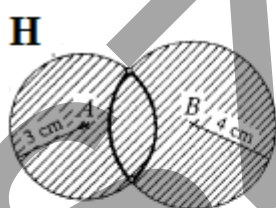
C=

D=

E=

F=

Add meg a jelzett halmazokat:



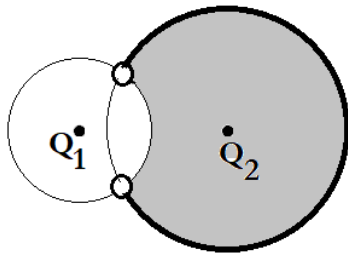
H=

M=

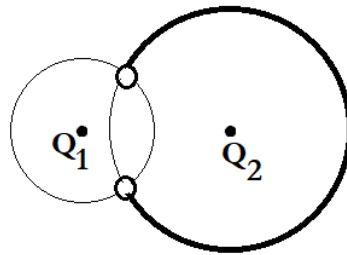
N=

K=

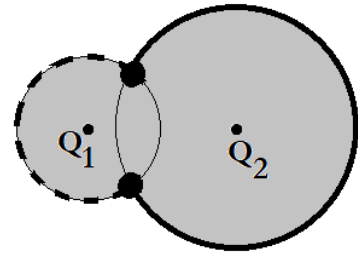
Add meg az alábbi halmazokat (sugarak r_1 és r_2)



A={



B={



C={

c) Két halmaz különbsége

Adott a 0-tól 20-ig terjedő egész számok halmaza: H . Írd föl H -nak azt az A részhalmazát, amely elemei az összes H -beli prím, és más eleme nincs. Írd föl az A komplementerét ($H \setminus A$ halmazt).

Mi a háromszögeket tartalmazó alaphalmazban a tompaszögű háromszögeket tartalmazó részhalmaz komplementere (vagyis ami nem tompaszögű háromszög)?

* Adott a térben 5 pont, amely közül egyik 4 sem komplanáris. (egyik 4 sincs egy síkban) Hány síkot határoznak meg a térben? (Három pontra illeszthető egy sík)

Oldd meg:
$$\frac{3x-6}{6} - \frac{15-9x}{12} = -4 + \frac{5-x}{2} - \frac{2x-2}{4}$$

d) Egyenestől vett távolság

Végy föl egy e egyenest, és először írd föl halmazelméletileg, majd rajzold meg a tőle

i) 1 cm-nél nem nagyobb távolságra található pontok halmazát:

$A = \{$

ii) 1 cm-re található pontok halmazát:

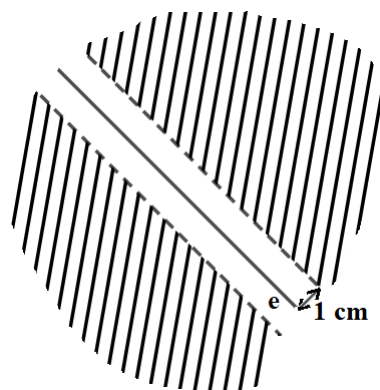
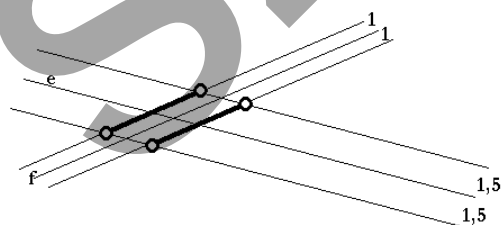
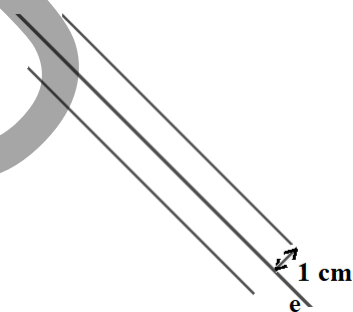
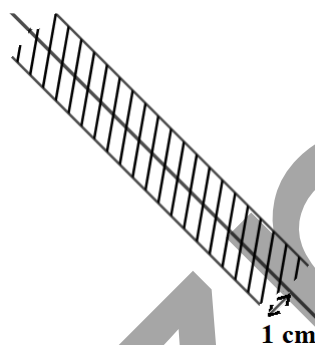
$B = \{$

iii) 1 cm-nél nagyobb távolságra eső pontok halmazát:

$C = \{$

iv) $D = \{P \in S \mid 1 \text{ cm} \leq d(e, P) < 1,5 \text{ cm}\}$

Add meg alattuk jelekkel a következő halmazokat:



Végy föl egy e egyenest, és rajzold meg:

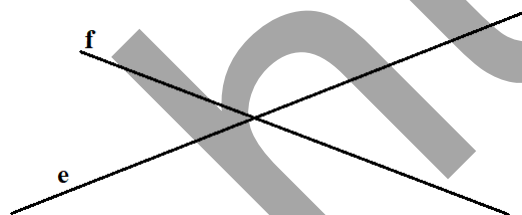
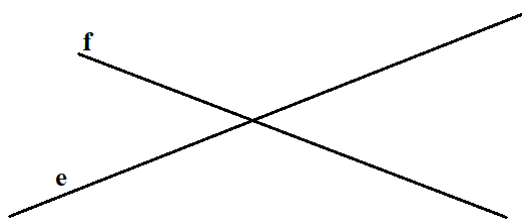
$$A = \{P \in S \mid d(e;P) < 1 \text{ cm} \vee 1,5 \text{ cm} \leq d(e;P) \}$$

$$B = \{P \in S \mid 1 \text{ cm} \leq d(e;P) \leq 1,5 \text{ cm} \}$$

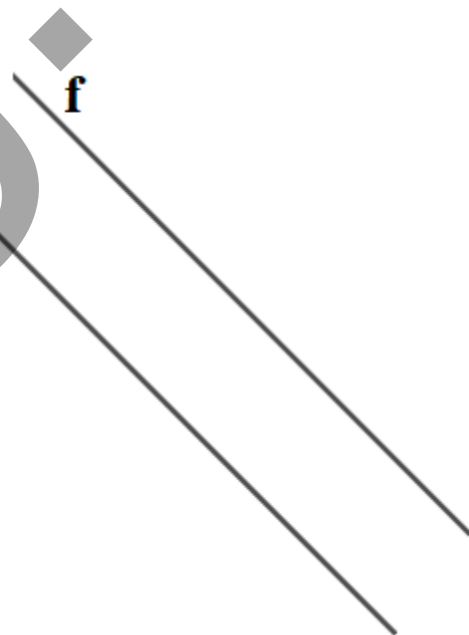
Rajzold meg:

$$L = \{P \in S \mid d(P;e) \leq 1,5 \wedge d(P;f) > 1\}$$

$$N = \{P \in S \mid d(P;e) > 2 \wedge d(P;f) = 1\}$$



$e \parallel f$ Rajzold meg azokat a pontokat, melyek kétszer olyan távol vannak f -től, mint e -től!



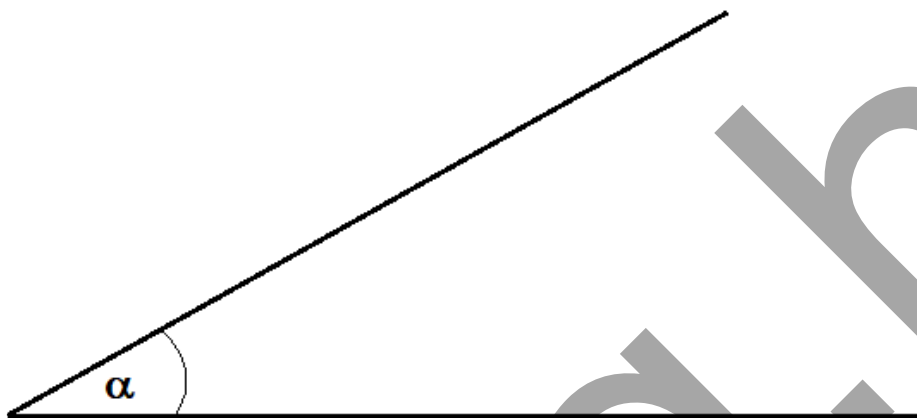
* Mutasd meg, hogy $\forall \triangle$ feldarabolható 2020 db. derékszögű $\triangle$ -re (nem kell, hogy egybevágók legyenek).

e) Szakasztól, félegyenestől való távolság („futóláncos kutya hatótávolsága”)

f) Szögfelező

Írd le szavakkal és jelekkel a szögfelezőre vonatkozó tételt!

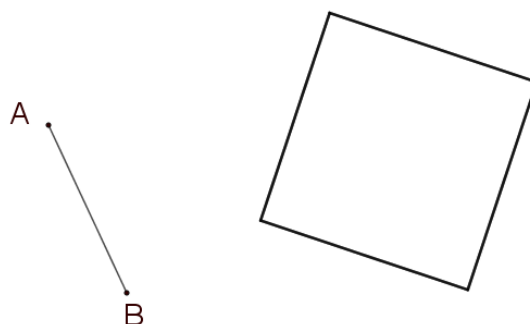
Adott az α szög. Szerkeszd meg a szögfelezőt. A szögfelezőnek a csúcstól 9 cm-re található P pontjából állíts merőlegest a két szára. Mérd le a P távolságát a két szártól és írd is rá!



Írd le szavakkal és jelekkel a szakaszfelező merőlegesre vonatkozó tételt!

g) Gyakorlófeladatok

Szerkesztéssel keresd meg a négyzeten azokat a pontokat, melyek egyenlő távolságra vannak az AB szakasz két végpontjától. Írd le, hogy gondolkodtál:

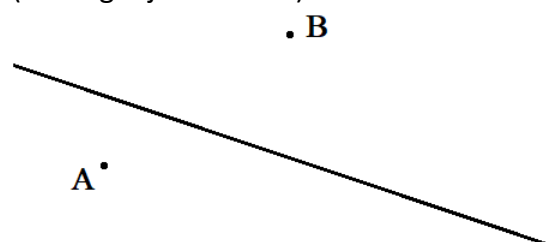


Oldd meg:
$$\frac{4x-2}{6} - \frac{6x-3}{15} = 1 - \frac{2x+1}{5}$$

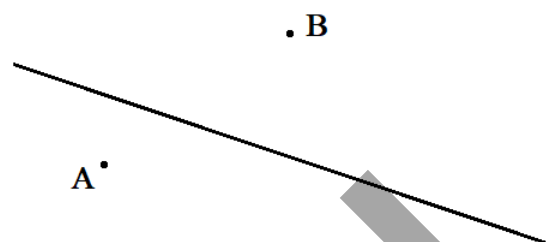
Egy sokszög átlóinak a száma 9-cel több, mint az oldalszámának hétszerese. Hány oldalú a sokszög?

Adott az e egyenes és a két partján az A és B pontok. Szerkeszd meg az e -n azt a pontot, amely egyenlő távolságra van az A és a B pontoktól!

„Mintha már kész lenne” ábra
(itt még rajzolnod kell)

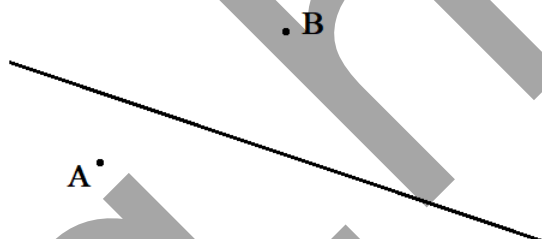


„Vakábra”



Elv:

Szerkesztés:



Diszkusszió:

Adott az AB és a DE szakasz. Szerkesztendő az a C pont, amelyre igaz, hogy az ABC_{Δ} és a DEC_{Δ} is egyenlőszárú Δ -ek, ahol az AB és a DE az alap.

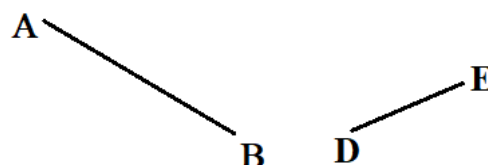
„Mintha már kész lenne” ábra
(Az ilyen ábrát néha „visszafelé”
gondolkodva kell felvenni...)”

„Vakábra”

Elv:

Szerkesztés:

Diszkusszió:



Egy sokszög átlóinak a száma 135. Hány oldalú a sokszög?

Oldd meg: $3x^2=45-6x$

2) Helyzetek: a diszkusszió elve

a) Pont és egyenes: illeszkedik, v. nem illeszkedik egyik a másikra.

b) Egyenesek helyzetei

Rajzold fel két egyenes (e és f) lehetséges helyzeteit a síkban.

Rajzold fel három (nem illeszkedő) egyenes lehetséges helyzeteit a síkban: e , f és g .

Hány pozitív osztója van az 504-nek? (Látszódjék, hogyan gondolkodsz, számolsz...)

Rajzold föl a következő eseteket: négy egyenes, melyeknek:

-) nincs közös pontjuk

-) 1 közös pontjuk van

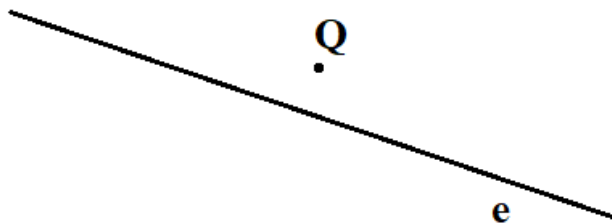
-) 6 közös pontjuk van

-) 3 közös pontjuk van (többféle is lehet)

e) 4 közös pontjuk van (többféle is lehet)

Rajzold meg a következő halmazt:

$$H = \{P \in e \mid d(P; Q) \leq 2 \text{ cm}\}$$



c) Körök helyzetei

Rajzold föl két 1,5 cm sugarú kör helyzeteit, alájuk írva, hogy milyen a Q_1 és Q_2 középpont távolsága, illetve a $|K_1 \cap K_2| = ?$

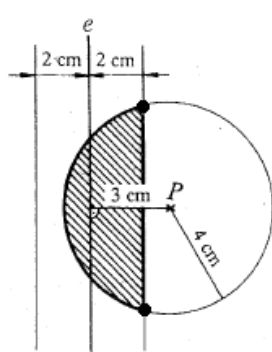
Add meg az összes olyan $36 \square 4 \square$ ötjegyű számot, amely osztható 24-gyel!

Két kör sugara: $r_1=1$ $r_2=3$ cm. Milyen távolságban lehet Q_1 és Q_2 egymástól, hogy a két körvonalnak a) ne legyen közös pontja b) 2 közös pontja legyen? Rajzolj is!

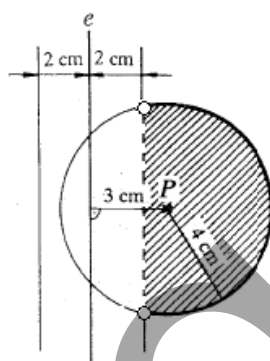
Rajzold föl: 1 cm sugarú kör 3 cm hosszú szakasz lehetséges helyzeteit (sokféle van...)!

Oldd meg: $\frac{12x-3x^2-12}{5x^2-20} = -3$

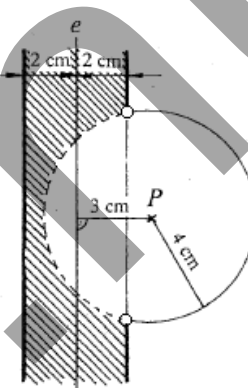
Add meg a jelölt halmazokat



A



B



C

A = {

B = {

C = {

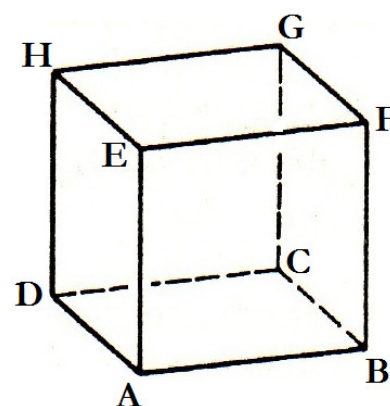
Adott a következő kocka:

Adj meg olyan él, lapátló, testátló egyeneseket, melyek:

a) párhuzamosak az $DAEH$ síkkal és F-en áthaladnak – legalább 3-at!

b) kitérők az DG lapátlóval és A-n áthaladnak – legalább 4-et!

c) kitérők a BH testátlóval és D-n áthaladnak – legalább 4-et!



GEOMETRIA B: TRANSZFORMÁCIÓK

I) Alapfogalmak, alaptételek, jelölések

1) A függvények

2) Valós-valós függvények, egyéb függvények

Adott $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto 3x+1$

$D_f =$ $R_f =$

Töltsd ki az alábbi értéktáblázatot!

x	1	-7					0	-19	
$f(x)$			-8	4	11	0			19

Mi a fixpontja?

Mi a „visszafelé függvény?” (Inverze?)

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; g(x) = \frac{x}{2} - 3$

$D_f =$ $R_f =$

Töltsd ki az alábbi értéktáblázatot!

x	0,5		0		0,2		-3		-1
$g(x)$		0		3		3,5		-1,2	

Mi a fixpontja?

Mi a „visszafelé függvény?” (Inverze?)

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{x}{3} + 1$

$D_f =$ $R_f =$

Töltsd ki az alábbi értéktáblázatot!

x	1	-7					0	-19	
$f(x)$			-8	4	11	0			19

Mi a fixpontja?

Mi a „visszafelé függvény?” (Inverze?)

Aki évvégén 5-öst szeretne: 30 db. páronként nem illeszkedő egyenes maximum hány metszéspontot adhat?

Nem kötelező: Milyen értelmezési tartományt kellene megadni az $y = x^2$ hozzárendelésű függvénynek, hogy kölcsönösen egyértelművé váljék?

Írd le a háromszögek négy egybevágósági esetét: szavakkal és jelekkel!

3) Az injektív függvények

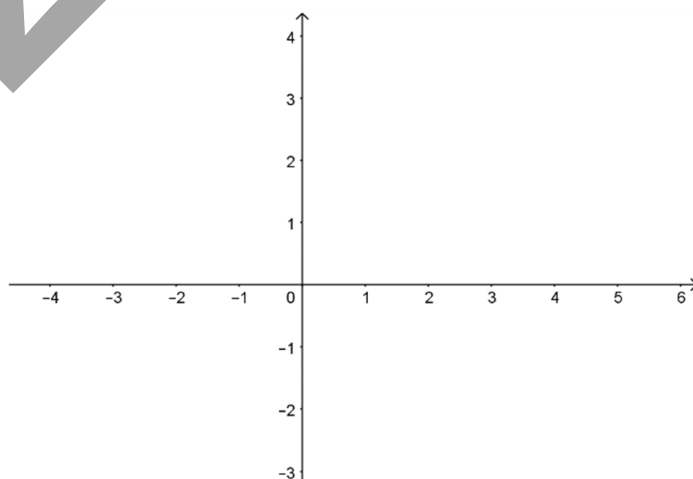
4) Geometriai transzformáció

Geometriai transzformációnak nevezzük az olyan függvényt, amely értelmezési tartománya is és értékkészlete is ponthalmaz.

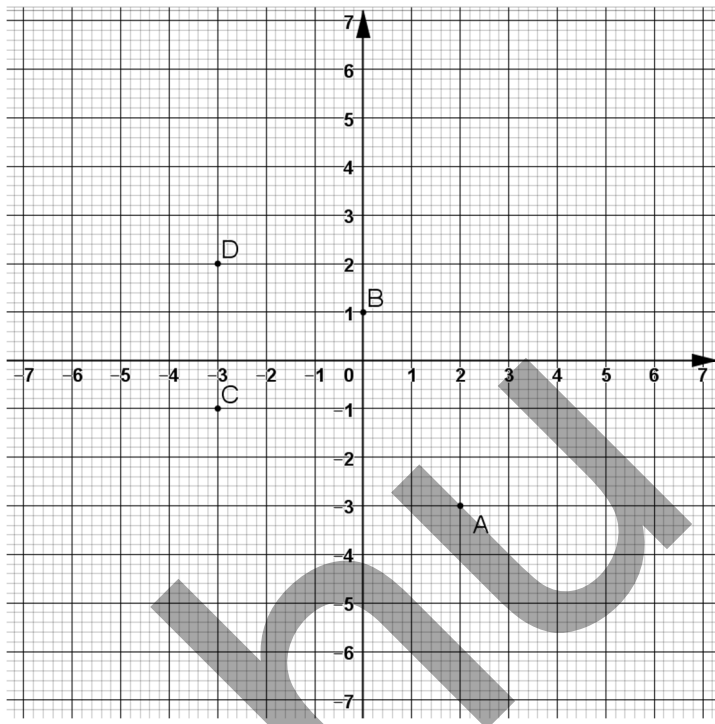
II) A geometriai szerkesztések menetei

III) A tengelyes tükrözés (egybevágósági transzformáció)

Írd be a megfelelő síknegyedek számát, és írd föl a tengelyekre a nevüket (idegen szavakkal).

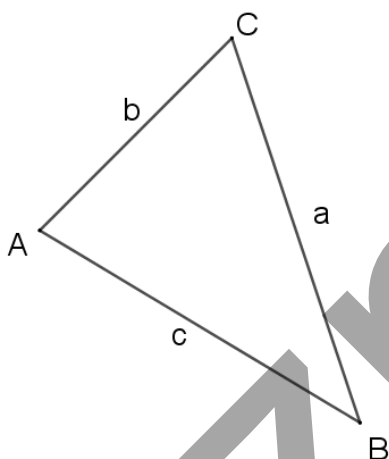


Derékszögű koordinátarendszerben adottak az $A(2;-3)$ $B(1;1)$ $C(-3;-1)$ $D(-3;2)$ pontok.
Tükrözd őket az x ; az y tengelyre, majd az AD egyenesre. Írd be a kapott pontok koordinátáit!

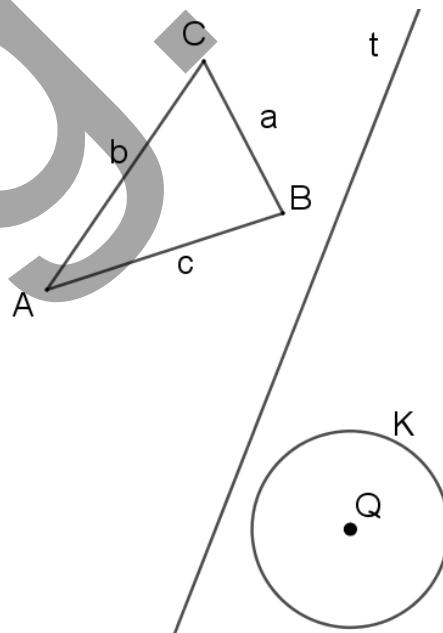


1) Definíció + tulajdonságok

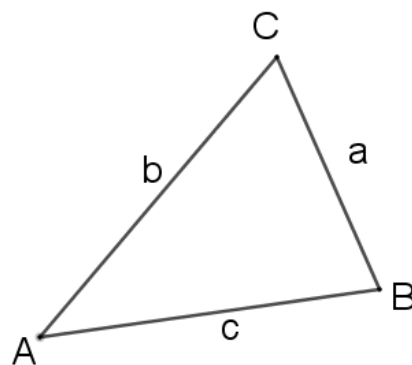
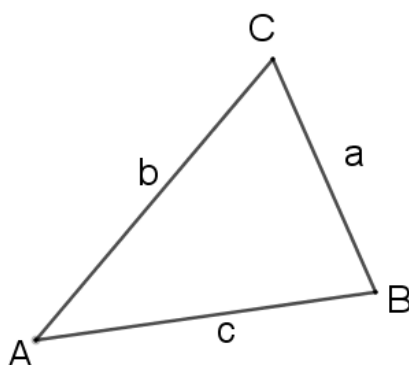
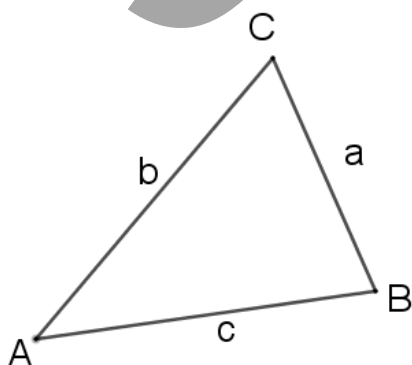
Tükrözd a háromszöget az a oldalra!



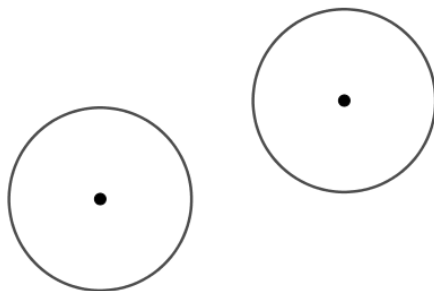
Tükrözd a két alakzatot a t tengelyre!



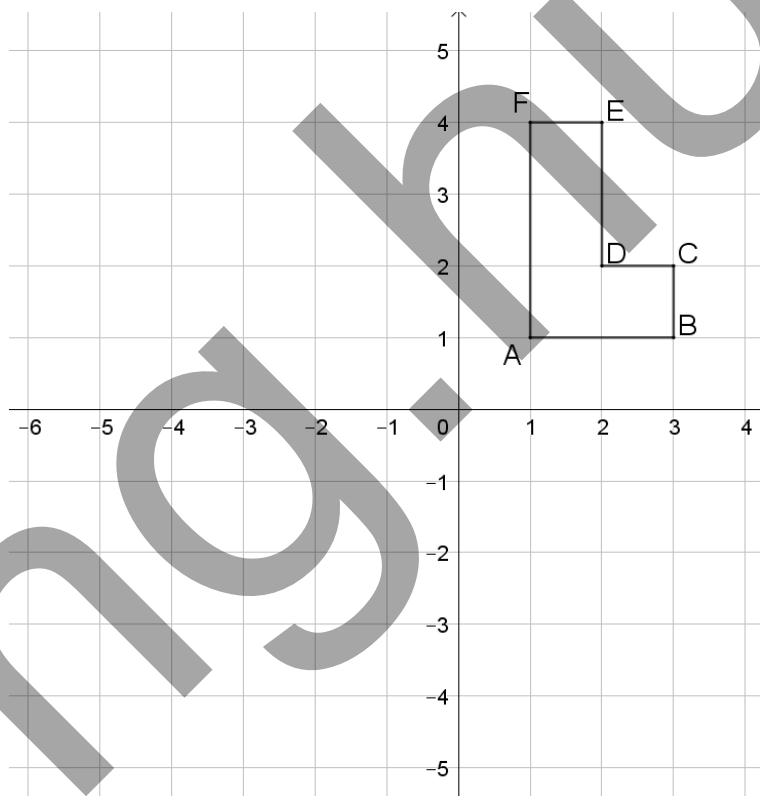
Tükrözd a) $f_c^\perp$ (c oldalfelező merőlegesére) b) f_β -ra (β szögfelezőjére) c) b oldalra



A két kör sugara egyenlő. Szerkeszd meg a t tükörtengelyüket (vagyis amira: $t(K_1) \equiv K_2$)



Az $A(1;1)$ $B(3;1)$ $C(3;2)$ $D(2;2)$ $E(2;4)$ $F(1;4)$ alakzatot tükrözd az abszcisszára, ordinátára, és a két tengely II. és IV. síknegyedben haladó szögfelezőjére. Írd be az új koordinátákat is!



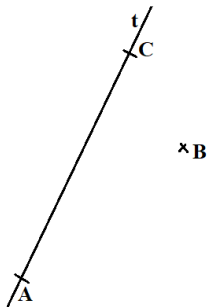
2) Tengelyesen tükrös alakzatok: vagyis egy megfelelő tengelyre nézve invariáns alakzatok

* Adott egy ABC_{Δ} . Legyen $P \in AC$. Szerkesszük meg a következő pontot: $f_{\alpha}(f_{\beta}(f_{\gamma}(P)))$. (Vagyis először tükrözzöm az f_{γ} -ra: $P \rightarrow P'$, majd ezt a P' tükörképet f_{β} -ra: $P' \rightarrow P''$, végül P'' -öt f_{α} -ra: P''' . Hová kerül (vagyis hová kell kerülnie) P''' -nek?

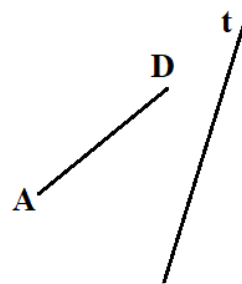
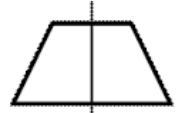
A 2 egység $\times$ 4 egység oldalú téglalapot tükrözd a) rövidebbik oldalára, b) a hosszabbik oldalára. Számold ki az új alakzatok kerületét és területét!



Adott egy deltoid szimmetria-tengelye: t , a rá illeszkedő két csúcsa: A és C , illetve a B csúcsa. Szerkeszd meg a deltoidot!



Adott egy húrtrapéz (vagyis tengelyesen tükrös trapéz) t szimmetria-tengelye és az egyik szára (vagyis a szár két végpontja, A és D). Szerkeszd meg a trapézt!



Szerkessz egy 5, illetve egy 6 csúcsú, nem szabályos (tetszőleges), de csak 1 szimmetria-tengellyel bíró sokszöget!

Nem köt.: adott két egymásra merőleges t_1 és t_2 tengely. Ha egy k kört sorban egymás után így tükrözök: először a t_1 -re, majd a t_2 -re majd újra a t_1 -re és végül a t_2 -re, akkor hova kerül a negyedik kép?

3) Alappéldák

Szerkessz egyenlőszárú háromszöget, ha adott a szimmetria tengelye, az azon található C csúcs, illetve az A -n és a B -n áthaladó e és f egyenesek.

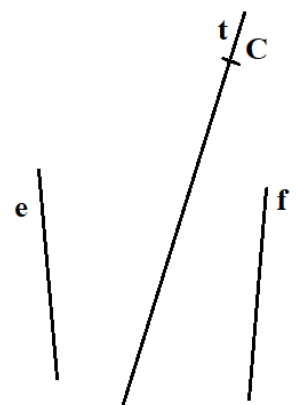
„Mintha már kész lenne” ábra

„Vakábra”

Elv:

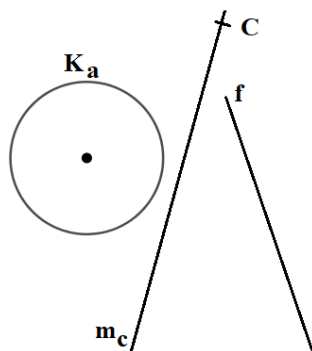
Szerkesztés:

Diszkusszió:

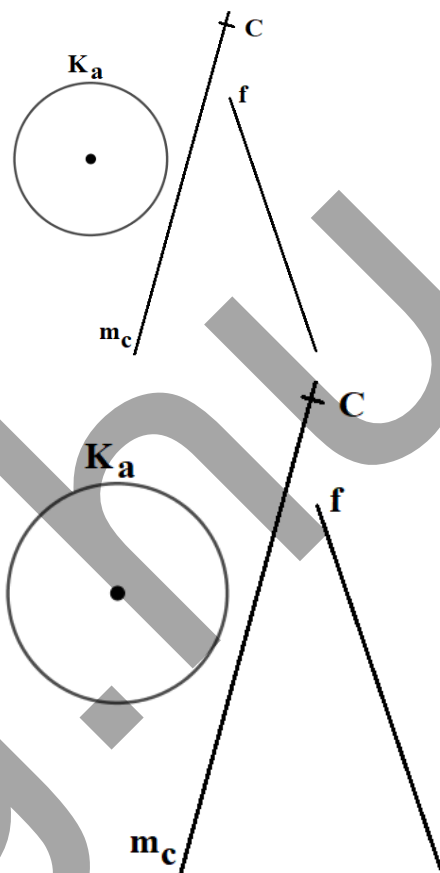


Adott egy egyenlőszárú háromszög alappal szemkötti C csúcsa és az abból induló magasság egyenese: m_c . Adott még az A -n áthaladó K_a kör és a B -n áthaladó f egyenes. Szerkeszd meg a háromszöget.

„Mintha már kész lenne” ábra
(itt még rajzolnod kell)



„Vakábra”



Elv:

Szerkesztés:

Diszkusszió:

Egy háromszögből adott az A és a B csúcs és f_γ egyenese (az γ szög szögfelező egyenese). Szerkesztendő a háromszög! Diszkusszió!

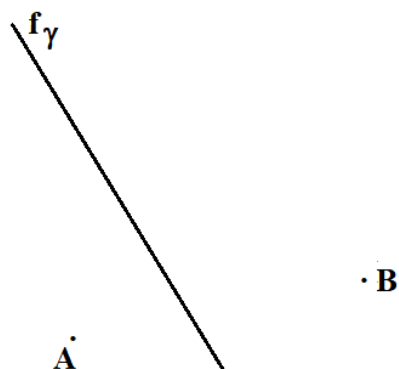
„Mintha már kész lenne” ábra
(itt még rajzolnod kell)

„Vakábra”

Elv:

Szerkesztés:

Diszkusszió:



Aki 5-ös szeretne lenni: Végül fel egy nem egyenlőszárú háromszöget, és tükrözzük egyik oldalfelező merőlegesére! Az eredeti és a képként kapott háromszög csúcsai egy szimmetrikus trapéz határoznak meg. Mutasd meg, hogy ebből a trapézból az egyik átlója olyan háromszöget metsz le, amelynek két oldala egyenlő az eredeti háromszög két oldalával, és eme két oldal által bezárt szög az eredeti háromszög két szögének különbsége!

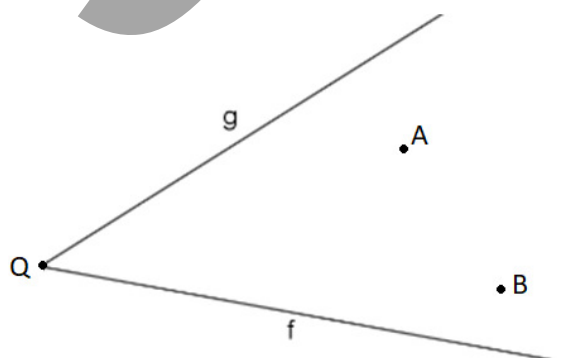
Aki 5-ös szeretne lenni: Szerkessz háromszöget, ha adott: $a = 7$; $b = 5$ cm és $\beta - \alpha = 40^\circ$ (Vonalzó, körző, szögmérő!) (Lásd előző példa...)

„Mintha már kész lenne” ábra
(itt még rajzolnod kell)

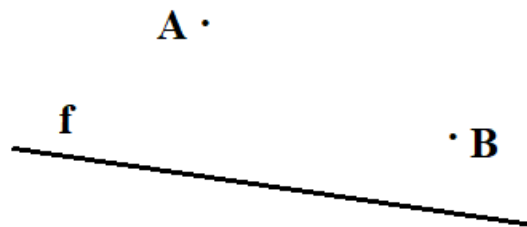
„Vakábra”

Elv, Szerk, Diszk

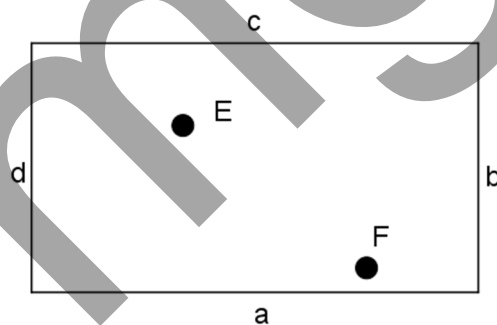
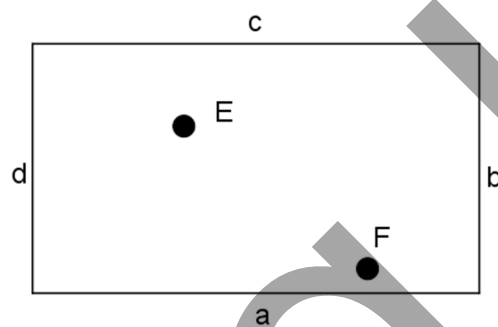
* Egy hegyesszög két szárja közt van az A és a B pont. Szerkeszd meg az a legrövidebb töröttvonalat, mely A -ból elmegy a g szárig, onnan az f -ig, majd onnan a B -be.



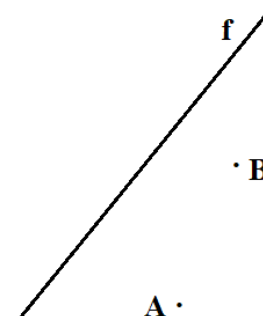
Szerkeszd meg az f egyenesnek azon F pontját, melyre az AFB töröttvonal hossza a legrövidebb!



* Egy téglalap alakú biliárdasztalon két golyó van: A és B . Szerkeszd meg, hogyan kell meglökni az E -t, hogy a) a d falat érintve eltalálja F -t, b) a c és b falakat érintve eltalálja F -t?



Adott egy f egyenes és rajta kívül az egyik oldalán A és B pont. Szerkeszd meg (elv stb...) azt a $C \in f$ pontot, amelyre az ABC_{Δ} -nek legkisebb a kerülete.

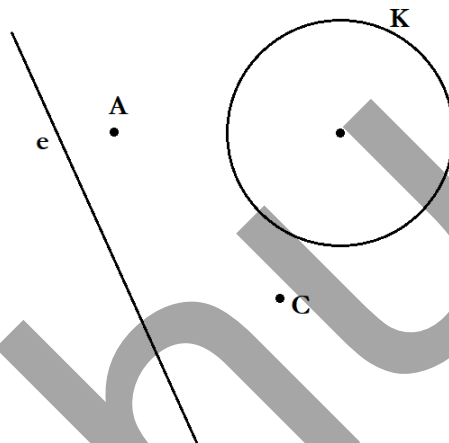
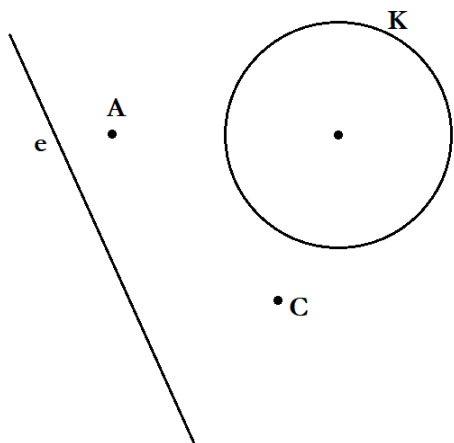


4) Egyéb, tengelyes tükrözésen alapuló példák

Szerkessz deltoidot, ha adott a szimmetriaátlójára illeszkedő A és C csúcsa, a B -n áthaladó e egyenes, és a D -n áthaladó K kör.

„Mintha már kész lenne” ábra
(itt még rajzolnod kell)

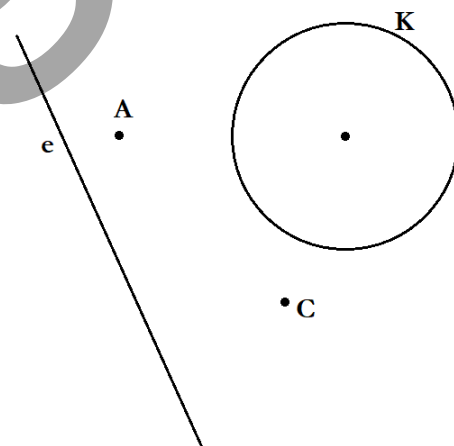
„Vakábra”



Elv:

Szerkesztés:

Diszkusszió:

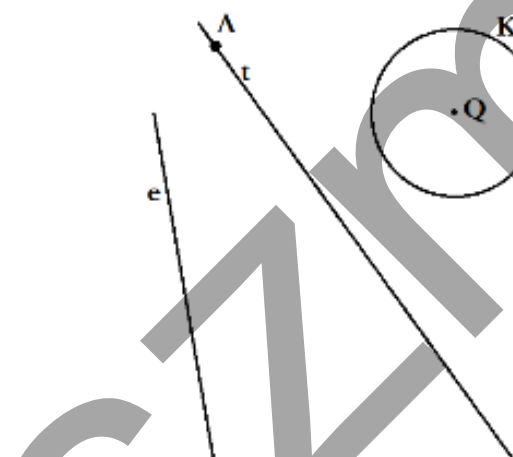


* Szerkesztendő Δ , ha adott: f_α és f_γ egyenese, és az az E pont, ahol a beírt kör érinti az a oldalt. (Érintő egyenest még nem tudsz szerkeszteni, elég, ha rajzolod.)

Egy rombuszból adott az A csúcsa, az azon áthaladó átlóegyenese, illetve egy e egyenes, melyre a B csúcs illeszkedik és egy K kör, melyre D illeszkedik. Szerkesztendő a rombusz.

„Mintha már kész lenne” ábra
(itt még rajzolnod kell)

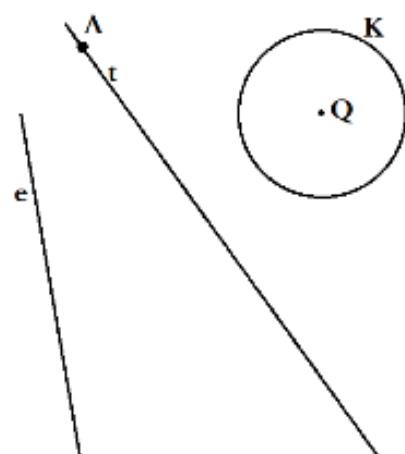
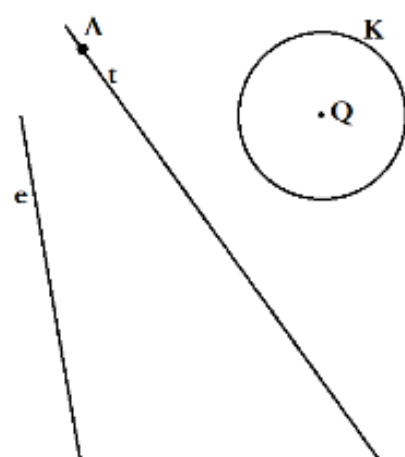
„Vakábra”



Elv:

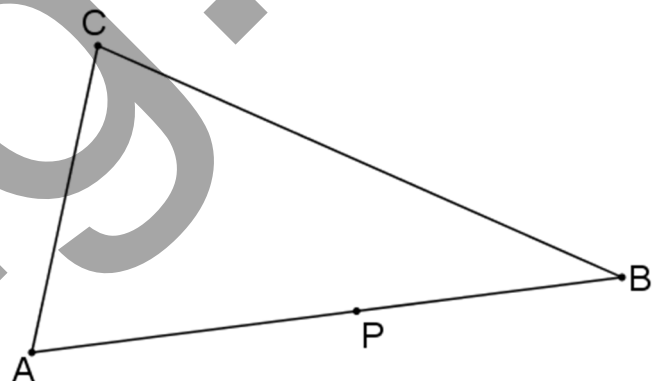
Szerkesztés:

Diszkusszió:

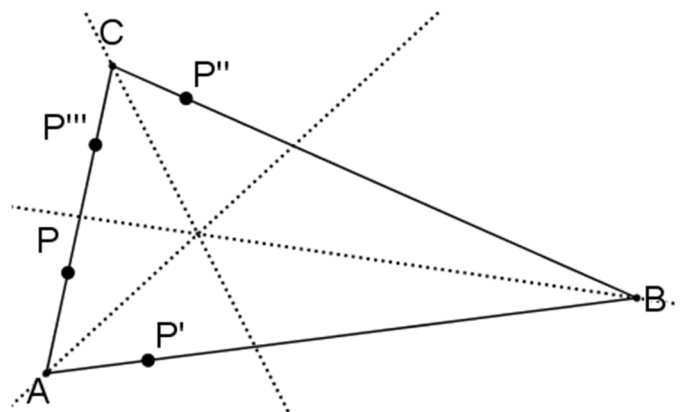


Nem köt.: Egy egyenlő szárú Δ -nek ismerjük az alapon fekvő két csúcsát: A és B , illetve adott az a K kör, mely átmegy a C csúcson. Szerkesztendő a Δ . (Ábrák, Elv, diszk)

* Egy hegyesszögű háromszög c oldalán van egy P pont. Szerkesszük meg az a oldalon azt a Q és a b oldalon azt az R pontot, hogy a PQR háromszög kerülete minimális legyen.



* Tükrözzük egy háromszög b oldalára eső P pontját sorban: f_α -ra, majd azt f_β -ra majd azt f_γ -ra. A P''' visszakerül a b oldalra. Magyarázd el miért! Hogyan szerkesztenél meg egy háromszöget, ha adva van a három (egymást egy pontban metsző) szögfelezője, és egy oldalnak egy pontja?



A következő állításokról döntsük el, hogy melyik igaz, melyik hamis!

Minden sokszögnek van szimmetriatengelye: *Igaz/Hamis*

A tengelyes tükrözés invariáns egyenese párhuzamos a tengellyel: *Igaz/Hamis*

Minden szabályos sokszögnek van szimmetriatengelye: *Igaz/Hamis*

Nincs tengelyesen szimmetrikus háromszög: *Igaz/Hamis*

A tengelyes tükrözés a körüljárást megtartja: *Igaz/Hamis*

Van olyan háromszög, amelynek pontosan egy szimmetriatengelye van: *Igaz/Hamis*

Van olyan háromszög, amelynek pontosan három szimmetriatengelye van: *Igaz/Hamis*

Van olyan négyszög, amelyik két tengelyesen szimmetrikus háromszögre bontható: *Igaz/Hamis*

Egy n oldalú szabályos sokszögnek pontosan n darab szimmetriatengelye van: *Igaz/Hamis*

A tengelyes tükrözésnek van fixpontja: *Igaz/Hamis*

Minden tengelyesen szimmetrikus sokszög konvex: *Igaz/Hamis*

A tengelyes tükrözésnek van két olyan invariáns egyenese, melyek metszik egymást: *Igaz/Hamis*

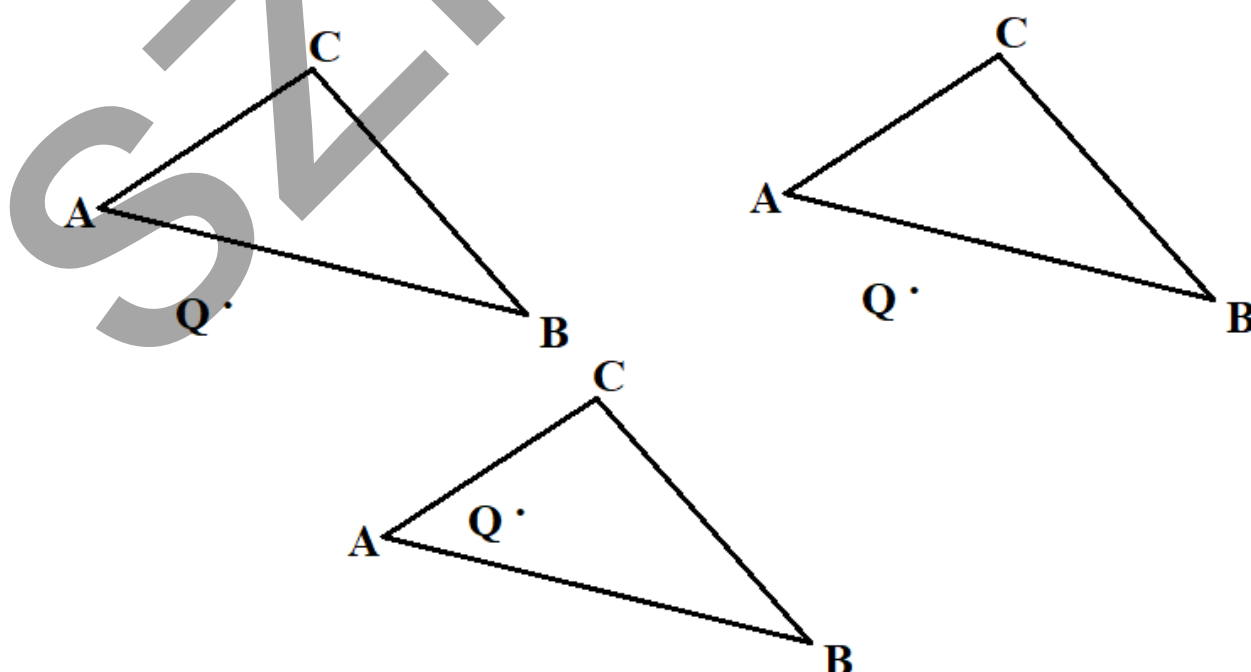
IV) Forgatás (egybevágósági transzformáció)

1) Definíció + tulajdonságok

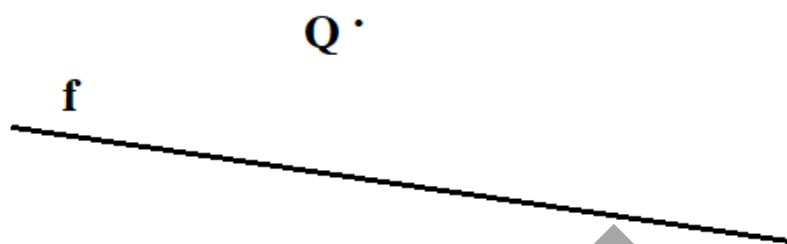
Adott egy Q pont és egy P . Szerkeszd meg a következőket: a) $Q^{+45^\circ}(P)$ b) $Q^{-120^\circ}(P)$



A Q pont körül fordasd el a háromszöget (mindhárom csúcsot!) a) $+30^\circ$ -kal b) -90° -kal. c) 180° -kal.



Forgasd el az egyenest Q pont körül -75° -kal: $Q^{-75^\circ}(f)$ (Használhatsz szögmérőt.) Mérd le az f és f' szögét és írd is be a metszéspontjuknál!



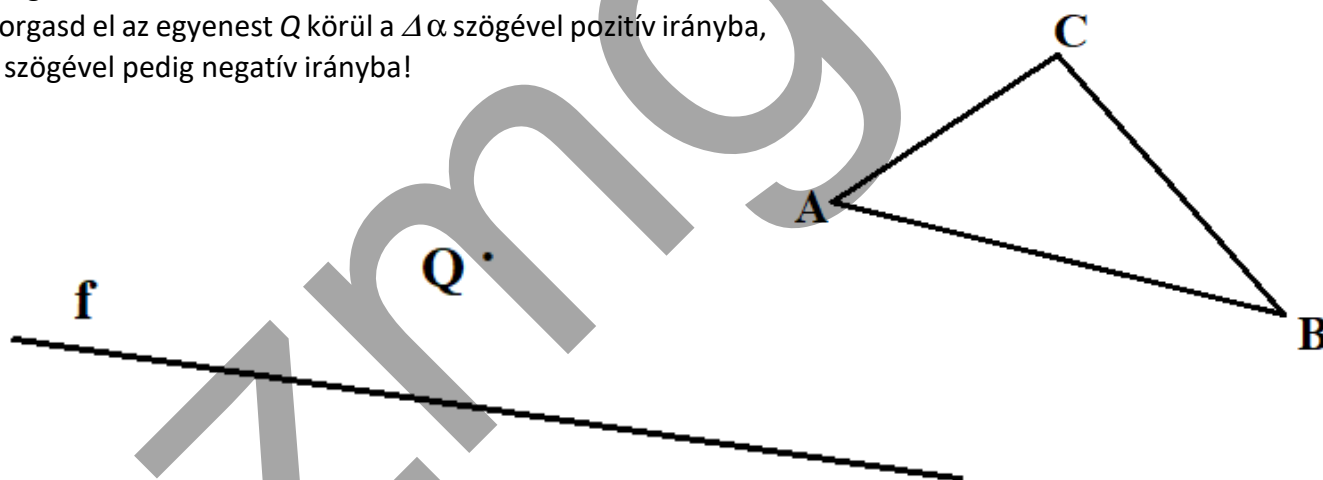
Mely tulajdonságai azonosak és melyek különböznek a forgatásnak a tengelyes tükrözésétől? Külön-külön gyűjtsd ki az azonosakat és a különbözőket!

Azonos:

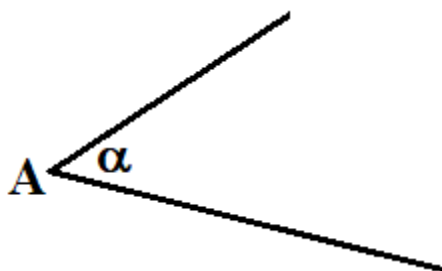
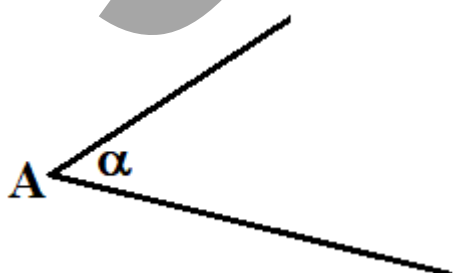
Különböző:

2) Forgassunk

Forgasd el az egyenest Q körül a $\angle \alpha$ szöggel pozitív irányba, γ szöggel pedig negatív irányba!



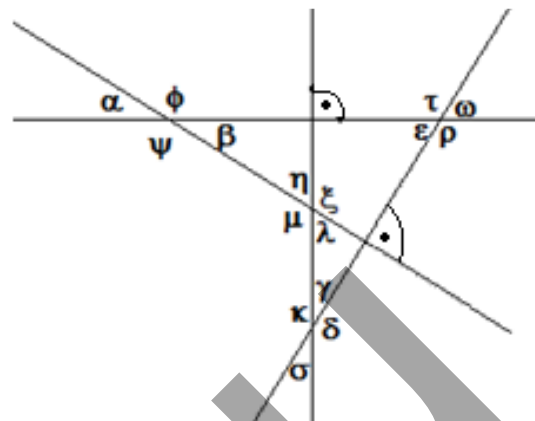
A α szögnek szerkeszd meg egy merőleges szárú szögpárját: a) vele egyenlőt; b) kiegészítőt.



3) Kiegészítő szögek; Mellékszögek; Merőleges szárú szögek

Az ábra alapján adj meg egy táblázatban kiegészítő szögpárokat, mellékszögeket, merőleges szárú kiegészítőket, illetve merőleges szárú egyenlőket.

α	σ	merőleges szárúak	egyenlők
α	ϕ	mellékszögpár	
ε		merőleges szárúak	egyenlők
ω		mellékszögpár	
ρ		merőleges szárúak	egyenlők
ε		merőleges szárúak	kiegészítők
τ		merőleges szárúak	kiegészítők
η		mellékszögpár	
γ		merőleges szárú	egyenlők



A Δ -ben meghúztam az m_a és m_c magasságot. A Δ szögei: α , β és γ . Minden egyéb szögnek adj külön nevet.

Adj meg:

2 pár: Egyenlő szögpárt:

2 pár: Kiegészítő szögpárt:

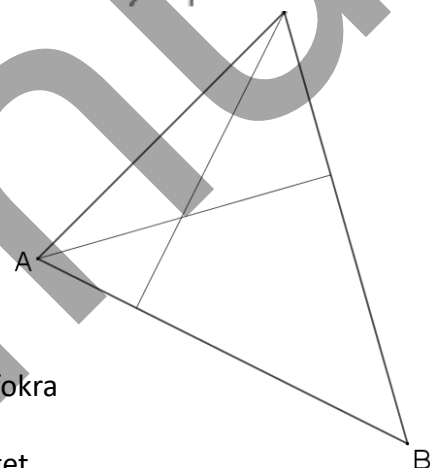
2pár: Mellékszögpárt:

4) Forgásszimmetrikus alakzatok: mindig tegyük hozzá: mi körül és hány fokra

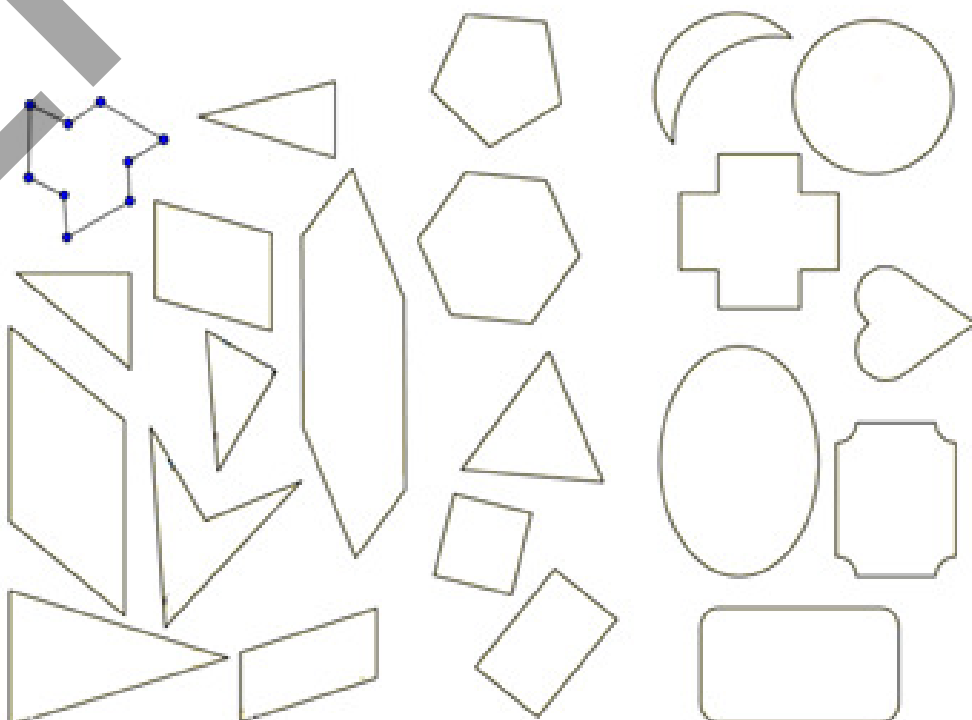
* Rajzolj 120° -ra forgásszimmetrikus alakzatot:

nem szabályos konvex 6 szöget és nem szabályos, konkáv 9 szöget.

Van-e ilyen 8-szög?

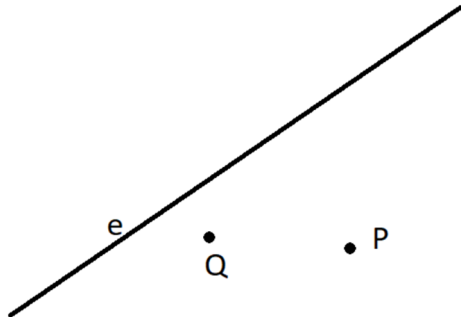


Írd be az alakzatokba (ami szög vagy oldal egyenlőnek látszik az egyenlő is), hogy hány fokra forgásszimmetrikusak, illetve hányad rendben forgásszimmetrikusak – ha azok, illetve a tengelyesen szimmetrikusoknak rajzold be vonalzóval a tengelyét – van, amibe semmit sem lehet írnod!

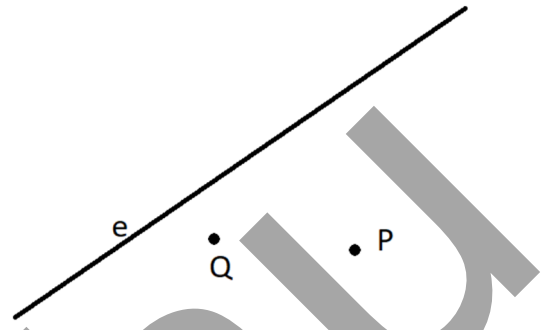


- 5) (Számelmélet a forgatással kapcsolatban – kimarad)
 6) Alappéldák

Adott e, P, Q . Forgasd el Q körül P -t, hogy a P' az e -re essék! (Vedd észre, hogy itt a forgatás szögét kell megtaláld, „kiszzerkesztened”)

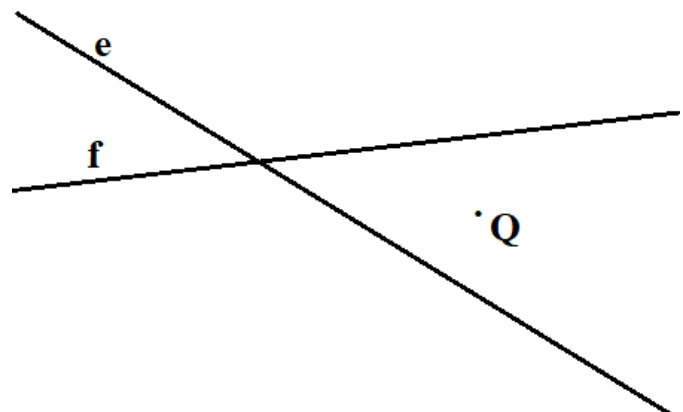


Forgasd el Q körül e -t, hogy az e' a P -re essék! (Vedd észre, hogy itt a forgatás szögét kell megtaláld, „kiszzerkesztened”)



Nem köt.: Végy föl egy e egyenest, egy $K(Q;r)$ kört (ex has) és úgy egy P pontot, hogy P körül a kört 90°-kal elforgatva az egyenes messe a K' -t (az elforgatott kört). Legyen az egyik metszéspont M . M_0 ennek a pontnak az ősképe. (Rajzold is föl) Mit mondhatunk a PMM_0 $\triangle$ -ről?

Forgasd el Q körül f -et úgy, hogy a kép párhuzamos legyen e -vel. (Vedd észre, hogy itt a forgatás szögét kell megtalálnod, „kiszzerkesztened”)



Adott az A és B pont. Add meg azt/azokat a pontot/pontokat, melyből az A a B -be forgatható a) 30° -kal b) -90° -kal c) 180° -kal.

A

A

A

B

B

B

Adott egy szabályos Δ A csúcsa és a Q középpontja (itt a magasságpont, súlypont, köré és beírt kör középpontja megegyezik). Szerkeszd meg a Δ -et!

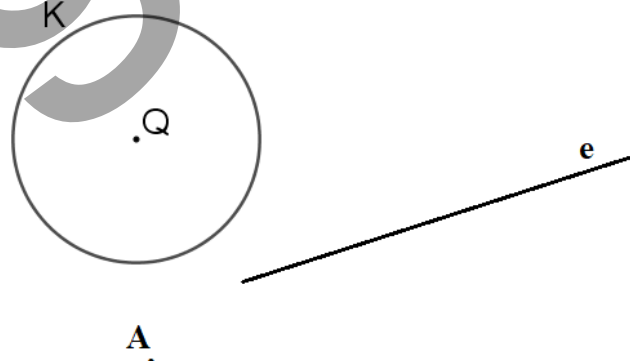
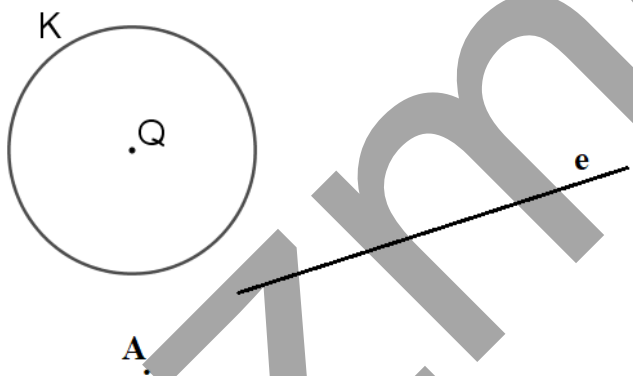
„Mintha már kész lenne” ábra

„Vakábra”

Egyenlőoldalú Δ -ből adott: A csúcs, a C -n áthaladó K kör és a B -n áthaladó e egyenes. Kell a Δ . (Mintha már... Vakábra, Elv, diszk, Szerk.)

„Mintha már kész lenne” ábra
(itt még rajzolnod kell)

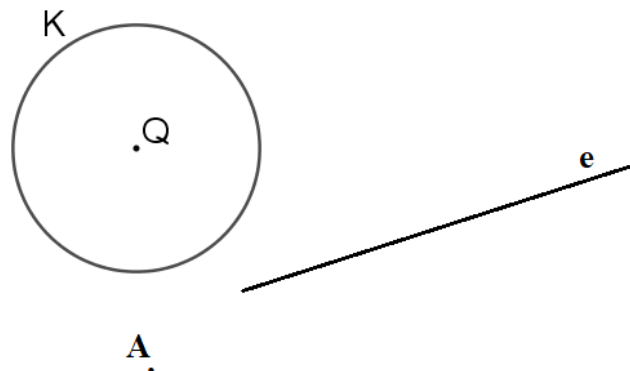
„Vakábra”



Elv:

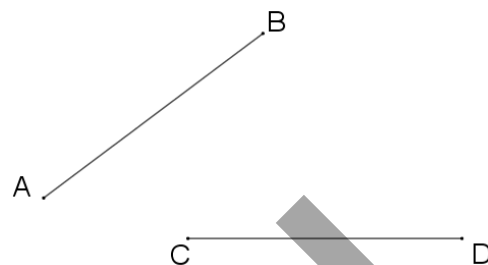
Szerkesztés:

Diszkusszió:



7) Egyéb gyakorló példák

Adott két egyenlő hosszú szakasz a síkon: AB és CD . Kell $Q \rightarrow Q^\alpha(AB) \equiv CD$. (Vagyis szerkesszük meg azt a pontot a síkon, amelyből az AB átforgatható a CD -be valamilyen szöggel.) *Segítség: arra a két kérdésre adj választ, hogy hol vannak azok a pontok, melyekből A -t C -be lehet forgatni; illetve hol vannak azok a pontok, melyekből B -t D -be lehet forgatni...*



Írd a következő állításokról mellé, hogy Igaz, vagy Hamis.

A forgatás szimmetrikus transzformáció: *Igaz/Hamis*

Nincs forgásszimmetrikus Δ : *Igaz/Hamis*

Az egyenlő szárú háromszög forgásszimmetrikus: *Igaz/Hamis*

A forgatás megtartja a körüljárást: *Igaz/Hamis*

A derékszögű háromszög forgásszimmetrikus: *Igaz/Hamis*

A rombusz forgásszimmetrikus: *Igaz/Hamis*

A paralelogramma csak az átlók metszéspontjára vonatkozó $+180^\circ$ -os, vagy -180° -os forgásra nézve szimmetrikus: *Igaz/Hamis*

A téglalap forgásszimmetrikus: *Igaz/Hamis*

Bármely 3-nál nem kisebb n természetes számhoz van olyan n oldalú sokszög, amely forgásszimmetrikus $\frac{360}{n}$ fokra: *Igaz/Hamis*

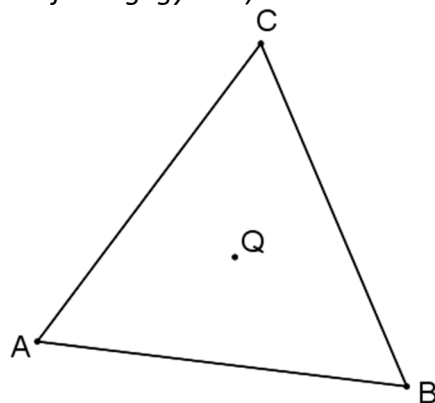
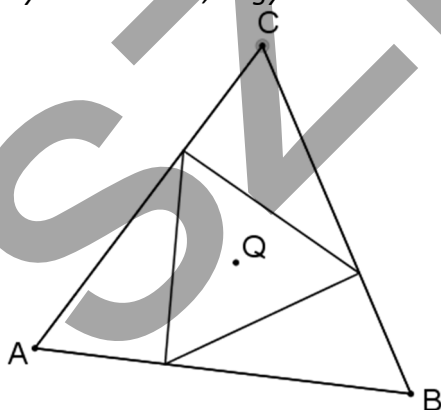
Van olyan konkáv egyszerű négyszög, amelyik forgásszimmetrikus: *Igaz/Hamis*

Van olyan konkáv sokszög, amelyik forgásszimmetrikus: *Igaz/Hamis*

* Ha egy alakzat 7° -ra forgásszimmetrikus a középpontjára tekintve, akkor 1° -ra is: *Igaz/Hamis*

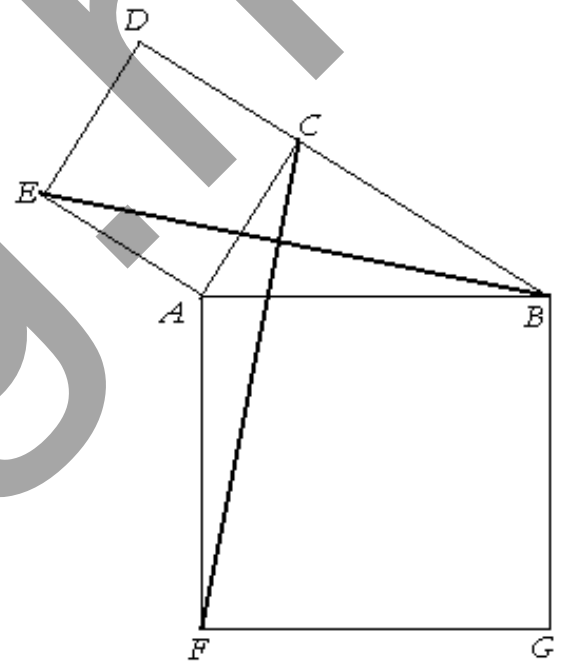
Ha egy síkidom forgásszimmetrikus, akkor van olyan egyenes, amelyre nézve tengelyesen szimmetrikus: *Igaz/Hamis*

Aki 5-ös akar lenni...: Szerkesszünk egy egyenlő oldalú Δ -be adott oldalú egyenlő oldalú Δ -et. (Segítség: könnyen belátható, hogy a két háromszög szimmetria-középpontja megegyezik.)



Végy föl egy Q pontot, és szerkessz rajta keresztül két olyan tengelyt (t_1, t_2), hogy az azokra történő egymás utáni tükrözés a Q pont körüli 90° -os forgatás legyen!

Aki 5-ös akar lenni: Adott egy derékszögű ABC_Δ . Az AC -re és AB -re kifelé négyzetet szerkesztünk. a) Mutasd meg, hogy $CF = EB$ b) Mutasd meg, hogy $T_{ACDE} = 2 \cdot T_{ABE}$ (területek).

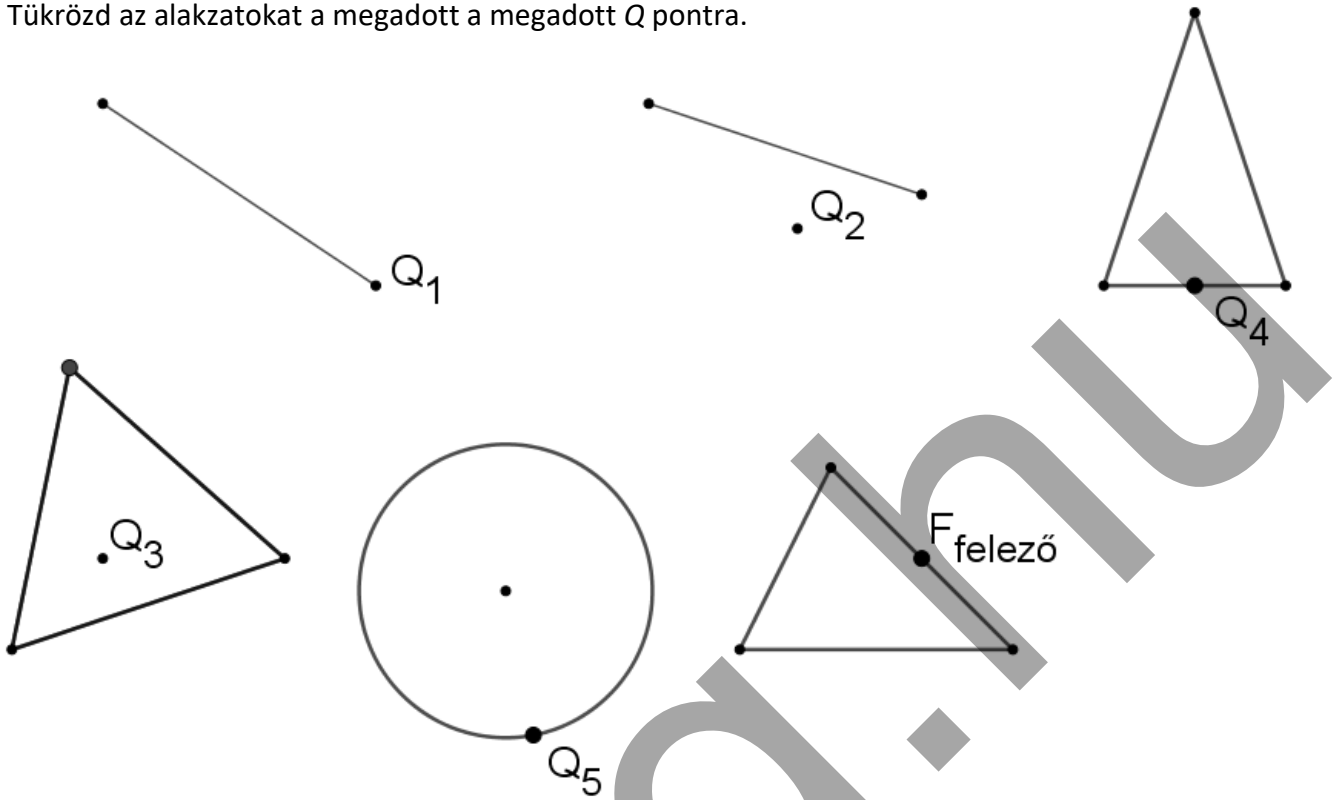


V) A középpontos tükrözés (egybevágósági transzformáció)

A forgatás speciális esete: 180° -os forgatás

1) Tükrözzünk

Tükröld az alakzatokat a megadott a megadott Q pontra.



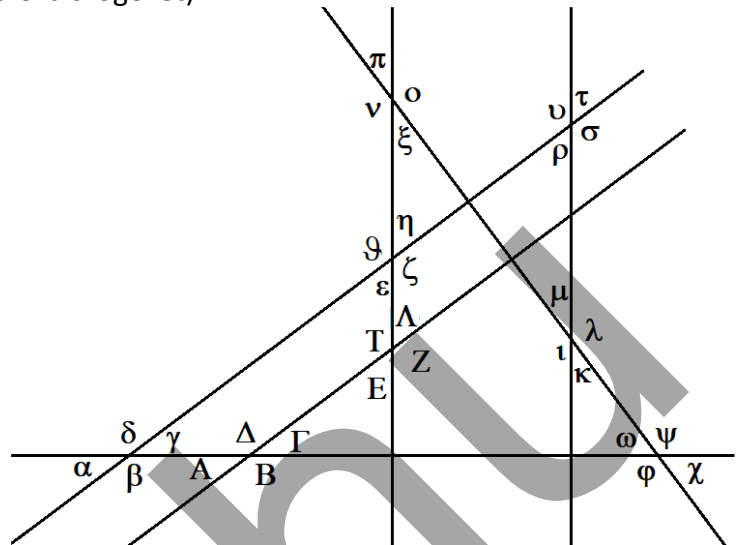
2) Definíció + tulajdonságok

Írd le a kp-os tükrözés definícióját, és a tulajdonságait!

3) Fordított állású szögek

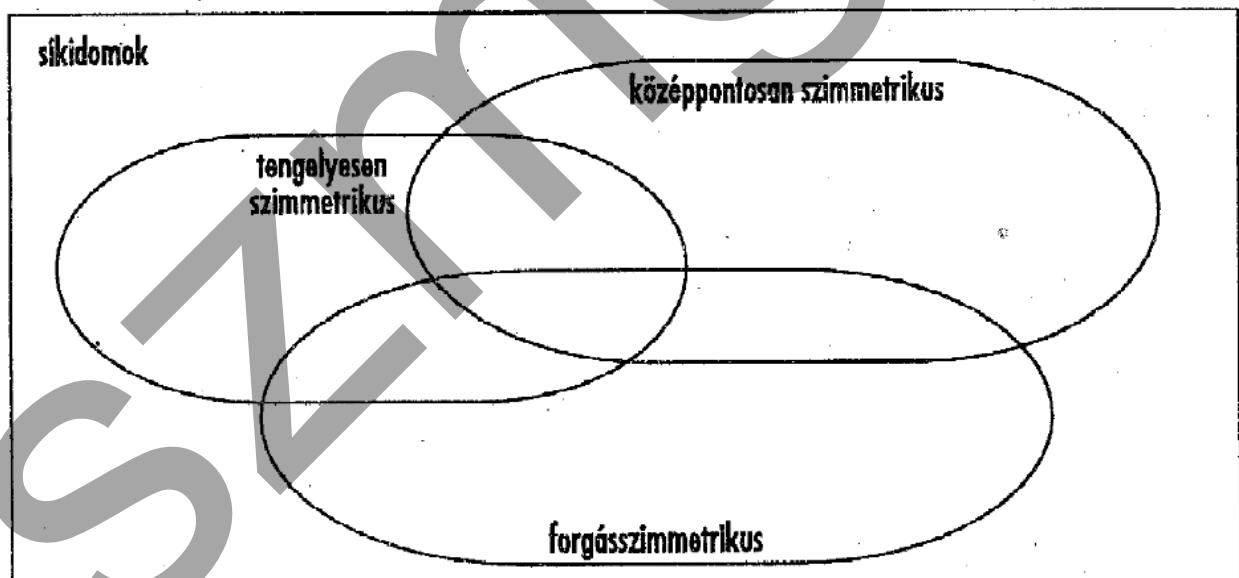
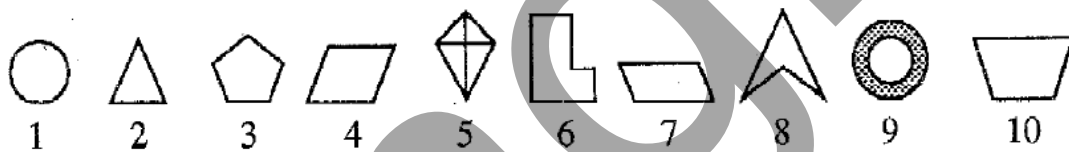
Ami párhuzamosnak látszik, az párhuzamos, ami merőlegesnek, az merőleges. Egy táblázatban írd föl minden szögpártípusra 2-2 példát. (először jelöld el a szögeket).

α		merőleges szárú	egyenlő
ι		csúcsszőgpár	
η		kiegészítő	
ζ		mellékszögek	
ε		váltószögek (nem csúcs)	
σ		csúcsszőgek	
ω		merőleges szár	kiegészítő
η		váltószőgpár (nem csúcs)	
τ		váltószőgpár (nem csúcs)	

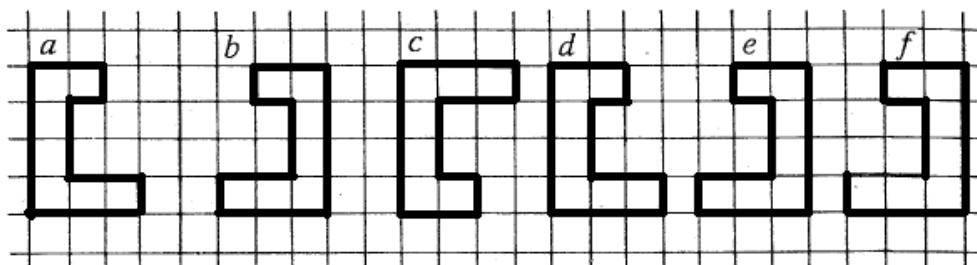


4) Középpontosan szimmetrikus alakzatok

Rajzold be a helyükre az ábrákat – „itt ami egyenlőnek látszódik, az az is!”



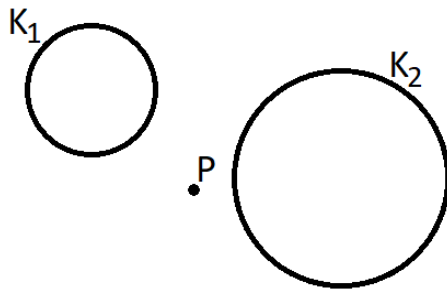
Az ábrán mely alakzat-párok vihetők egymásba kp-os tükrözéssel?



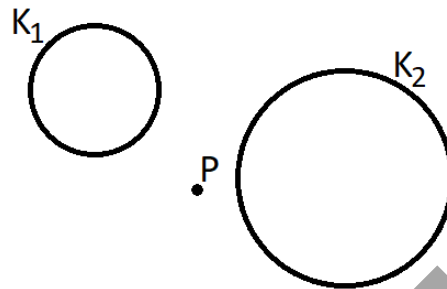
5) Alappéldák

Szerkessz egy közös szelőt, mely a két kör közé eső szakaszát a P pont felezi.

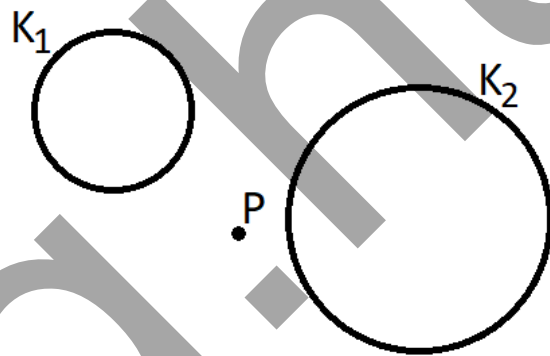
„Mintha már kész lenne” ábra
(itt még rajzolnod kell)



„Vakábra”



Elv:



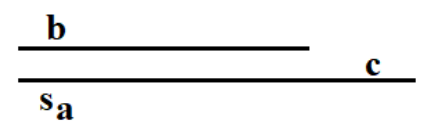
Szerkesztés:

Diszkusszió:

Adott egy Δ -ből: c ; b ; s_a (a-hoz tartozó súlyvonal). Szerkesztendő a Δ .

„Mintha már kész lenne” ábra
(itt még rajzolnod kell)

„Vakábra”



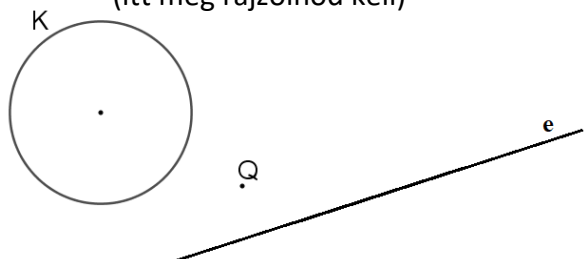
Elv:

Szerkesztés:

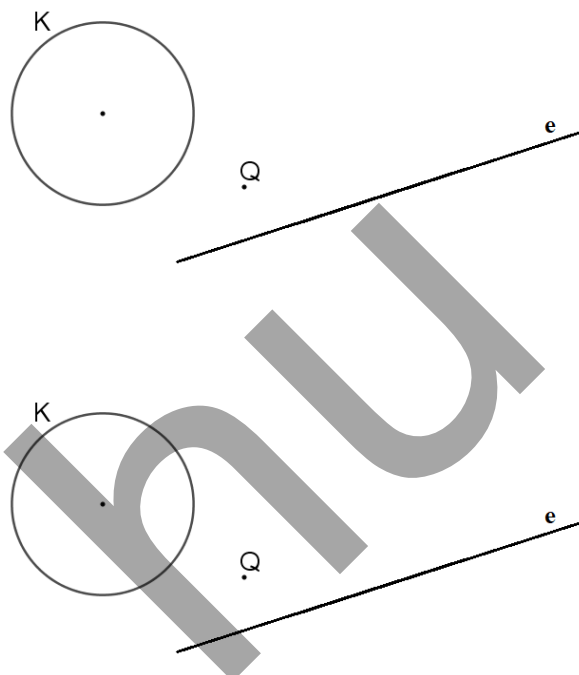
Diszkusszió:

Adott egy ABCD négyzet középpontja: Q , egy - az A -n áthaladó - K kör és egy - a C -n áthaladó - e egyenes. Szerkesztendő a négyzet. (Elv, szerk, diszk)

„Mintha már kész lenne” ábra
(itt még rajzolnod kell)



„Vakábra”

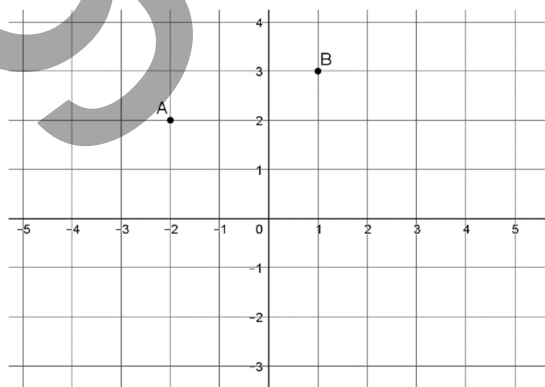


Elv:

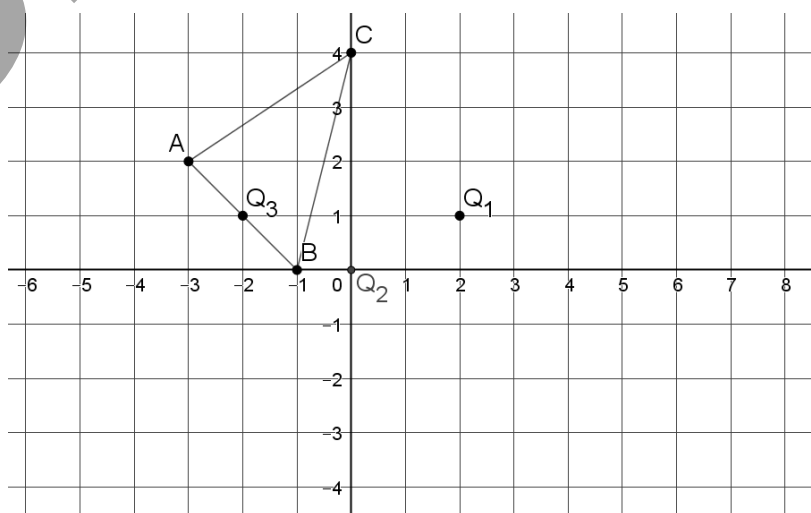
Szerkesztés:

Diszkusszió:

Tükrözd az origóra - $Q(0;0)$ - az $A(-2;2)$ és a $B(1;3)$ pontot, majd az A -ra a B -t, illetve a B -re az A -t. Legyenek elnevezve a kapott pontok és írd föl a koordinátákat is.



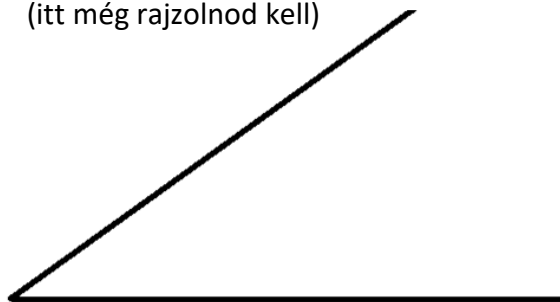
Egy háromszög csúcsai a koordináta-rendszerben: $A(-3;2)$ $B(-1;0)$ $C(0;4)$. Tükrözd a $\triangle$ -et és add meg A' ; B' és C' koordinátáit: a) $Q_1(2;1)$ -re b) $Q_2(0;0)$ -ra c) $Q_3(-2;1)$ -re!



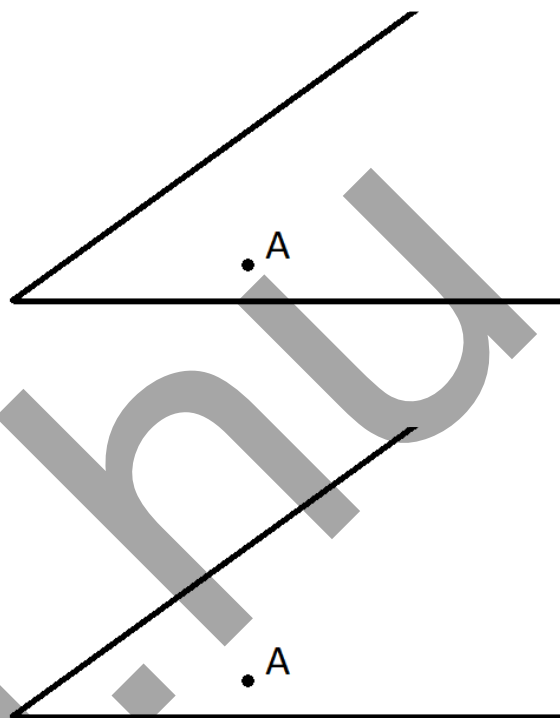
6) Gyakorló példák

Egy szögtartományban adott egy A pont. Szerkessz rajta keresztül egy g egyenest, melynek a szárak közé eső szakaszát az A felezi!

„Mintha már kész lenne” ábra
(itt még rajzolnod kell)



„Vakábra”



Elv:

Szerkesztés:

Diszkusszió:

A következő állításokról döntsük el, hogy melyik igaz, melyik hamis!

Van középpontosan szimmetrikus háromszög: *Igaz/Hamis*

A középpontos tükrözés a körüljárást megfordítja: *Igaz/Hamis*

Van olyan négyszög, amelyik középpontosan nem szimmetrikus: *Igaz/Hamis*

Minden középpontosan szimmetrikus négyszög rombusz: *Igaz/Hamis*

A deltoid középpontosan szimmetrikus négyszög: *Igaz/Hamis*

A középpontos tükrözés szimmetrikus transzformáció: *Igaz/Hamis*

A középpontosan szimmetrikus négyszög átlói felezik egymást: *Igaz/Hamis*

A középpontosan szimmetrikus négyszög átlói egyenlők: *Igaz/Hamis*

A középpontosan szimmetrikus négyszög neve paralelogramma: *Igaz/Hamis*

A középpontos tükrözésnek van fixegyenese: *Igaz/Hamis*

Van olyan szabályos sokszög, amelyik középpontosan nem szimmetrikus: *Igaz/Hamis*

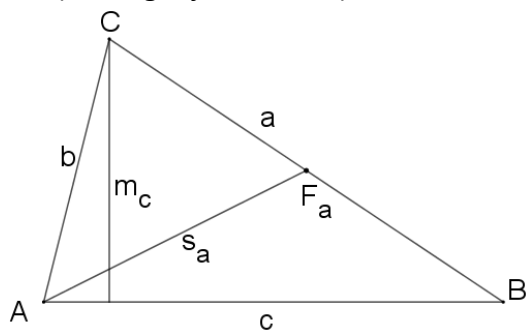
A szabályos ötszög középpontosan nem szimmetrikus: *Igaz/Hamis*

A páros oldalszámú szabályos sokszögek középpontosan szimmetrikusak: *Igaz/Hamis*

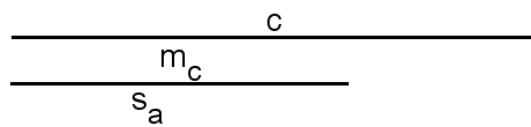
A páratlan oldalszámú szabályos sokszögek középpontosan nem szimmetrikusak: *Igaz/Hamis*

Szerkessz $\triangle$ -et, ha meg van adva a következő három adata: c oldal, m_c magasság és s_a súlyvonal

„Mintha már kész lenne” ábra
(itt még rajzolnod kell)



„Vakábra”



Elv:

Szerkesztés:

Diszkusszió:

Egy trapézból adott: $a+c$, (vagyis a két alap összege, nem külön-külön), a két átló: e és f illetve b oldal. Szerkeszd meg a trapézt!

„Mintha már kész lenne” ábra

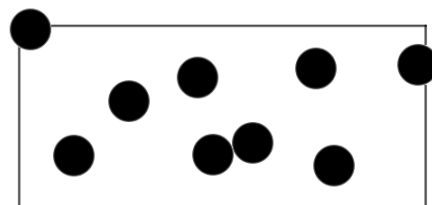
„Vakábra”

Elv:

Szerkesztés:

Diszkusszió:

Nem kötelező: Két játékos egy téglalap alakú asztalra egyforma zsetonokat helyez egymás után. Egymáshoz érhetnek a zsetonok, de egymáson nem lehetnek. Az veszít, akié először leesik az asztalról. Mi a kezdő jó stratégiája?



Nem kötelező: Szerkessz trapézt a következő adatokból: $a+c$ (a két alap összege), α és β (az a alapon található két szög), és m (magasság).

„Mintha már kész lenne” ábra
(itt még rajzolnod kell)

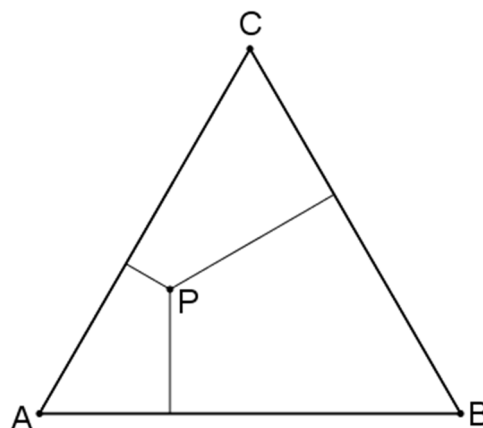
„Vakábra”

Elv:

Szerkesztés:

Diszkusszió:

Aki 5-ös akar lenni...: Mutasd meg, hogy egy egyenlő oldalú Δ bármely belső pontjának az oldalaktól vett távolságösszege állandó!



Aki 5-ös akar lenni: Adott egy $ABC\triangle$. Szerkeszd meg azt a P pontot az AB oldalon, melynek az a és b oldaltól vett távolságösszege egy előre megadott szakasz (kell az előző példa...).

$\triangle$ -ből adott b, c, s_a (az a oldalhoz tartozó súlyvonal) Szerkesztendő a $\triangle$.

„Mintha már kész lenne” ábra
(itt még rajzolnod kell)

„Vakábra”

Elv:

Szerkesztés:

Diskusszió:

VI) A párhuzamos eltolás bevezetése: vektorok

1) Vektorok definíciója

Def.: Az irányított szakaszokat vektoroknak nevezzük.
Írd le a paralelogramma 7 ekvivalens definícióját.

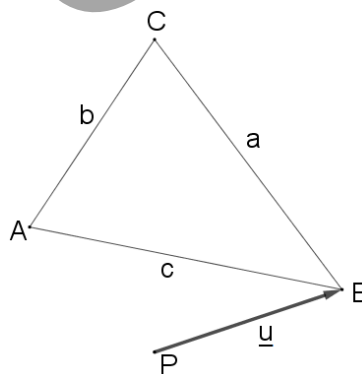
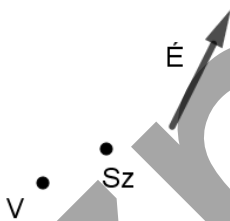
2) Elnevezések

A Balatonon a „Szélhámos” nevű vitorlás azt az utasítást kapja rádión, hogy menjen keletnek 5 km-t majd délnek 1 km-t. A „Vándordiák” vitorlás azt az utasítást kapja, hogy menjen nyugatnak 4 km-t, majd Északra 2 km-t.

Ha nem tudjuk hol voltak, akkor tudjuk-e, hogy hová érkeztek; vagy hogy távolodtak-e egymástól vagy közeledtek egymáshoz?

Most megadjuk a helyüket, és az Északi irányt.
Szerkeszd meg hová érkeznek, ha 1 km az ábrán 1 cm.

Told el a $\triangle$ -et a $\overrightarrow{PB} = \underline{u}$ vektorral!



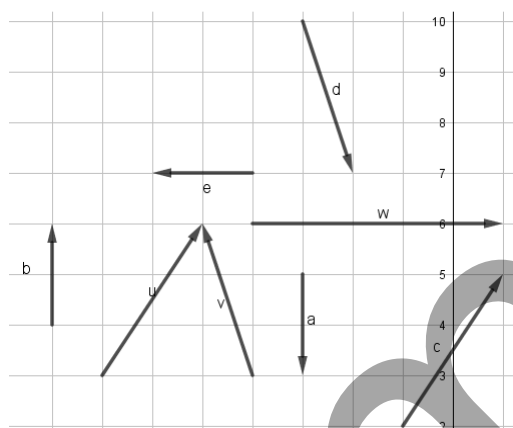
Rajzol fel egy 4 cm hosszú vektort, majd egy vele közös kezdőpontú, vele -60° -os szöget bezáró, kétszer olyan hosszút is!

3) Röviden a relációkról, és két vektor azonossága

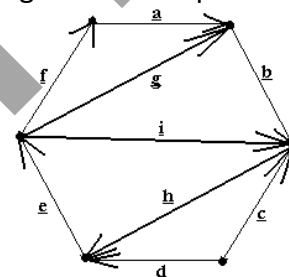
Töltsd ki a táblázatot: *Igaz - Hamis*

Reláció	Reflexív	Szimmetrikus	Tranzitív	Ekvivalencia reláció
Emberek közt: „alacsonyabb”				
Egyenesek között: „merőleges”				
Egyenesek között: „Párhuzamos”				
Háromszögek között: „Egybevágó”				
Számok között: „Kisebb-egyenlő”				
Háromszögek között: „egybevágó”				
Emberek között: „barátja”				
Egy tengelyre nézve: „tükörképe”				

Válaszd ki az egyenlő, és az ellentett vektorpárokat!



A szabályos hatszögbe rajzolt vektorokból válaszd ki lent megadott vektorpárokat:



Egyenlő:

Egyállású:

Azonos irányítású:

Egyirányú:

Töltsd ki a táblázatot: *Igaz - Hamis*

	Reflexív.	Szimmetrikus	Tranzitív	Ekvivalencia reláció
$\leq$ (számok)				
egybevágó (Δ -ek)				
„utódja” (emberek)				
„barátja” (emberek)				
merőleges (egyenesek)				
„osztja” (egész számoknál: $a b$)				
„része” (halmazoknál)				
Kerekasztal lovagjai: a kapcsolat: „tőle jobbra ül”				

4) Vektorok kapcsolata

5) Pontok és vektorok

Adottak a koordináta-rendszerben a következő pontok: $A(-5;2)$ $B(-6;-2)$ $C(-2;-2)$ $D(3;-2)$ $E(2;-1)$ $F(-1;1)$ $G(2;0)$ $H(3;1)$ $I(-1;3)$ $J(1;2)$ $K(0;6)$ $L(-4;6)$

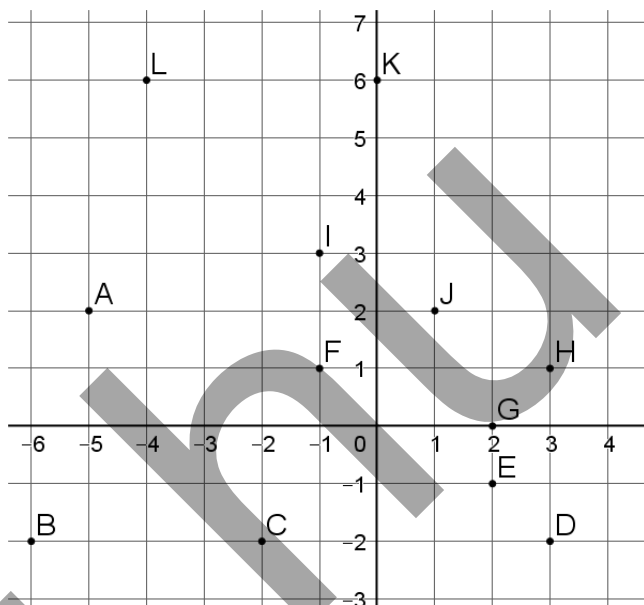
Az $\overrightarrow{EI}$ vektorral melyik vektor egyenlő (az adott pontok által meghatározott vektorokat nézve csak!)

Keress még 3 pár egyenlő vektort!

Rajzold fel az origóból a $\overrightarrow{JL}$ vektort, illetve az $\overrightarrow{FE}$ vektort.

Rajzold fel a G-ből a $\overrightarrow{HF}$ vektort.

Rajzold be az $\overrightarrow{AK}$ vektort, majd rajzold fel az origóból $\overrightarrow{AI}$ ellentett vektorát!



6) Műveletek vektorokkal

a) Összeg

Adott egy téglalapot, húzd be az átlóit. Rajzolj bele piros nyilakkal (oldalak és átlók mentén) 4 olyan vektort, melyek összege $\vec{0}$. Késsel 3 ilyen vektort!



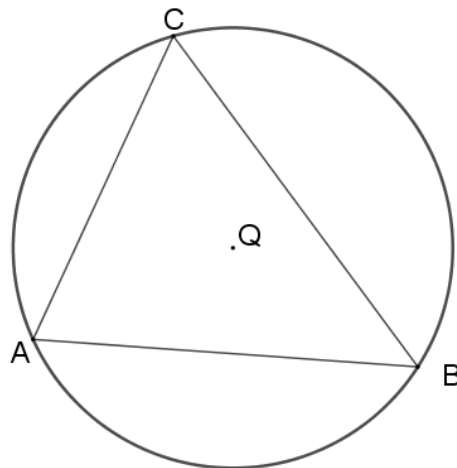
Q az ABC_{Δ} köré írt kör középpontja.

Szerkeszd meg a következő vektorokat:

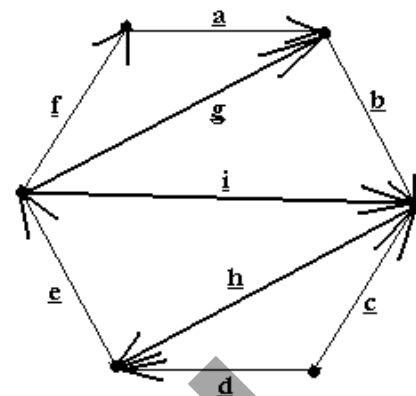
$$\underline{x} = \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB}; \quad \underline{y} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

$$\underline{z} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{QA}; \quad \underline{w} = \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QC}$$

** Mit sejtünk, hová mutat a $\underline{w}$ vektor a Q -ból?



A szabályos hatszögbe rajzolt vektorokból adj meg olyan vektorokat melyek összege 0: először a) 2-őt, b) majd 3-at, c) majd 4-et.



Egy téglalap csúcsai $ABCD$. Rajzold meg vonalzóval pontosan a következő vektorokat. (Ha ügyes vagy, akkor mindet megtalálod valahogy magán az ábrán!)

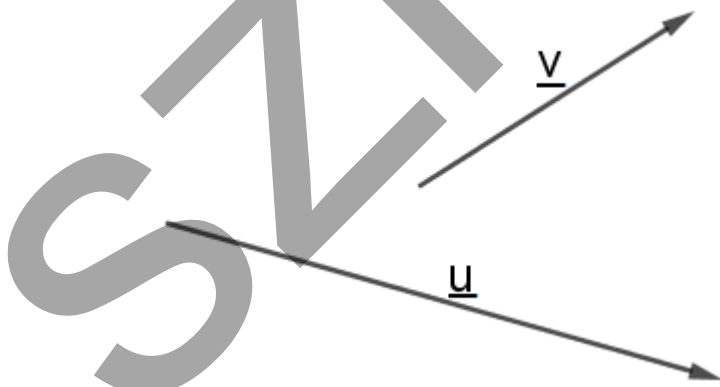
$$\underline{u} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DA} ; \underline{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} ; \underline{w} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC} ; \underline{x} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} ; \underline{y} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$$

Írj le belőlük a) 3 db. b) 4 db. olyan vektort, melyek összege 0.



Írd le két vektor összegének definícióját:

A definíció alapján add össze a két vektort: $\underline{u} + \underline{v}$. Majd fordítva is add össze őket: $\underline{v} + \underline{u}$. Írd rá melyik-melyik!

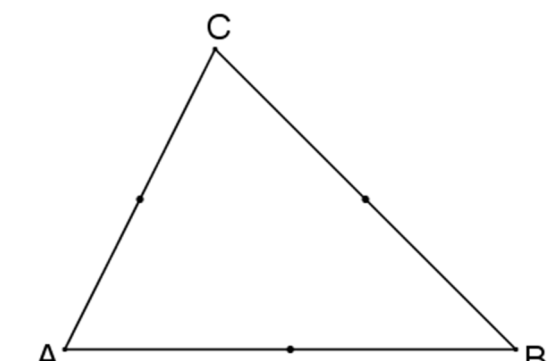


Legyen S az $ABC\Delta$ súlypontja. (Szerkeszd meg a súlypontot! – az oldalfelezőket berajzoltam)

Szerkeszd meg: $\underline{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$; $\underline{v} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}$

$\underline{w} = \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SA}$ vektorokat!

(Írd rá a nevüket – amelyikre lehet...)



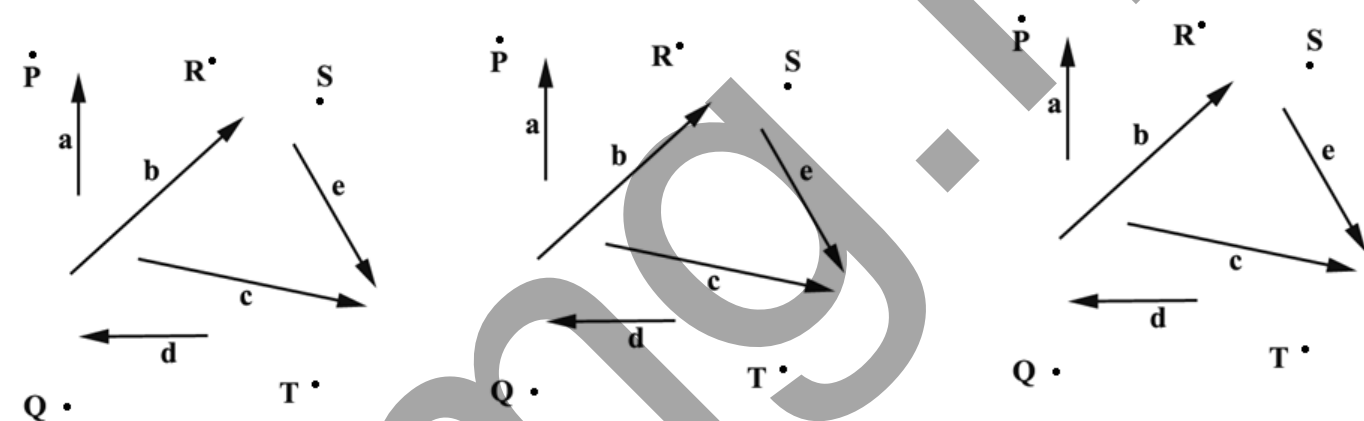
A megadott pontokból indulva szerkeszd meg a kétféle vektorokat a megadott színekkel.

P -ből: $\underline{a} + \underline{e}$; illetve $\underline{a} + \underline{e} + \underline{d}$ (kékkel)

Q -ből: $\underline{d} + \underline{b}$; (sárgával)

R -ből: $\underline{e} + \underline{d}$; illetve $\underline{d} + \underline{c}$ (pirossal)

Nem kötelező: T -ből: $\underline{c} + \underline{a}$; illetve $\underline{d} + \underline{e} + \underline{b}$ (zölddel)

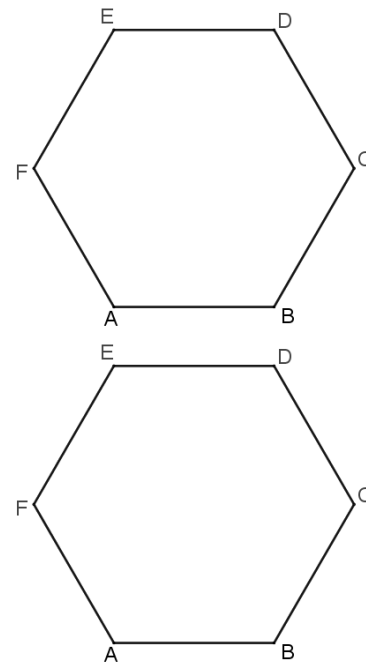
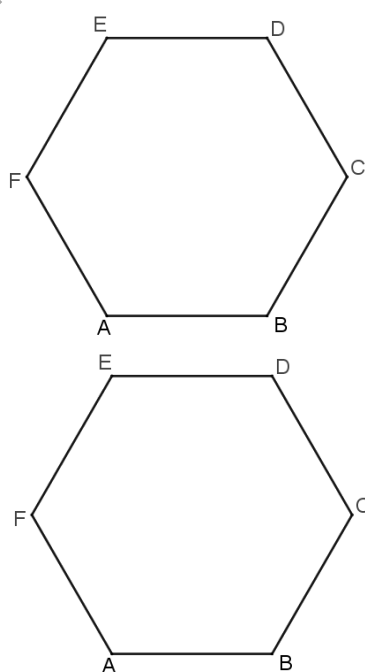
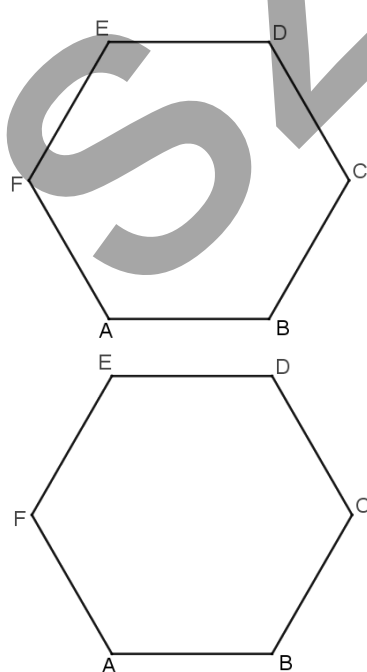


b) Különbség

Egy $ABCDEF$ szabályos hatszög F csúcsából a többi csúcsba mutató vektorok legyenek: $\underline{a}$; $\underline{b}$; $\underline{c}$; $\underline{d}$; $\underline{e}$.

(Nyilván $\underline{a} = \overrightarrow{FA}$ stb.) Szerkeszd meg a következő vektorokat: $\underline{e} + \underline{a}$; $\underline{b} - \underline{d}$; $\underline{a} - \underline{c}$; $\underline{b} + \underline{e} - \underline{a} - \underline{d}$;

$\underline{c} - \underline{e} - \underline{a}$; $\underline{b} - \underline{e}$ (Írd rá a nevüket)



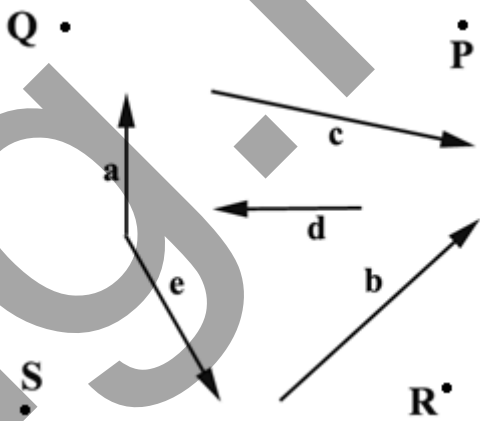
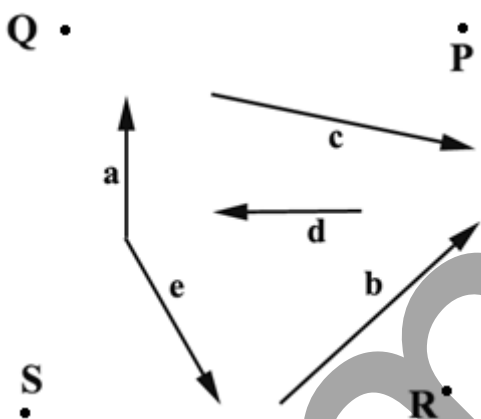
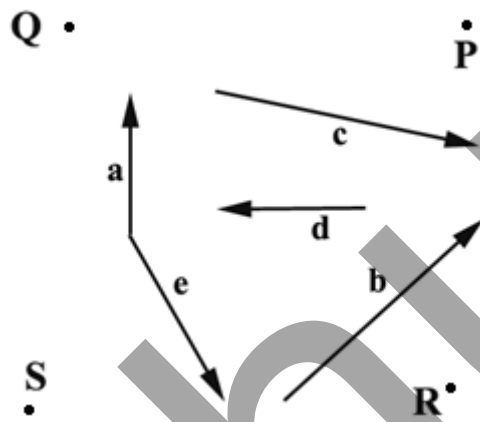
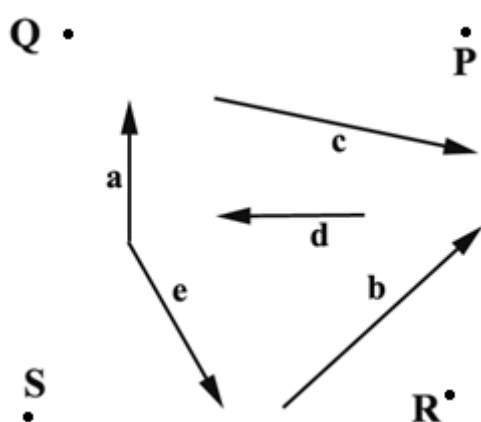
A megadott pontokból indulva szerkeszd meg a kért vektorokat a megadott színekkel.

S-ből: $\underline{c-a}$; illetve $(\underline{e-a})-\underline{d}$ (sárgával)

P-ből: $\underline{b-d}$; illetve $\underline{d-(a-e)}$ (kékkel)

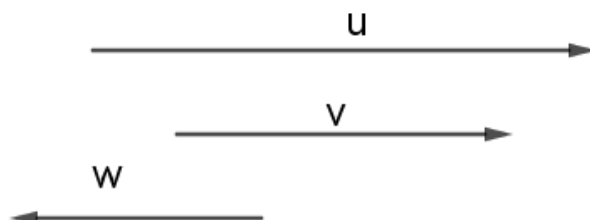
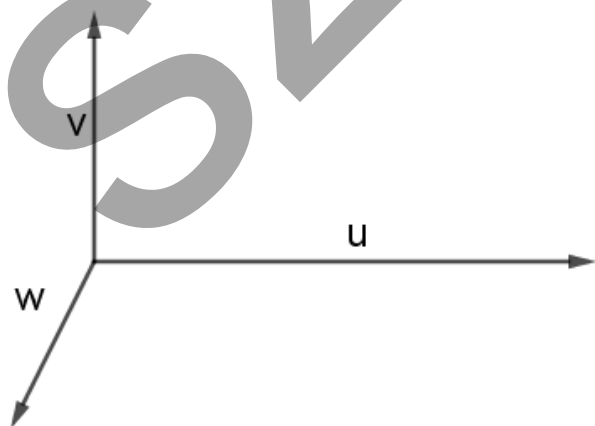
R-ből: $\underline{d-c}$; illetve $\underline{e-(c+d)}$ (pirossal)

Q-ből: $\underline{d-c}$; (barnával)



Először az egy pontból indulóknál, majd a párhuzamosoknál szerkeszd meg és írd is rá a nevüket:
(A segédvonalak halványak legyenek, ha használsz.)

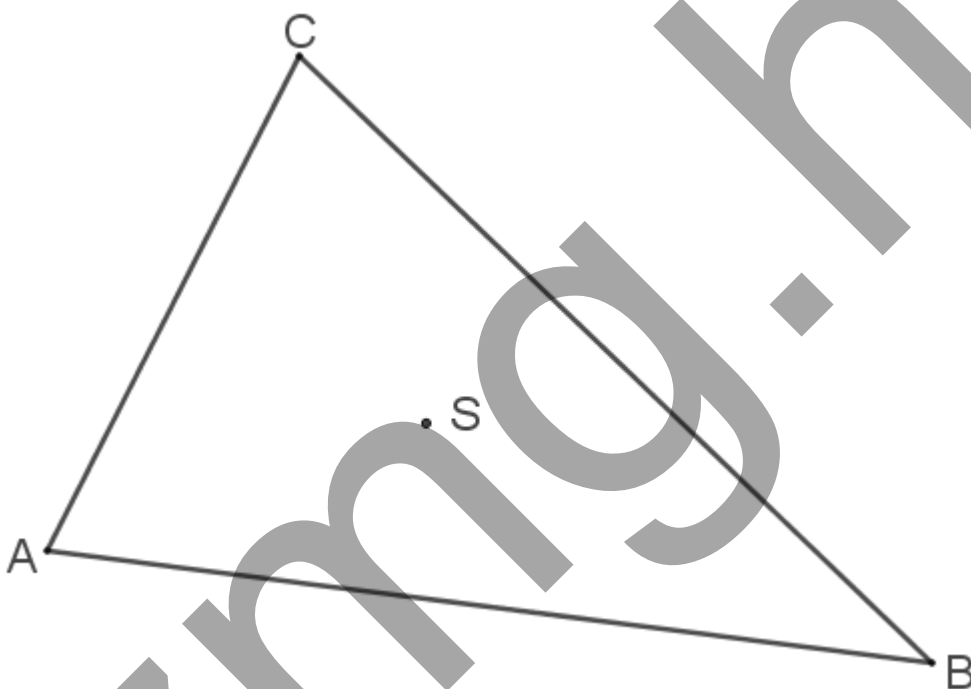
$\underline{u+v}$; $\underline{w-u}$; $\underline{w-(u-v)}$; $\underline{v-w}$; $\underline{v+w}$; $\underline{v-(u+w)}$



Adj meg egy a és b vektort, melyek összege az a vektorral egyenlő hosszú!

Adj meg egy u és v vektort úgy, hogy u-v egyenlő hosszú a v vektorral!

Az S az az ABC_{Δ} súlypontja. Szerkeszd meg és írd rá a nevüket: $\underline{u} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$; $\underline{v} = \overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SB}$; $\underline{w} = \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{AS}$; $\underline{x} = \overrightarrow{AS} - \overrightarrow{CS}$ vektorokat!



Ajánlott: Az ábra (négyzet) alapján válaszolj a kérdésekre (mindhez található az ábráról vektor!!!)

$$\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AC} =$$

$$\overrightarrow{BE} - \overrightarrow{BD} =$$

$$\overrightarrow{IG} - \overrightarrow{IC} =$$

$$\overrightarrow{DH} - \overrightarrow{EF} =$$

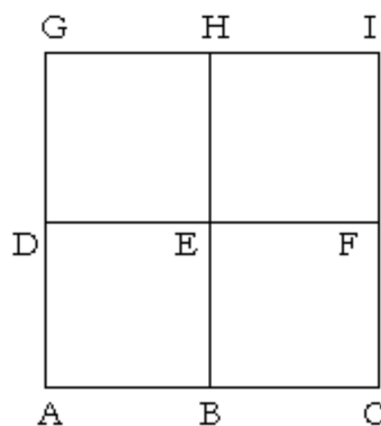
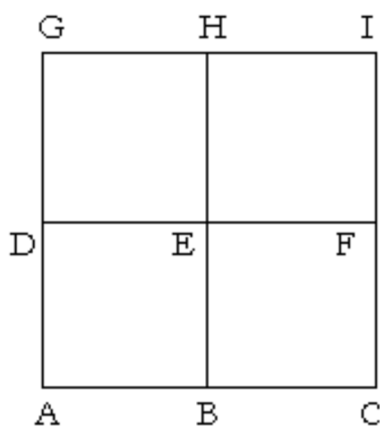
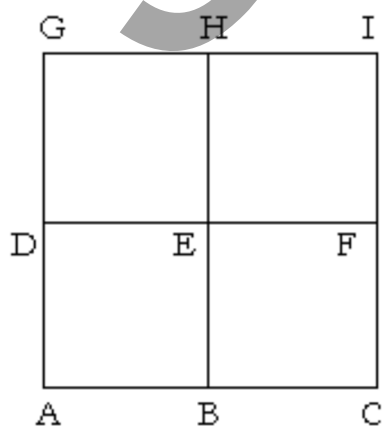
$$\overrightarrow{CE} - \overrightarrow{AE} =$$

$$\overrightarrow{BE} - \overrightarrow{CF} =$$

$$\overrightarrow{FH} - \overrightarrow{CG} =$$

$$\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{DG} =$$

$$\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{FH} =$$



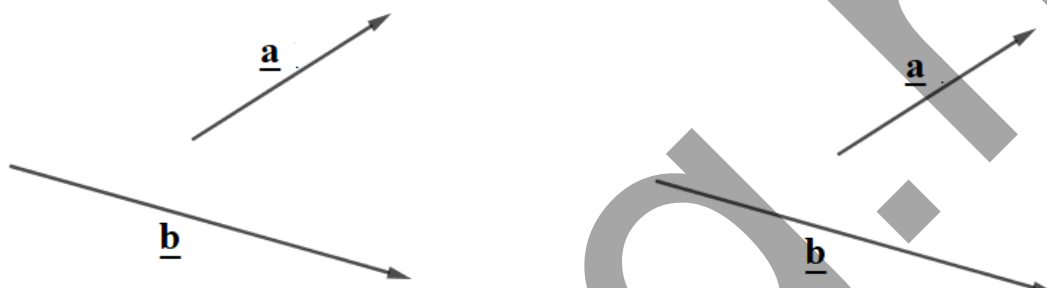
c) Vektor skalárral (valós számmal) történő szorzása

Adott a $\underline{v}$ vektor.

Szerkeszd meg a következő vektorokat: $\frac{1}{2}\underline{v}$; $-2\underline{v}$; $\frac{5}{4}\underline{v}$; $-\underline{v}$



Adott az $\underline{a}$ vektor és a $\underline{b}$ vektor. Szerkeszd meg a következő vektorokat: $\frac{1}{2}\underline{b}-2\underline{a}$; $-2\underline{a}-\frac{3}{2}\underline{b}$

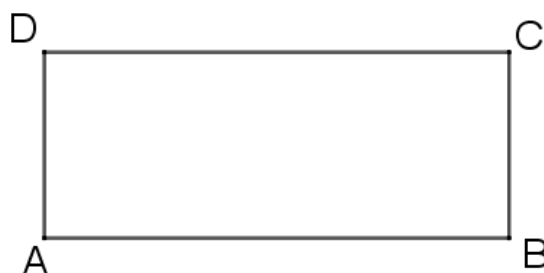


Adott az $ABCD$ téglalap. Igaz-e, hogy:

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC}$$

$$\underline{0} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$$



Adott egy AB szakasz. Szerkeszd meg azt a P pontját, amely $AP : PB=3:4$ arányban osztja!

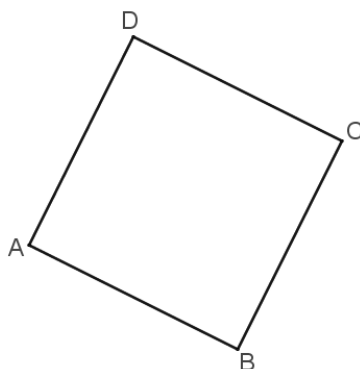
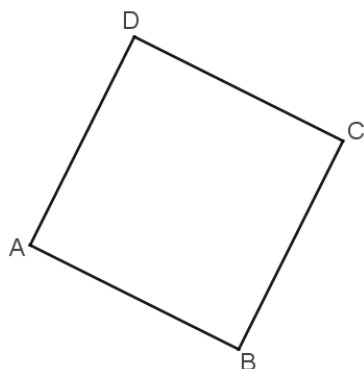
d) Szaszok darabolása



e) Vektorok lineáris kombinációja

Adott egy négyzet: $\underline{b} = \overrightarrow{AB}$, $\underline{c} = \overrightarrow{AC}$

Állítsd elő a következő vektorokat: $\frac{1}{2}\underline{b} - \frac{1}{3}\underline{c}$; $\frac{2}{5}\underline{c} - \frac{3}{2}\underline{b}$

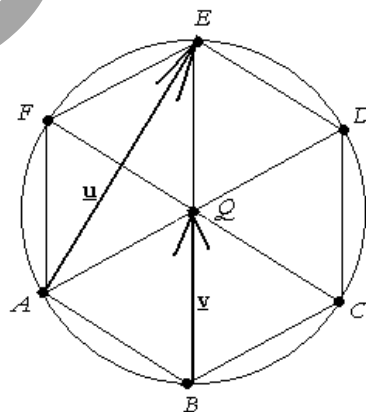


Szerkessz olyan 3 és 3 cm hosszú $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektort, hogy igaz legyen rájuk: a) $|\underline{a} + \underline{b}| = 3$ b) $|\underline{a} + \underline{b}| = 0$ c) $|\underline{a} + \underline{b}| = 4$ d) $|\underline{a} + \underline{b}| = 6$ e) $|\underline{a} - \underline{b}| = 0$ f) $|\underline{a} - \underline{b}| = 5$ (Vagyis a végeredmény vektorok hossza az adott szám)

7) Gyakorlás

Állítsd elő $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorokból a következő vektorokat:

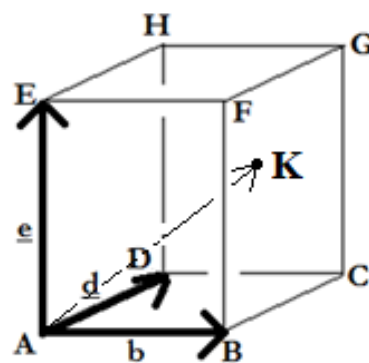
$$\begin{array}{lll} \overrightarrow{AQ} = & \overrightarrow{AB} = & \overrightarrow{FE} = \\ \overrightarrow{QC} = & \overrightarrow{EC} = & \overrightarrow{DC} = \\ \overrightarrow{FB} = & \underline{0} = & \end{array}$$



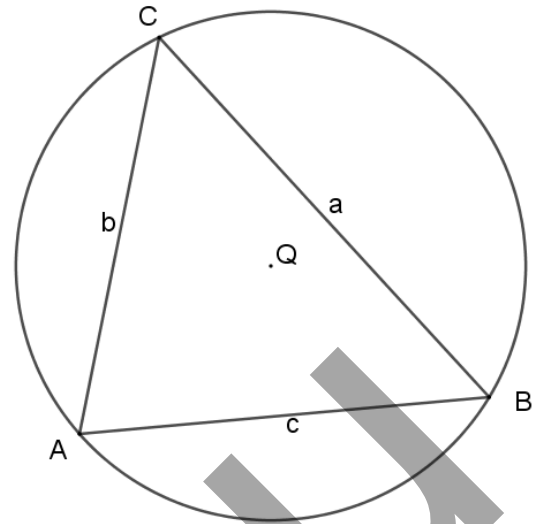
Adott egy kockának az A csúsból induló 3 élvektora: $\underline{b}$, $\underline{d}$ és $\underline{e}$. Állítsd ezekből elő a következő vektorokat:
az A-ból induló ABFE lap lapátló-vektora $\overrightarrow{AF} =$

az A-ból induló testátló-vektor $\overrightarrow{AG} =$

az A-ból a DCGH lap középpontjába mutató vektor: $\underline{k} =$

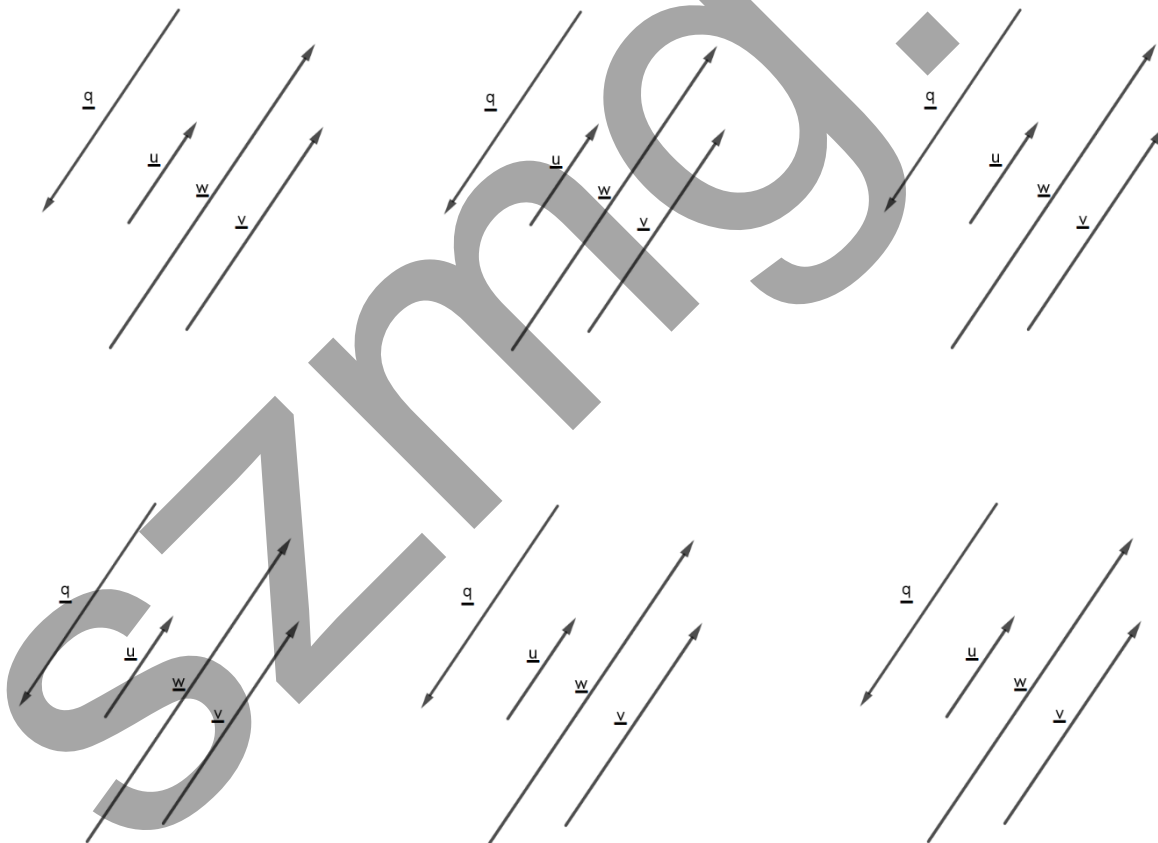


Add össze: $\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QC}$ vektorokat úgy, hogy az összegvektort a Q-ból mérd fel. Nevezd el m vektornak. Majd szerkeszd meg a Magasságpontot. HA jól csináltad, akkor m végpontja M-be mutat! Jobbaknak: Miért?

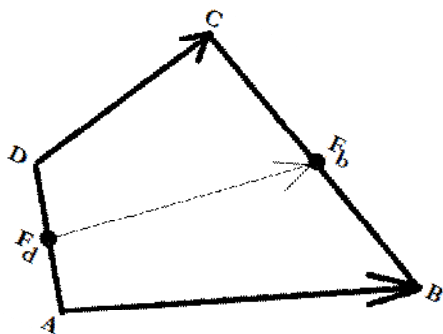


Szerkeszd meg a következőket (és írd rá nevüket):

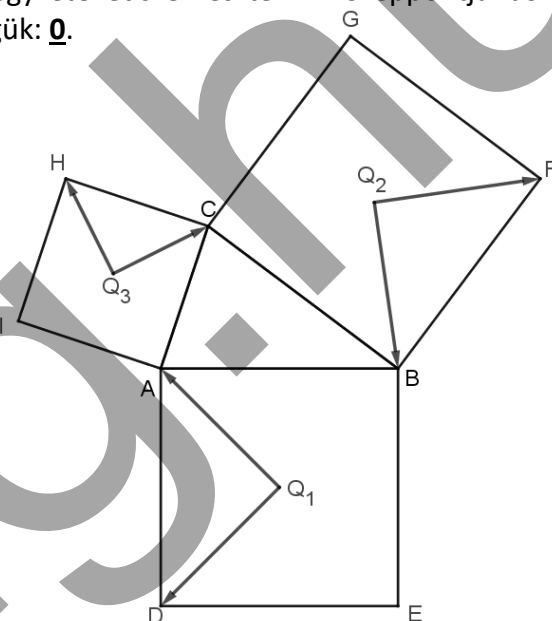
$\underline{a} = \underline{q} + \underline{u}$; $\underline{b} = \underline{u} + \underline{w}$; $\underline{c} = \underline{u} - \underline{w}$; $\underline{d} = \underline{v} - \underline{u}$; $\underline{e} = \underline{v} + \underline{u}$; $\underline{f} = \underline{v} - \underline{w}$



Aki 5-ös akar lenni...: Add össze az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{DC}$ vektorokat, az összeg-vektornak vedd a felét, és hasonlítsd össze az $\overrightarrow{F_d F_b}$ vektorral. Mit sejtessz meg, hová mutat az összegvektor? ***Be tudnád-e látni?



Aki 5-ös akar lenni...: Egy háromszög oldalaira kifelé négyzeteket szerkeszték. A középpontjukból a jelzett csúcsokba vektort húzok. Mutasd meg, hogy az összegük: 0.



Adott a következő szabályos Δ -ekből álló alakzat. Az végeredmény kezdőpontját megadtam. Pl.: $\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{GH}$ így ezt kell leírnod: $\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{GH}$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{H}$$

$$\overrightarrow{ED} - \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{K}$$

$$\overrightarrow{ED} - \overrightarrow{JM} = \overrightarrow{Q}$$

$$\overrightarrow{QP} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{J}$$

$$\overrightarrow{QL} - \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{N}$$

$$\overrightarrow{HE} - \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{K}$$

$$\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{HE} = \overrightarrow{G}$$

$$\overrightarrow{HI} - \overrightarrow{NI} = \overrightarrow{E}$$

$$\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{PH} = \overrightarrow{Q}$$

$$(\overrightarrow{SM} + \overrightarrow{KM}) - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{N}$$

$$\overrightarrow{QH} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{T}$$

$$(\overrightarrow{TP} - \overrightarrow{FN}) + \overrightarrow{MR} = \overrightarrow{T}$$

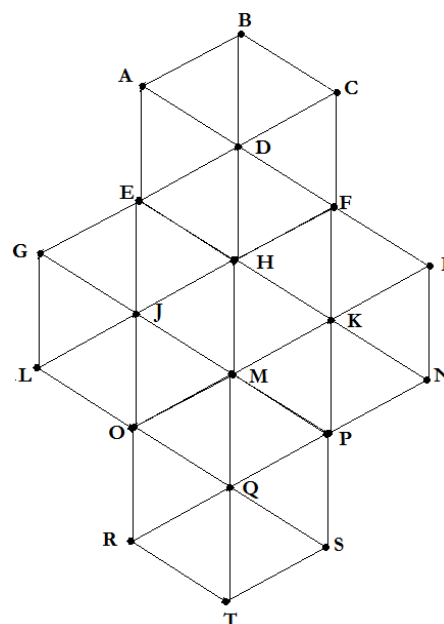
$$\overrightarrow{KH} - \overrightarrow{KN} = \overrightarrow{N}$$

$$(\overrightarrow{QP} + \overrightarrow{MP}) + (\overrightarrow{PK} - \overrightarrow{MP}) = \overrightarrow{Q}$$

$$\overrightarrow{ME} - (\overrightarrow{HF} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{N}$$

$$(\overrightarrow{TP} - \overrightarrow{FN}) + \overrightarrow{HM} = \overrightarrow{Q}$$

$$\overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HP} = \overrightarrow{L}$$

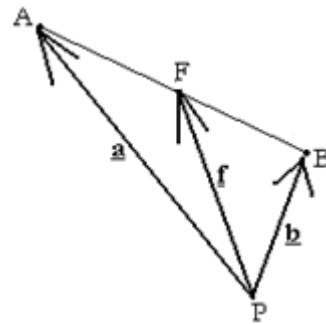


szmg.hu

8) Felezőpontokba mutató vektorok és egyéb gyakorlás

Mutasd meg, hogy külső pontból egy szakasz felezőpontjába mutató vektorra igaz a következő:

$$\underline{f} = \frac{\underline{a} + \underline{b}}{2}$$



A végeredmény vektorok kezdőpontját adtam meg

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \underline{J}$$

$$\overrightarrow{ED} - \overrightarrow{JM} = \underline{Q}$$

$$\overrightarrow{QL} - \overrightarrow{QP} = \underline{G}$$

$$\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{HE} = \underline{J}$$

$$(\overrightarrow{SM} + \overrightarrow{KM}) - \overrightarrow{DC} = \underline{K}$$

$$\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{PH} = \underline{Q}$$

$$\overrightarrow{KH} + \overrightarrow{KN} =$$

$$(\overrightarrow{QP} + \overrightarrow{MP}) + (\overrightarrow{PK} - \overrightarrow{MP}) = \underline{M}$$

$$\overrightarrow{ME} - (\overrightarrow{HF} + \overrightarrow{AD}) = \underline{N}$$

$$\overrightarrow{SM} + \overrightarrow{KM} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CS} = \underline{H}$$

$$\overrightarrow{ED} - \overrightarrow{EH} = \underline{P}$$

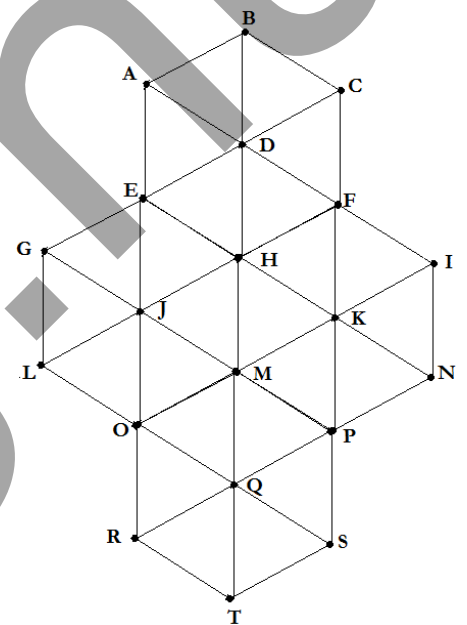
$$\overrightarrow{QP} + \overrightarrow{EF} = \underline{L}$$

$$\overrightarrow{HE} - \overrightarrow{FC} = \underline{K}$$

$$\overrightarrow{HI} - \overrightarrow{NI} = \underline{H}$$

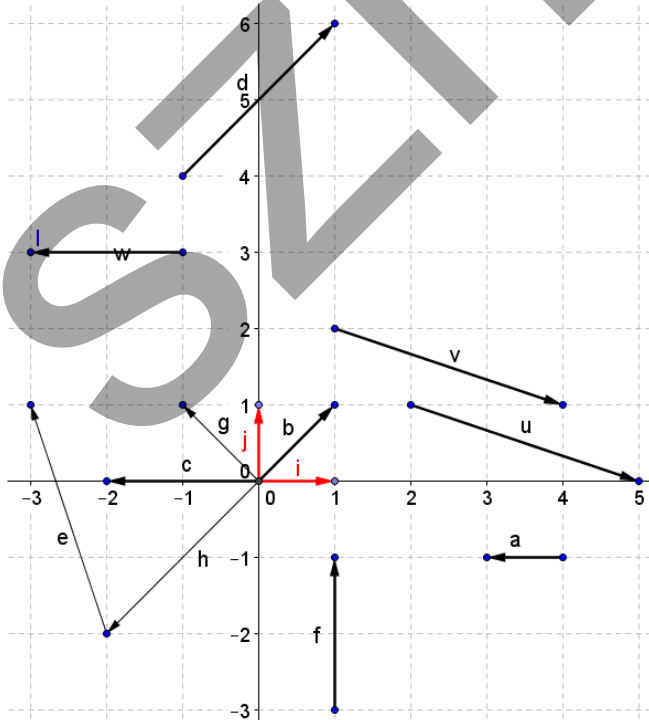
$$(\overrightarrow{TP} - \overrightarrow{FN}) + \overrightarrow{MR} = \underline{K}$$

$$\overrightarrow{QH} + \overrightarrow{PC} = \underline{T}$$



9) Vektorok koordinátákkal

Írd le az ábrán látható vektorok koordinátáit! pl: $\underline{x}(-3;4)$



Az előző ábrán szerkeszd meg (úgy csináld, hogy férjen ki...), majd add meg az eredmény-vektor koordinátáit:

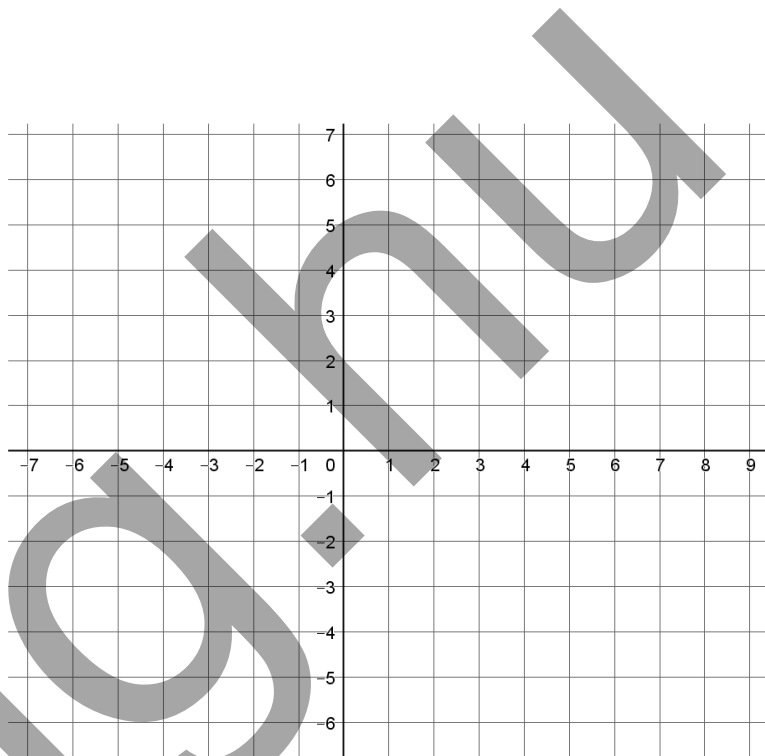
$$\underline{a}-2\underline{f}$$

$$\underline{v}-(\underline{u}+2\underline{w})$$

$$\underline{d}-\underline{w}$$

$$2\underline{f}-3\underline{v}$$

A derékszögű koordinátarendszerben adott két pont: $A(2;-1)$ és $B(-3;1)$ Rajzolj a következő kezdőpontokból az $\overrightarrow{AB}$ vektorral egyenlő vektorokat – és írd is fel a végpontok koordinátáit:
 $C(0;0)$ $D(5;4)$ $E(1;-2)$ $F(3;3)$ $G(5;-2)$



Adott az $\underline{a}(-3;4)$; $\underline{b}(2;1)$; $\underline{c}(2;-3)$; $\underline{d}(-4;0)$.

Add meg a következő lineáris kombinációkkal előállított vektorok koordinátáit!

$$\underline{a}+\underline{b}$$

$$\underline{d}+\underline{b}$$

$$\underline{a}-\underline{c}$$

$$\underline{b}-\underline{c}$$

$$\underline{d}-\underline{a}$$

$$\underline{d}+(\underline{c}-\underline{d})$$

$$(\underline{a}-\underline{d})-(\underline{b}-\underline{c})$$

$$(\underline{b}-\underline{a})-(\underline{c}-\underline{d})$$

$$3\underline{a}+2\underline{b}$$

$$2\underline{c}+\underline{d}$$

$$4\underline{b}-2\underline{c}$$

$$-3\underline{b}+\underline{d}$$

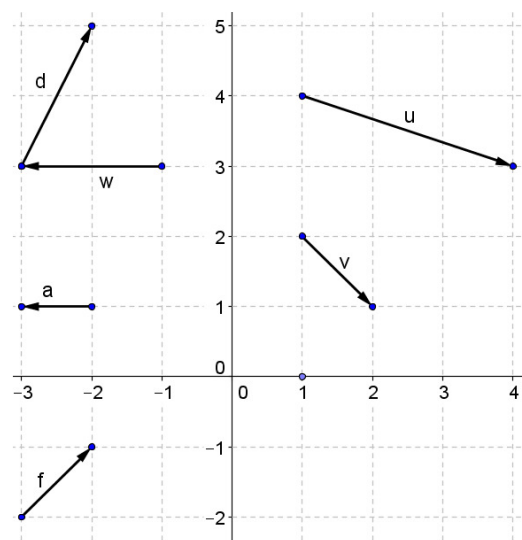
Add meg az eredmény-vektor koordinátáit:

$$\underline{a}-2\underline{f}$$

$$\underline{v}-(\underline{u}+2\underline{w})$$

$$\underline{d}-\underline{w}$$

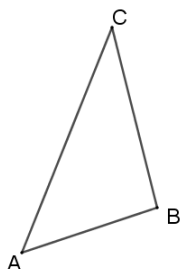
$$2\underline{f}-3\underline{v}$$



VII) A Párhuzamos eltolás (egybevágósági transzformáció)

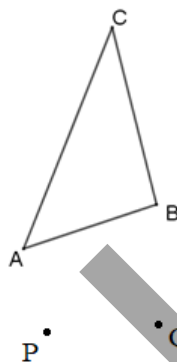
1) Definíciója és tulajdonságai

Told el a $\triangle$ -et az $\overrightarrow{AB}$ -ral, illetve a $\overrightarrow{CB}$ vektor felével!



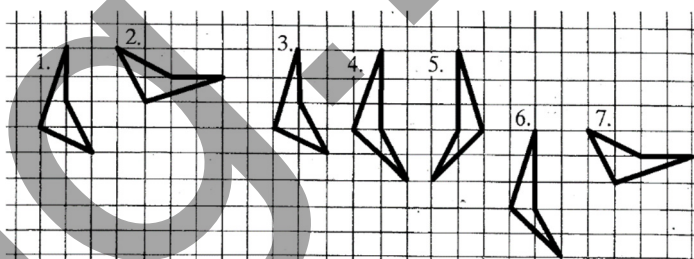
Told el a $\triangle$ -et a következő vektorokkal: a) $\overrightarrow{PQ}$

b) $\overrightarrow{AP}$ c) $\frac{\overrightarrow{CQ}}{2}$ d) $\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ vektorral.

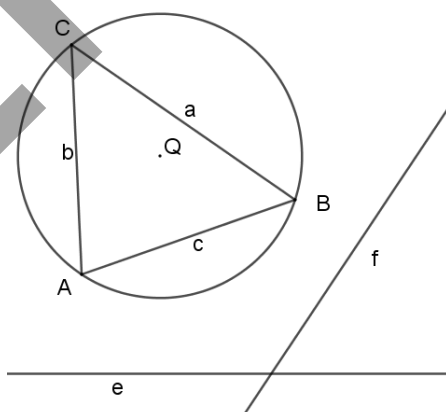


2) Végezzünk eltolást

Válaszd ki azokat a párokat, melyek egymás eltoltjai:



Adott egy $ABC\triangle$ és két egyenes: e és f . Told ez a háromszöget az e -vel párhuzamosan úgy, hogy a háromszög köré írt kör középpontja az f -re essék.



3) Párhuzamos szárú szögek

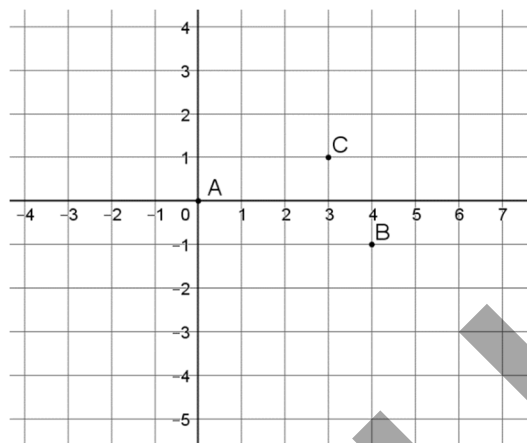
Rajzolj a) egyállású b) kiegészítő c) társ d) mellékszögpárt

Adott egy $A(0;0)$ $B(4;-1)$ $C(3;1)$ háromszög. (Rajzold meg ceruzával!) Told el a következő vektorokkal, és add meg az új csúcsok koordinátáját!

a) $\underline{v}(-3;2)$ Eredmény: pirossal.

b) $\underline{w}(3;-4)$ Eredmény: zölddel.

c) $\underline{w}(0; 2)$ Eredmény: kékkel.



Írd mellé: Igaz v Hamis!

Van párhuzamos eltolásra invariáns alakzat.

A párhuzamos eltolásnak van fixpontja.

Két párhuzamos eltolás egymásutánja független az eltolások sorrendjétől.

A párhuzamos eltolás szimmetrikus.

A párhuzamos eltolás minden egyenest önmagával párhuzamos egyenesbe visz.

A párhuzamos eltolás megváltoztatja a síkidomok körüljárását.

Három különböző párhuzamos eltolás egymásutánja lehet „identitás”.

Két párhuzamos tengelyre történő tükrözés egymásutánja párhuzamos eltolás.

Két középpontos tükrözés egymásutánja (Q_1 és Q_2 -re) párhuzamos eltolás.

Egy párhuzamost eltolást egymás után kétszer elvégezve identitást kapunk.

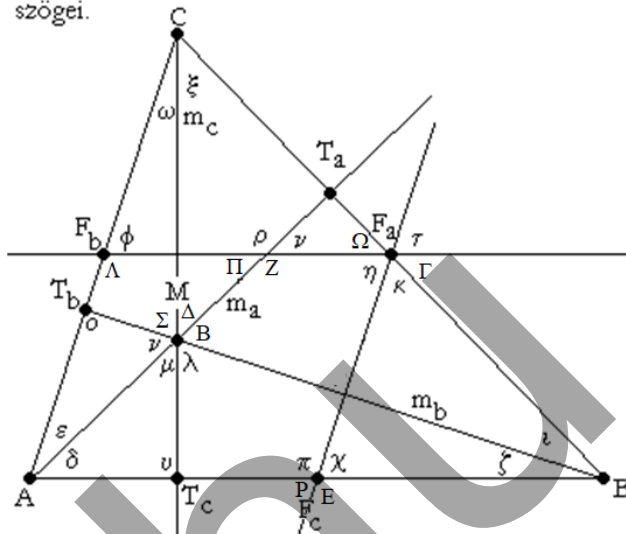
Akárhány párhuzamos eltolás egymásutánja párhuzamos eltolás.

4) Az ismert szögpárok összefoglalása

5) Szögpárok gyakorlása

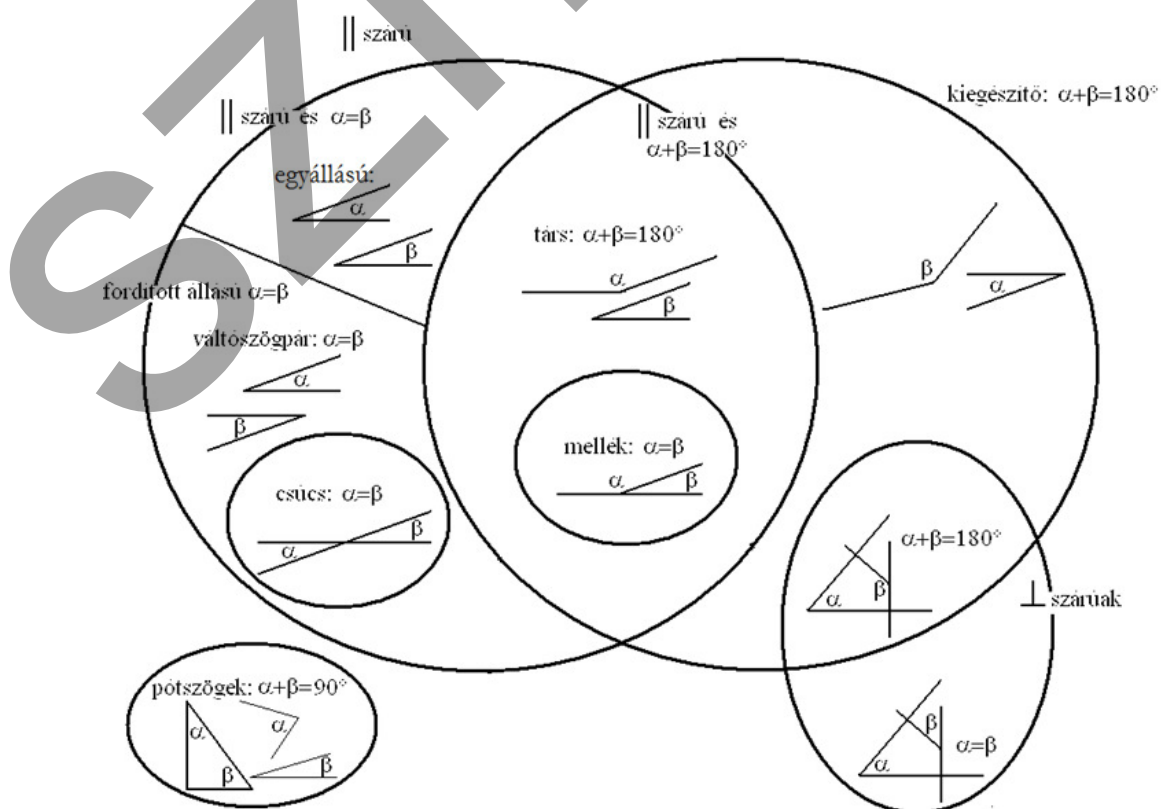
Az ABC_{Δ} -nek meghúztam a magasságvonalaikat, illetve két középvonal-egyenest. Ami merőlegesnek látszik, az merőleges, ami párhuzamosnak, az párhuzamos. Ami semminek, az semmi... Ami 45° -nak, az NEM 45° , ami $24,258^\circ$ -nak, az sem annyi ☹. Ez csak egy egyszerű, véletlenszerűen fölrajzolt, vidéki, közönséges, árva, kis szürke háromszög. Alapszögei, amelyek nincsenek beleírva: α, β, γ .

α, β és γ a háromszög szokásos szögei.



Töltsd ki a táblázatot, illetve a fenti Venn-diagrammba is írd megfelelő szögpárokat!

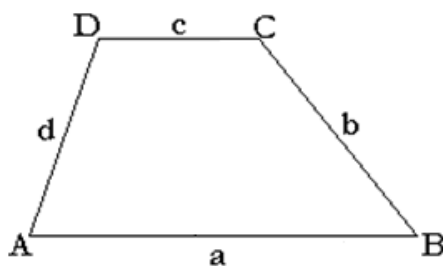
α		egyállású	
P		váltószög	
μ		csúcsszög	
α		pótszög	
ζ		merőleges szárú	egyenlő
α		merőleges szárú	kiegészítő
τ		társszög	
Z		mellékszög	
χ		egyállású	
ξ		merőleges szárú	egyenlő
ζ		pótszög	



6) Alappéldák

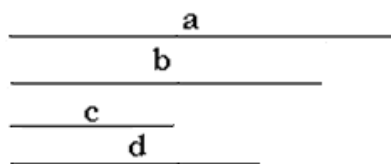
Szerkessz trapézt, ha adott 4 oldala

„Mintha már kész lenne” ábra
(itt még rajzolnod kell)



Elv:

„Vakábra”



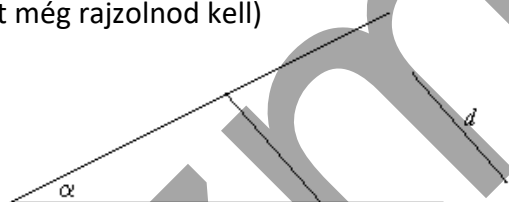
Szerkesztés:

Diszkusszió:

Adott egy a síkon egy α szög, és egy d szakasz. Szerkesszünk a szögbe egy olyan szakaszt, melynek végpontjai a szögcsúcsán vannak, és párhuzamos és egyenlő d -vel.

(Ha nem megy, alább van néhány ötlet)

„Mintha már kész lenne” ábra
(itt még rajzolnod kell)



„Vakábra”



Elv:

Szerkesztés:

Diszkusszió:

1. ötlet: Nevezd el a „Mintha már kész lenne” ábrán a szakasz két végpontját: $B \in b$ szár, $C \in c$ szár. Kell pl. B . $B \in b$ szár, és ha a C -t eltolom az eredeti d szakasz-vektorral...
2. ötlet: Told el d -t az egyik szárig (a vége hozzá ér az egyik szárhoz). Majd e szár mentén told el...
3. A „Mintha már kész lenne” ábrán nevezd el a pontokat A, B, C -vel (α -nál van A). Szerkessz egy ezzel egybevágó $\triangle$ -et d -re: $A'B'C'$. Told el az $A'B'C'$ -et $A'A$ vektorral...

Egy trapéz két párhuzamos oldala 7 és 3 cm, két szára 4 és 5 cm. Szerkeszd meg!
(„Mintha már kész lenne” ábra, vakábra, Elv, Szerk, Diszk)

Adott egy e egyenes és rajta kívül két pont (A és B). Illesszünk az A és B pontra egy-egy egymással párhuzamos egyenest úgy, hogy az e egyenesből d hosszú szakaszt metsszenek ki.
(Alul segítség, ha nem megy!)

„Mintha már kész lenne” ábra
(itt még rajzolnod kell)

„Vakábra”



Elv:

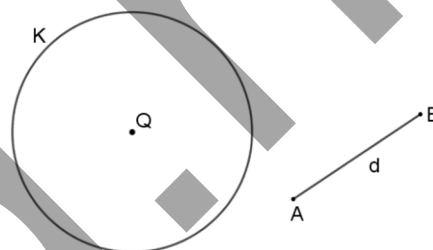
Szerkesztés:

Diszkusszió:

Segítség: A „Mintha már kész lenne” ábrán érdemes egy párhuzamost húzni e -vel A -n keresztül...

* Végezd föl egy ABC háromszöget és két pontot: P és Q . A $\triangle$ -et tükrözd a P -re, majd a kapott $\triangle$ -et a Q -ra. Hogy áll egymáshoz képest az eredeti és a végeredmény $\triangle$? Valójában milyen transzformációval jutunk az eredetiből a végeredménybe (egyetlen egy trafó!)?

Adott egy K kör és egy AB szakasz. Szerkessz a körbe egy AB hosszú, AB -vel párhuzamos húr! „Mintha már kész lenne” ábra „Vakábra”
(itt még rajzolnod kell)



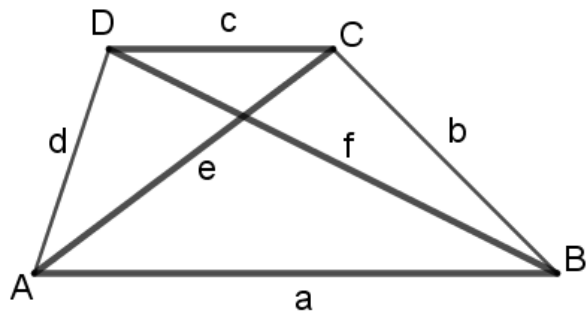
Elv:

Szerkesztés:

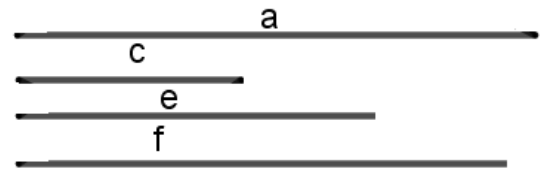
~~Diszk~~

Egy $ABCD$ trapézból adott a és c alap, illetve az e és f átló. Szerkesztendő a trapéz! (Elv, diszk.)

„Mintha már kész lenne” ábra



„Vakábra”



Elv:

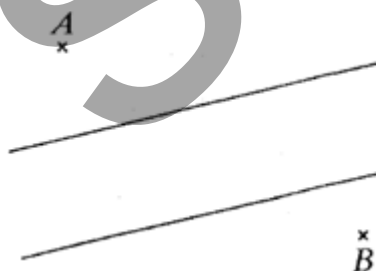
Szerkesztés:

Diszkusszió:

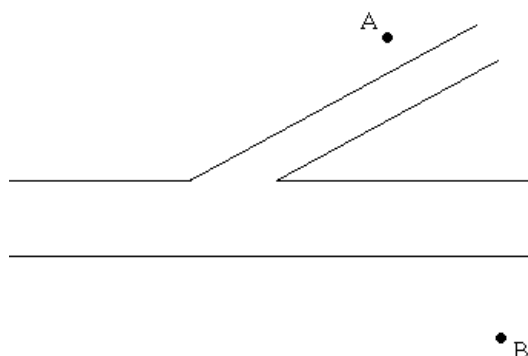
Segítség: C -ből érdemes párhuzamost húzni f -fel...

7) Gyakorló példák

Egy párhuzamos szélű úttesten csak az út irányára merőlegesen lehet átkelni, az út mellett azonban tetszőleges irányban haladhatunk. Szerkesszük meg azt a legrövidebb utat, amelyen az A pontból a B pontba juthatunk!



* Egy útelágazáson akar Aladár átjutni Beához úgy, hogy az úton szabályosan, az útírányra merőlegesen halad át. Adjuk meg a legrövidebb utat!

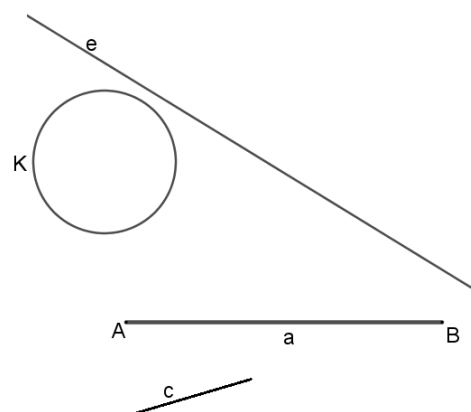
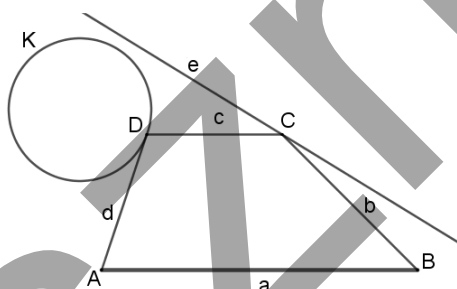


* Írjunk egy $c=8$ $a=6$ $b=5$ cm oldalú háromszögbe $DEFG$ paralelogrammát úgy, hogy D és E a c oldalon van, F az a -n és G a b -n, és $DE=5$ és a D pont az A -tól 2 cm-re van!

Adott egy trapéz alapjának A és B végpontja, a másik alap hossza, és egy K kör és e egyenes, olyan, hogy a körön a D , az egyenesen a C csúcs található. Szerkeszd meg a trapézt.

„Mintha már kész lenne” ábra

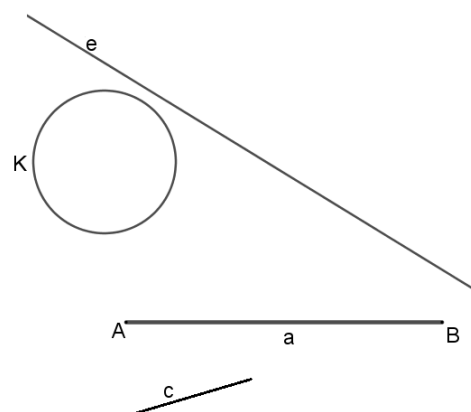
„Vakábra”



Elv:

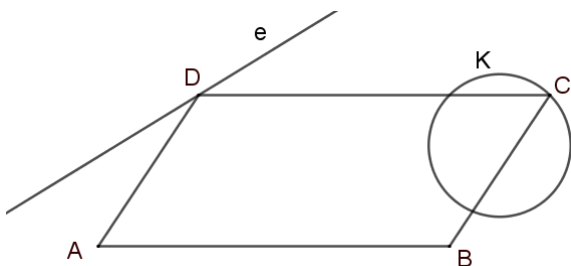
Szerkesztés:

Diszkusszió:

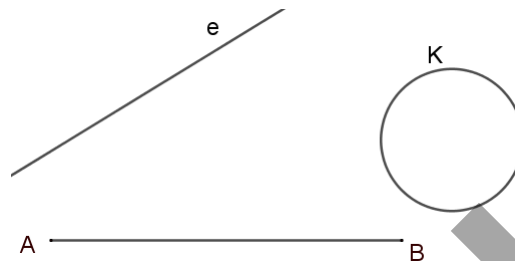


Adott az $ABCD$ paralelogramma A és B csúcsa (egymás melletti), illetve egy K kör, amely a C csúcson halad át, és egy e egyenes, mely a D -n. Szerkesztendő a paralelogramma.

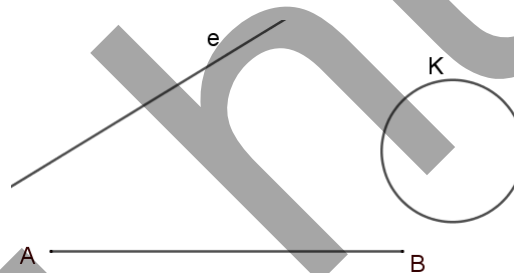
„Mintha már kész lenne” ábra



„Vakábra”



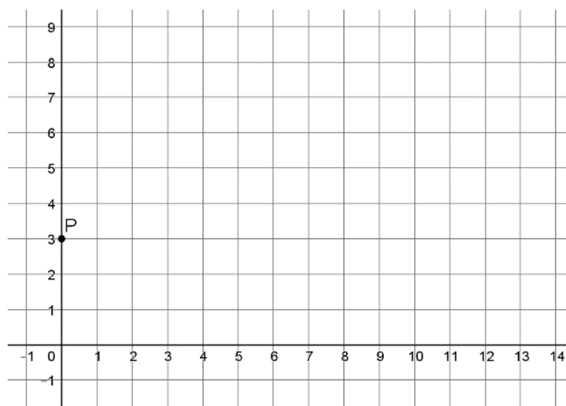
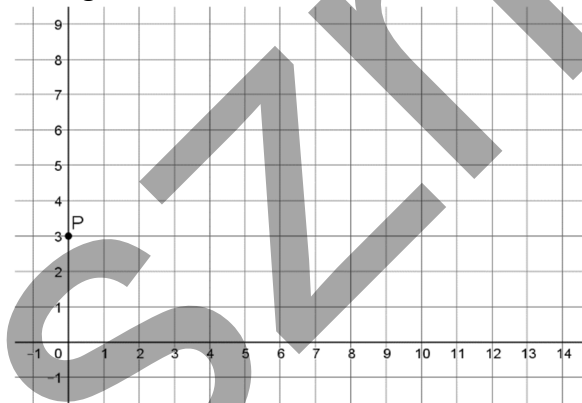
Elv:



Szerkesztés:

Diszkusszió:

* Szerkesszünk olyan 5 egység sugarú kört, amely átmegy a $P(0;3)$ ponton és az x tengely 8 egység sugarú húrt vág le belőle.



VIII) Transzformációk ismételése

Adott két egymást metsző kör, K_1 és K_2 . Szerkesztendő a P metszéspontjukon áthúzott olyan közös szelő, mely egyenesnek a két körbe eső húr része egyenlő hosszú! (kp. tükrözés...)

Ábrák, Elv, Szerk, Diszk!

* Mutasd meg, hogy egy egyenlőszárú háromszög alapjának bármely pontjának a két száltól vett távolságösszege állandó. (tengelyes tükrözés...)

** Adott egy $ABC\triangle$. Szerkeszd meg azt a P pontot az AB oldalon, melynek az a és b oldaltól vett távolságösszege egy adott szakasz. (ld. előző példa)

Sorold fel a körüljárástartó transzformációkat:

Sorold fel a szimmetrikus transzformációkat_

Mely transzformációknak van invariáns egyenes (nem fixegyenes!):

* Mennyi az az n , amikor az n oldalú konvex sokszög külső szögei között már biztosan van hegyesszög? (Érdeemes meggondolni, hogy egy konvex alakzat külső szögeinek összege mennyi).

Egy háromszöget 5 különböző tengelyre tükröztem sorban egymás után. A kapott háromszög és az eredeti körüljárása azonos, vagy különböző?

Adott egy e és $P \notin e$. Kell egy olyan $ABCD \parallel$ (parallelogramma), melynek oldalai: $AB=5$, $BC=4$ cm, az AB -hez tartozó magasság 3 cm, $A \in e$ és $P \in BC$.
Ábrák, Elv, Szerk, Diszk!

Adott egy $\triangle$ -ből: a ; s_b ; m_a . Szerkesztendő $\triangle$.
Ábrák, Elv, Szerk, Diszk!

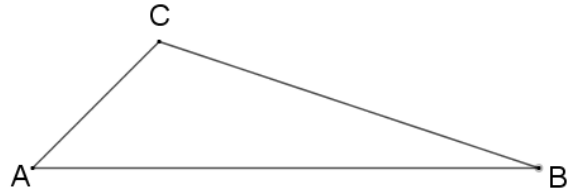
Mely típusú négyszögek a) forgásszimmetrikusak 180° -ra b) 90° -ra; c) tengelyesen szimmetrikusak; d) középpontosan szimmetrikusak

GEOMETRIA C: A HÁROMSZÖG

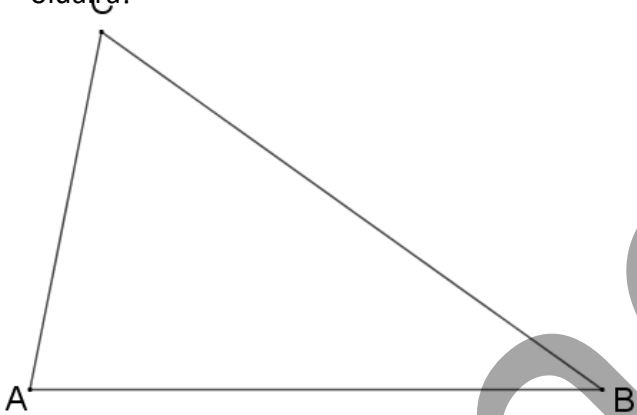
I) Elnevezések, csoportosítások

1) Elnevezések, definíciókkal.

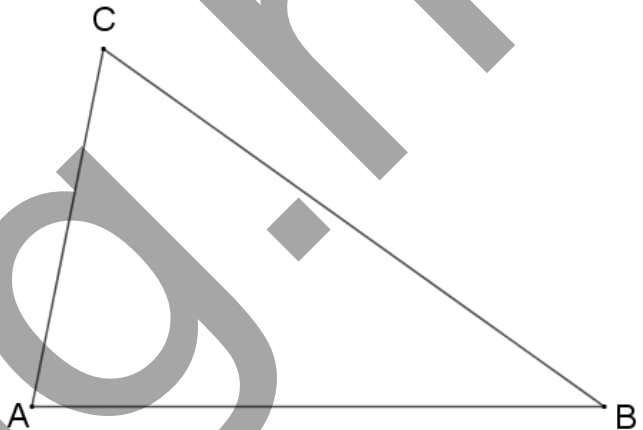
Szerkeszd meg a háromszög köré írható kört!



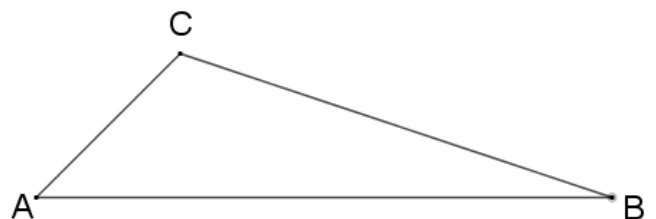
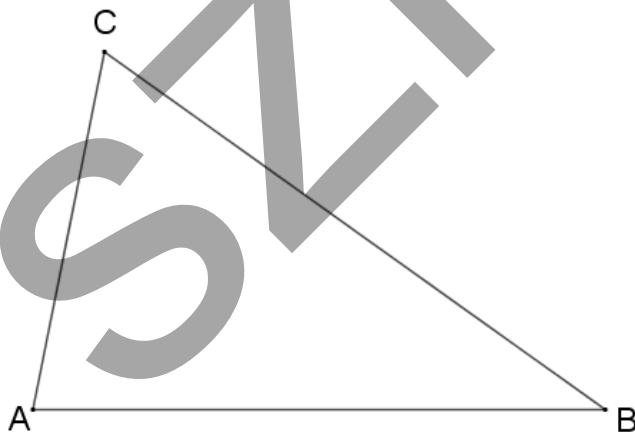
Szerkeszd meg a háromszögbe írható kört! Figyelj arra, hogy a középpont megszerkesztése után abból merőlegest kell állítanod valamelyik oldalra!



Szerkeszd meg az alábbi két háromszög magasságát! (A hegyesszögűnek és alatta tompaszögűnek)

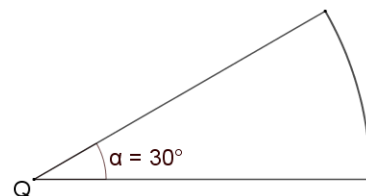


Szerkeszd meg a háromszög súlyvonalát. Utána mérd le mm pontosan az s_a -t, majd nézd meg, hogy az AS szakasz valóban a kétharmada az s_a -nak!



Egy háromszög egyik belső szöge fele a másiknak, és 20° -kal nagyobb, mint a harmadik. Mekkorák a szögek? (Egyenlettel!)

Egy 30° -os körcikk területe $\approx 16,76 \text{ cm}^2$. Mekkora a sugara? (Érdemes egyenletet írni...)



2) Csoportosítások

Írd le a $\triangle$ -ek egybevágóságának – és egyértelmű szerkeszthetőségének az alapeseteit – jelekkel.

Írd le a paralelogramma hét ekvivalens definícióját.

II) Oldalak közti kapcsolat; Szögek közti kapcsolat

1) Háromszög oldalai közti kapcsolat: a háromszög-egyenlőtlenség

Létezik-e olyan $\triangle$, melynek oldalai: a) 1;2;3 b) 2;2;4; c) 15;3;17;

a)

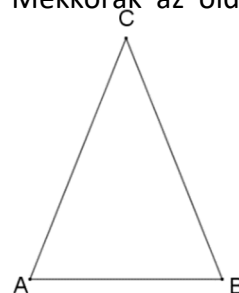
b)

c)

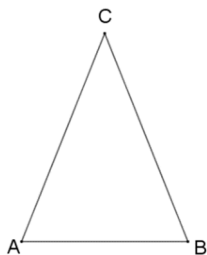
$\triangle$ -ben: $a=2,6$ $b=3,9$ Milyen határok között változhat a c oldal?

Adott egy egyenlőszárú $\triangle$. Az egyik oldala 4,5 cm, a másik 9 cm. Mekkora a harmadik oldal? (Vigyázz, nem lehet akármelyik!)

Egy egyenlőszárú $\triangle$ kerületét az egyik szárhoz tartozó súlyvonalra illesztett egyenes 15 és 11 cm hosszú részre bontja. Mekkora az oldalak? A rajzon gondolkodj!



Ajánlott: egyenlőszárú Δ -ben $a, b, c \in \mathbf{N}$. $k=24$ (kerület). Mekkora lehetnek az oldalak?



Egy Δ minden oldalának hossza egymástól különböző egész. $k=24$, $a=8$. Mekkora lehet a másik két oldal? (Több megoldáspár is van.)

Δ -ben: $a=4,3$ $b=10,8$ Mekkora lehet c ?

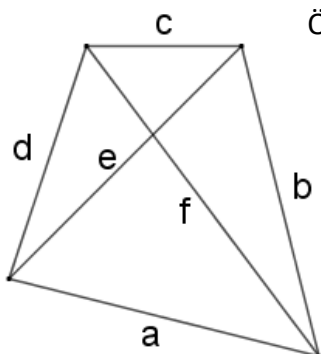
Ajánlott: Δ -ben $a; b; c \in \mathbf{N}$. $k=24$. Az egyik oldal 4-gyel kisebb, mint a másik. Mekkora lehetnek az oldalak?

Aki 5-ös akar lenni...: Egy egyenlő szárú háromszög alapja c , a szárai a hosszúságúak. Mutasd meg, hogy

$$a+c > \frac{\text{kerület}}{2} \text{ ugyanakkor: } a+c < \frac{3}{4} \cdot \text{kerület}$$

Segítség: Fel kell írni pl.: $a+c > \frac{2a+c}{2}$

Aki 5-ös akar lenni: Mutasd meg, hogy konvex négyszögben a két átló összege nagyobb, mint a félkerület. Ötlet: nézd a háromszögeket...

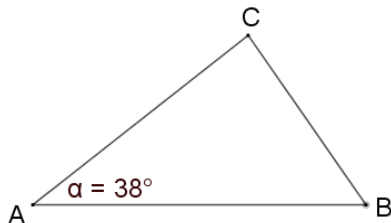


2) A háromszög szögei közötti kapcsolat.

Egy háromszögben: Az egyik szög a legkisebbnek a duplája, a másik a legkisebbnek a háromszorosa. Mekkora a szögek?

Ajánlott: Milyen típusú az $\triangle$, amelyben $\forall$ szög $<$ másik kettő összege? (Érdemes nézni a külső szögeket!)

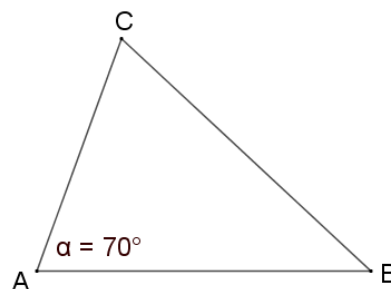
$\triangle$ -ben: $\alpha=38^\circ$, β' , vagyis β külső szöge 125° . Mekkora γ ?



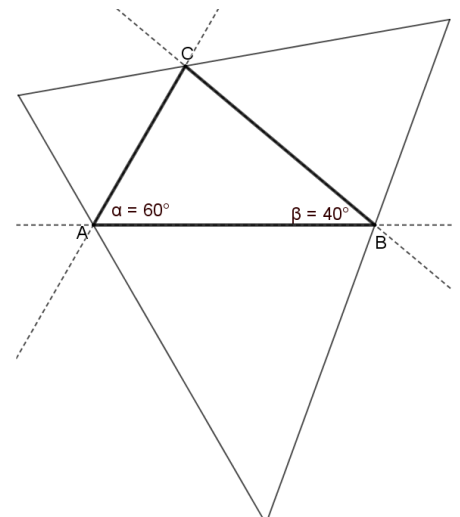
Ajánlott: $\triangle$ -ben: egyik külső szög 85° , illetve az egyik belső szög 37° . Mekkora a szögek?

Egy egyenlőszárú $\triangle$ egyik szöge 50° . Mekkora lehet a másik kettő? (Vigyázz, több megoldás is lehet.)

Egy háromszögben az α szög 70° . Mekkora a másik két szög szögfelezője által bezárt szög ($f_\beta ; f_\gamma$)?

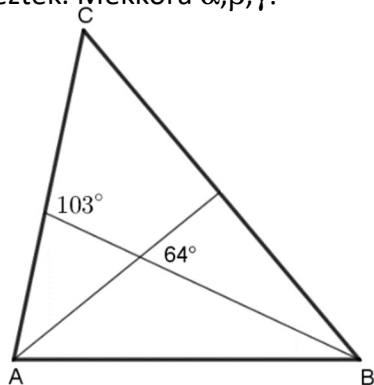


Egy $ABC \triangle$ szögei: 60° , 40° és 80° . Mekkora a külső szögfelezők által meghatározott háromszög szögei?

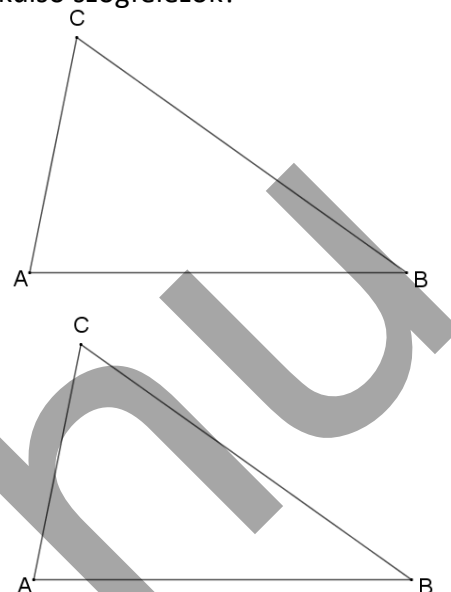


Nem köt.: Egy egyenlőszárú Δ egyik szárához tartozó magasság a másik szárral bezárt szöge az alapon fekvőnek a $4/5$ -öde. Mekkora a szögei?

Meghúztuk f_α -t és f_β -t. Az ábrán látható szögek keletkeztek. Mekkora α, β, γ ?

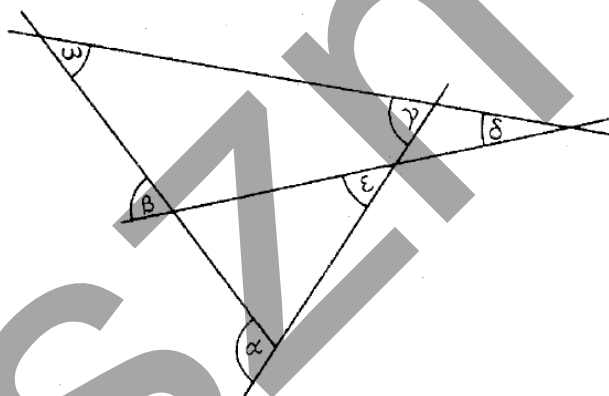


Egy háromszög A és B csúcsánál található szög α és β . Mekkora szöget zárnak be a) az A és B csúcsból induló belső szögfelezők b) az A és B csúcsból induló magasságok c) az A és C csúcsnál található külső szögfelezők?



Egy háromszög két belső szögének aránya $\alpha:\beta=4:7$. A γ 20° -kal nagyobb α -nál. Mekkora a szögek? (Egyenlet!)

Számítsd ki a hiányzó szögeket, ha $\alpha=120^\circ$, $\beta=65^\circ$, $\gamma=75^\circ$.



Nem köt.: Egy háromszög külső szögeinek aránya: $15:11:10$. Mekkora a belső szögek?

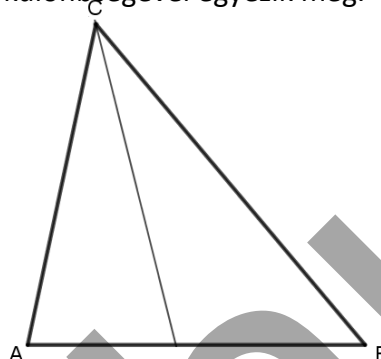
A vastag szakaszok hossza egyenlő. Mekkora β , ha $\alpha=10^\circ$?



3) $\triangle$ -ek egybevágóságának – illetve egyértelmű szerkeszthetőségének alapesetei

Egy háromszög egyik belső szöge 38° . A másik kettő közül az egyik 20° -kal nagyobb a másiknál. Mekkora a szögek?

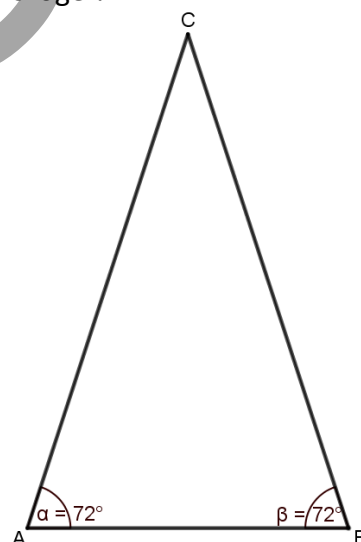
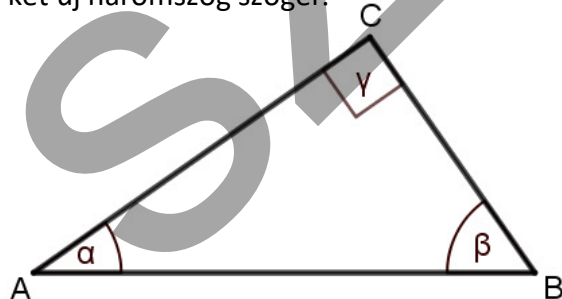
Nem köt.: Mutasd meg, hogy a háromszög egy csúcsához tartozó belső szögfelező a szemkötti oldallal olyan két szöget zár be, melyek különbsége a háromszög másik két szögének különbségével egyezik meg.



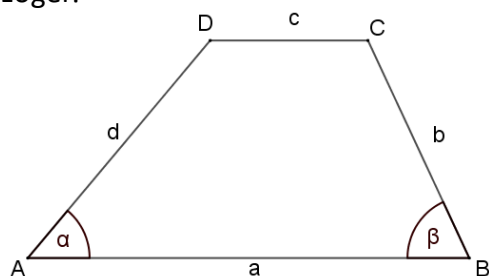
Rajzolj olyan deltoidot, amelynek egyenlő hosszú a két átlója, de nem négyzet.

Az „**ARANYMETSZÉS HÁROMSZÖGE**” – tudd fejből az állítást: Egy egyenlőszárú háromszög szögei: 72° , 72° és 36° . Mutasd meg, hogy az egyik alapon fekvő szög felezője két egyenlőszárú háromszögre bontja az eredetit. Mekkora ezeknek a szögei?

Egy derékszögű $\triangle$ szögei: α ; β és 90° . Húzd meg az átfogóhoz tartozó magasságát. Mekkora a két új háromszög szögei?

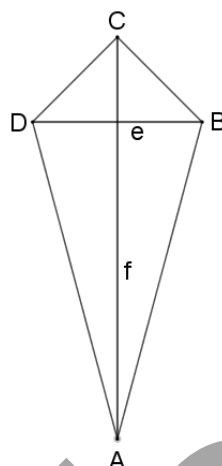


Egy $ABCD$ trapéz ($AB \parallel CD$) β szöge 65° . A D csúcsnál található külső szög 60° . Mekkora a szögei?



Szerkessz $\triangle$ -et körzővel, vonalzóval: $a=5$ cm; $b=4$ cm és $\alpha=75^\circ$

Egy deltoid rövidebbik átlója 45° -ot zár be a rövidebbik oldallal, a másik átlója 15° -ot a hosszabbik oldallal. Mekkora a szögei?



Ajánlott: Mutasd meg, hogy egy egyenlőszárú háromszöget az alaphoz tartozó súlyvonala két egybevágó háromszögre vág ketté.

Szerkessz egyenlőszárú $\triangle$ -et, ha oldalai: $a = b = 6$ cm, és az A-ból induló súlyvonal 60° -ot zár be az „a” oldallal! (Figyelem, a súlyvonal nem szögfelező)

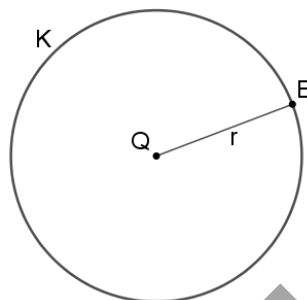
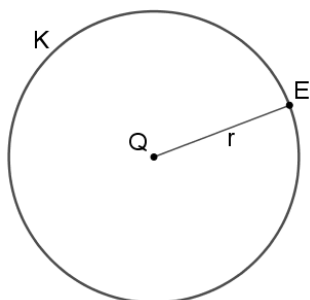
Rajzolj két olyan derékszögű $\triangle$ -et, amelynek szögeik megegyeznek, de nem egybevágók!

Összefüggés a Δ oldalai és szögei között: ($a = b \Leftrightarrow \alpha = \beta$) és ($\beta > \alpha \Leftrightarrow b > a$.)

Tanuld meg először, majd itt bizonyítsd be Δ oldalai és szögei közötti összefüggést – pontosan úgy, ahogy az órán!

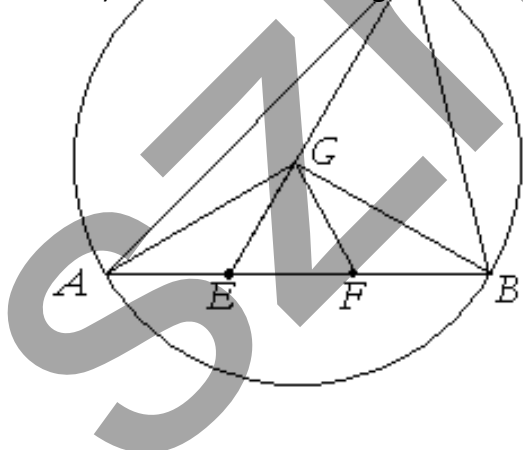
szmg.hu

Aki 5-ös akar lenni...: Meghúzzuk egy $K(Q;r)$ kör sugarát: QE . a) Mutasd meg, hogyha E pontban egy e merőlegest állítunk a sugárra, akkor annak nincs több közös pontja a körrel b) Mutasd meg, hogyha a sugárra nem merőleges az e egyenes, akkor metszi a kört!!! (Az órai tételt kell használd...)



Egy háromszögben: $a \leq b \leq c$. Két szöge: a) $45^\circ; 32^\circ$ b) $150^\circ, 25^\circ$ c) $70^\circ; 70^\circ$. Számold ki a harmadik szöget, majd add meg a nevüket (figyelj, mert pl. az „a” oldallal szemben az α szög van, és tudod, hogy Δ -ben nagyobb szöggel szemben...

Aki 5-ös akar lenni: Adott egy AB szakasz. Két harmadolópontja E és F . Az $EFG\Delta$ egyenlőoldalú Δ . Megrajzolom a G -kp-ű, GA -sugarú kört. Az EG meghosszabbítása G -n túl a kört C -ben metszi. (EG egyenes $\cap k = C$) Mekkora $ABC\Delta$ szögei?

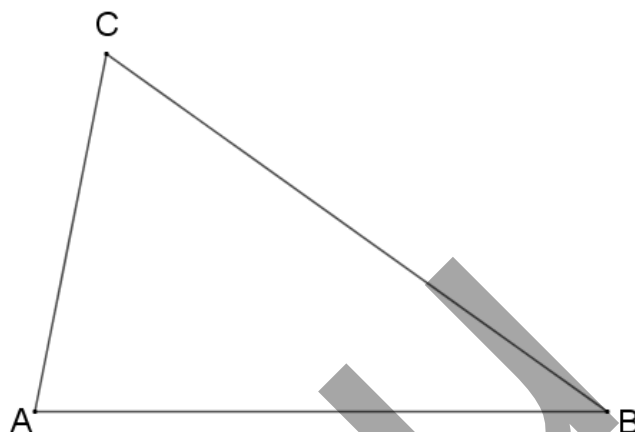
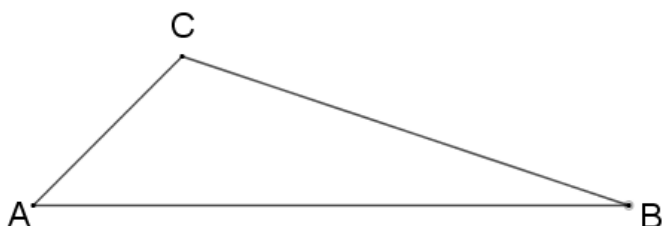


Ajánlott: Δ -ben: $a=6$ $b=7,8$, $\alpha=60^\circ$. Mekkora lehet β ? Mekkora lehet γ ? Mekkora lehet c ? Mekkora lehet a k ? (min, max)

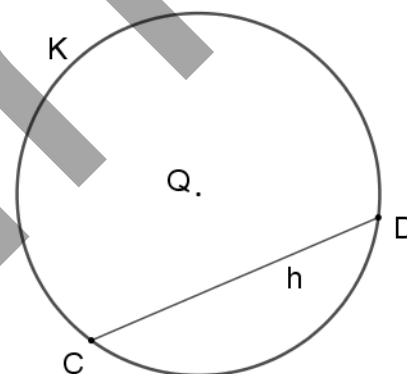
III) A $\triangle$ nevezetes vonalai, pontjai, körei: 1 rész

1) Oldalfelező merőlegesek $\Rightarrow$ a $\triangle$ köré írt kör középpontja

Szerkeszd meg mindkét $\triangle$ köré írható körét!

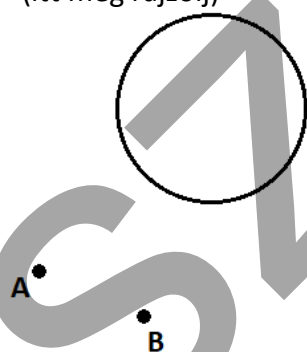


Ajánlott: Bizonyítsd be, hogy egy kör húrjának felezőmerőlegese átmegy a középponton!



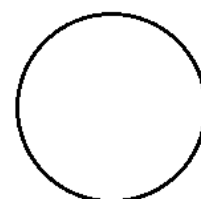
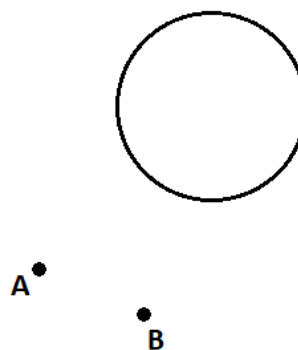
Adott egy K kör alakú medence. Kívül áll valahol Aladár és Béla. Melyik pontját kell kijelölni a medence szélének, hogyha versenyt futnak addig, az igazságos legyen?

„Mintha már kész lenne” ábra
(itt még rajzolj)



Elv:

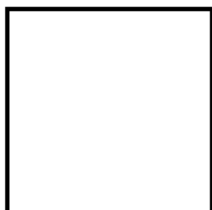
„Vakábra”



Szerkesztés:
Diszkusszió:

Ajánlott: Adott egy $ABCD$ négyzet és rajta kívül egy R és S pont. A négyzet területének mely pontjából lehet valamilyen szöggel elforgatni S -t úgy, hogy R -be kerüljön?

„Mintha már kész lenne” ábra
(itt még rajzolj)

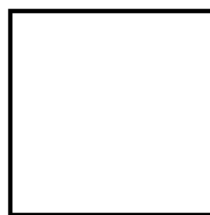


R

S

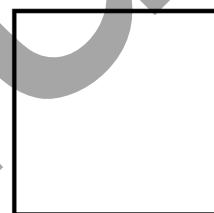
Elv:

„Vakábra”



R

S



R

S

Szerkesztés:
Diskusszió:

Nem köt.: Szerkesztendő egyenlőszárú $\triangle$, ha adott R (kör írt kör sugara) és az egyik szár.

Szerkessz egy kört, amely 4 ponttól egyenlő távolságra halad. (egyik 3 pont sem kollineáris!)

„Mintha már kész lenne” ábra
(itt ez a nehéz!)

A

B

C

D

Elv:

„Vakábra”

A

B

C

D

A

B

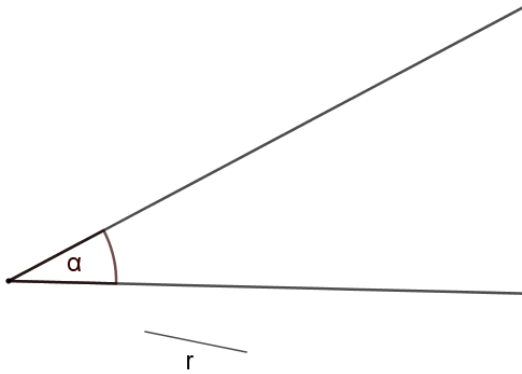
C

D

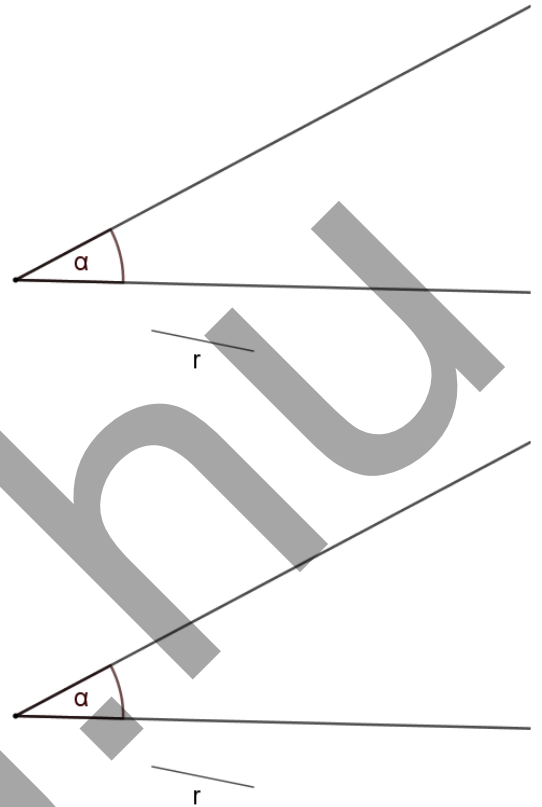
Szerkesztés:
Diskusszió:

2) Szögfelezők $\Rightarrow \triangle$ -be írt kör és hozzáírt kör

Adott egy α szög és egy r szakasz. Szerkessz ebbe a szögbe egy r sugarú, a szög szárait érintő kört!
 „Mintha már kész lenne” ábra
 (itt még rajzolj)



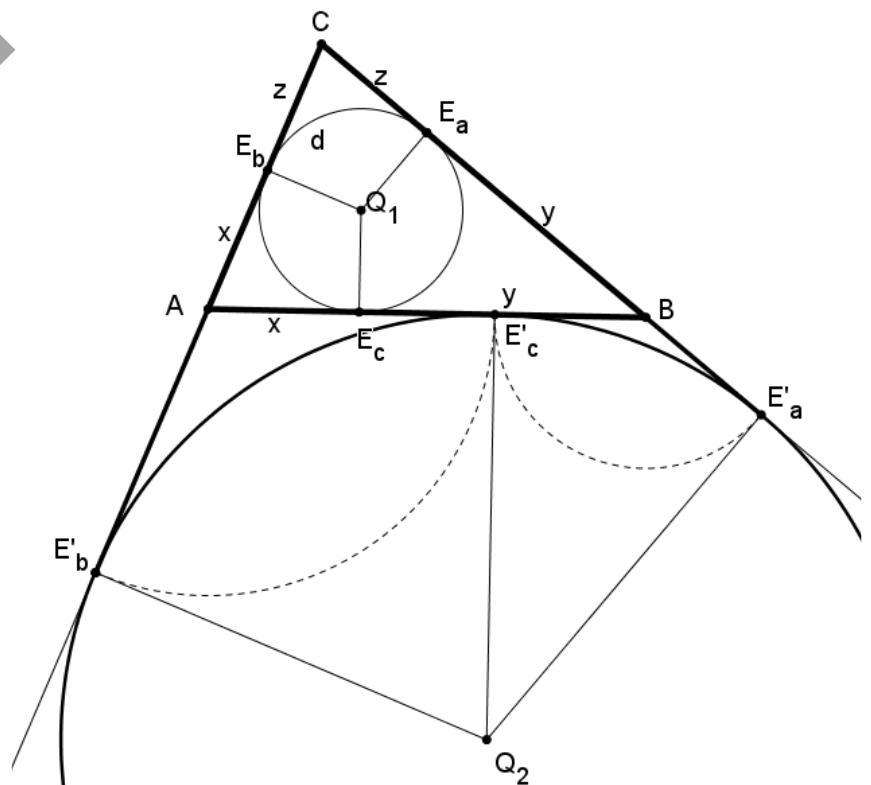
Elv:



Szerkesztés:

Diszkusszió - nincs

Aki 5-ös akar lenni...: Háromszöghöz írt kör.
 Mutasd meg, hogy $CE'_b = s = CE'_a$. (s = félkerület)
 Mutasd meg, hogy $E'_bE_b = c = E'_aE_a$.
 Mutasd meg, hogy az $E_cE'_c$ szakasz $= |a-b|$
 (ld. ábra)



Ajánlott: Szerkessz $\triangle$ -et, ha adott: c ; m_a
(magasság) f_α (szögfelező)

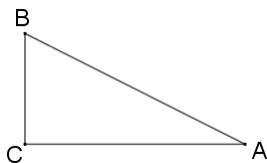
Egy háromszög területe 30 cm^2 . A beírt kör sugara $1,5 \text{ cm}$. Mekkora a kerülete?

* Adott a szakasz és egy derékszög, benne egy kör, ami érinti a derékszög két szárát. Kell egy olyan érintő, amelynek hossza a , és két végpontja a szög egy-egy szárán van. (Hozzáírt-beírt körök témakör!)

Egy háromszögben meghúzom a csúcsoktól a beírt kör kp-ig terjedő szakaszokat. 3 db. $\triangle$ -et kapok. Mit mondhatok az eredeti háromszögről, ha ez a három $\triangle$ egyenlő területű? Rajzolj!

Szerkessz derékszögű $\triangle$ -et, ha adott a kerület ($a+b+c$) és az átfogó (c).

"Mintha már kész lenne" ábra
(itt még rajzolj)



Elv:

„Vakábra”



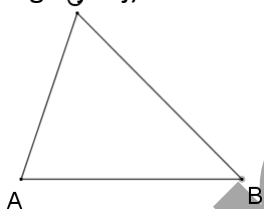
Szerkesztés:

Diszkusszió:



Nem köt.: Szerkessz háromszöget, ha adott: $k=a+b+c$, α és β . Az adatokat magad vedd föl!

"Mintha már kész lenne" ábra
(itt még rajzolj)



Elv:

„Vakábra”



Szerkesztés:

Diszkusszió:



Egy háromszög kerülete 12 cm. Mekkora a beírt kör ρ sugara, ha a területe 6 egység.

IV) A Thalész tétel

1) Bevezetés: a mértani hely fontossága.

2) A tétel

Írd le és bizonyítsd be a Thalesz tételt, ahogy az órán csináltuk! (Férjen is ki!)

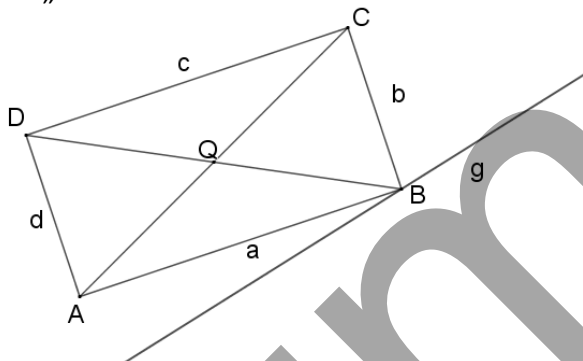
szmg.hu

* Szerkessz $\triangle$ -et, ha adott a ; s_b (b -hez tartozó súlyvonal), m_c (c -hez tartozó magasság).

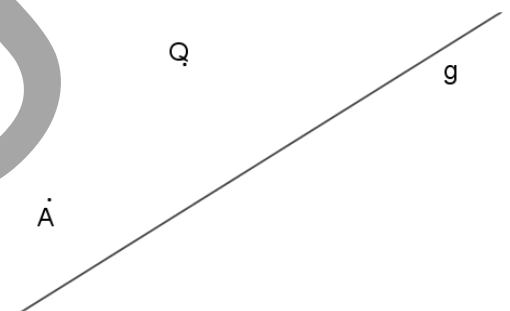
3) Alappéldák

Adott az $ABCD$ téglalapról a két átló metszéspontja: Q , az A csúcs, és a B csúcsra illeszkedő e egyenes. Szerkesztendő a téglalap.

„Mintha már kész lenne” ábra



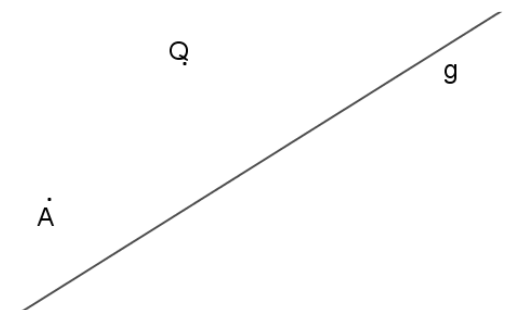
„Vakábra”



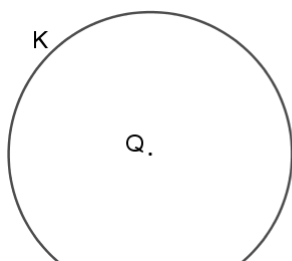
Elv:

Szerkesztés:

Diszkusszió:

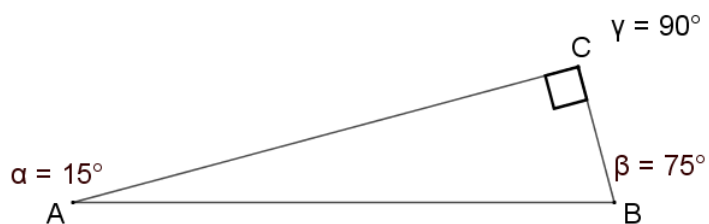


Szerkeszd meg a körhöz a két érintőt P -ből!

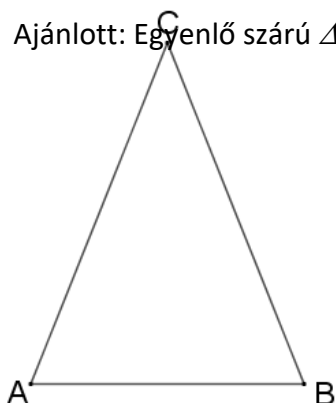


P

Aki 5-ös akar lenni...: Adott egy $\triangle$: 90° , 15° és 75° fokos szögekkel. Mutasd meg, hogy az átfogóhoz tartozó magasság negyede az átfogónak. (Érdemes megrajzolni a Thalész kört...)



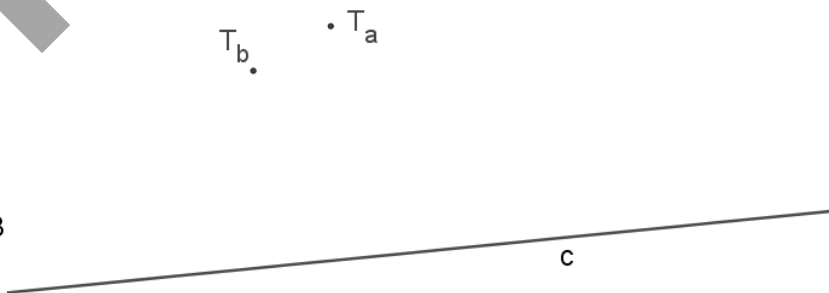
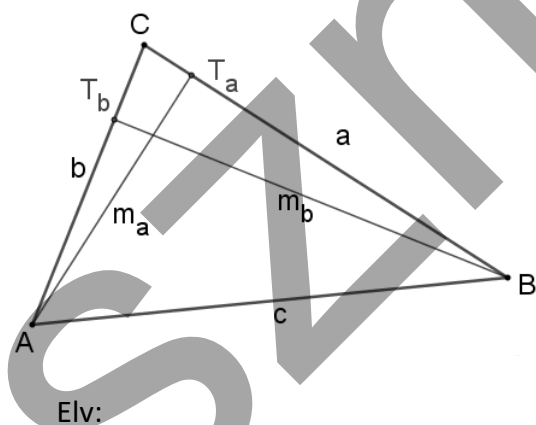
Ajánlott: Egyenlő szárú $\triangle$ -ben a szár Thalész köre milyen arányban osztja az alapot?



Szerkessz $\triangle$ -et, ha adott: T_a , T_b és a c oldalra illeszkedő oldalegyenese! ($T_a = m_a$ talppontja stb.)

„Mintha már kész lenne” ábra

„Vakábra”

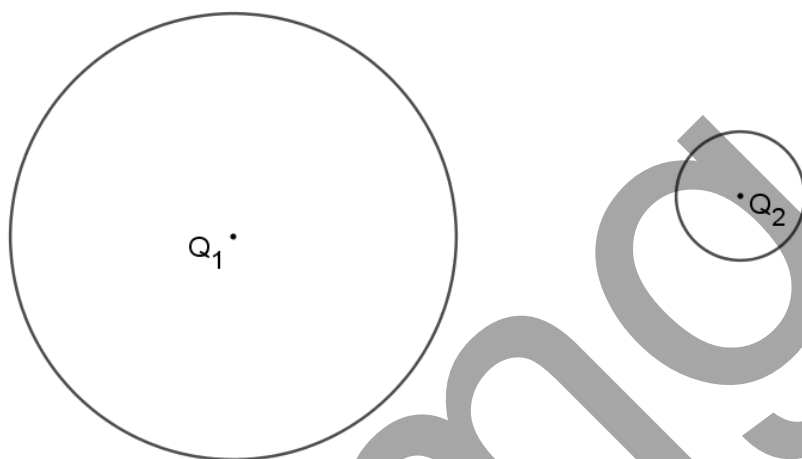


Szerkesztés:
Diskusszió:



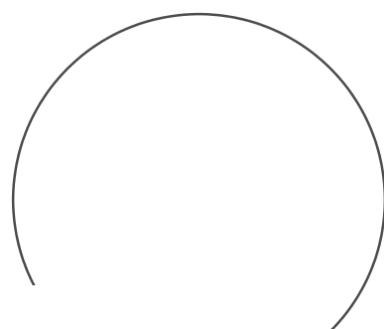
Ajánlott: Szerkesztendő Δ , ha adott: c, m_c, m_a . (Ábrák, Elv, Szerk, Diszk)

Tanuld meg a két körhöz húzott közös külső érintő szerkesztésének elméletét, majd szerkessz a két körhöz közös külső érintőt! A segédvonalakat, pontokat ugyanúgy nevezd el, ahogy az órán tettük!

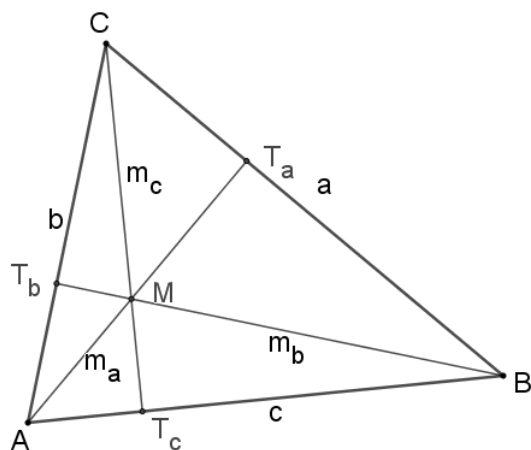


Nem kötelező: Δ -ból adott T_a (m_a talppontja) T_b, M . Szerkesztendő a Δ : (Ábrák, Elv, Szerk, Diszk).

Ajánlott: szerkessz meg egy körvonal középpontját!



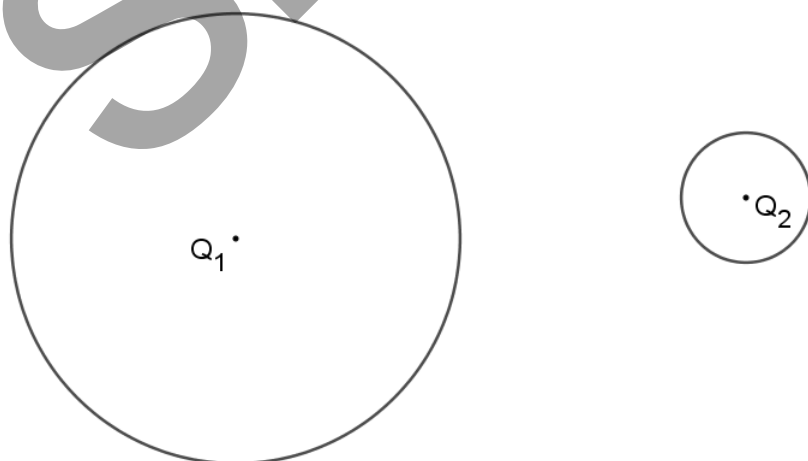
Bizonyítsd be, hogy egy $\triangle$ -ben: T_a, C, T_b, M egy körön van! (T_a az A -ból induló magasság talppontja, M a magasságpont)



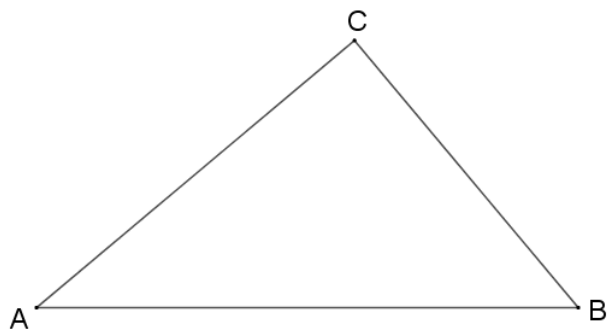
Bizonyítsd be, hogy egy $\triangle$ -ben: B, C, T_b, T_c egy körön van! (T_b a B -ből induló magasság talppontja.) (A fenti ábrán)

Nem kötelező: Egy 6 cm oldalú négyzet két oldalát elmeteszem úgy egy egyenessel, hogy az az egyik oldallal 30° -os szöget zár be. Adott a két metszéspont P és R . Szerkesztendő a négyzet.

Tanuld meg a két körhöz húzott közös belső érintő szerkesztésének elméletét, majd szerkeszd meg két közös belső érintőt!

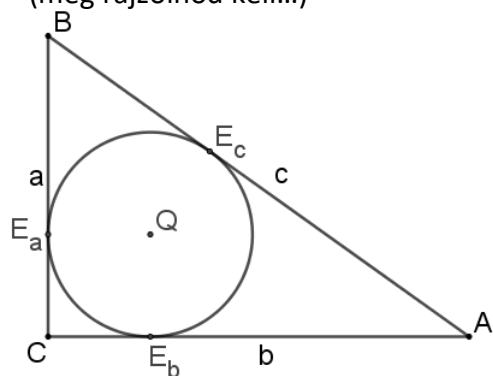


Mutasd meg, hogy $\perp$ -ű $\triangle$ -ben $c=2s_c$. (Az átfogó duplája a hozzá tartozó súlyvonalnak!)



Szerkessz derékszögű $\triangle$ -et, ha adott ρ (beírt kör sugara) és α .

„Mintha már kész lenne” ábra
(még rajzolnod kell...)



Elv:

„Vakábra”



~~Szerkesztés:~~

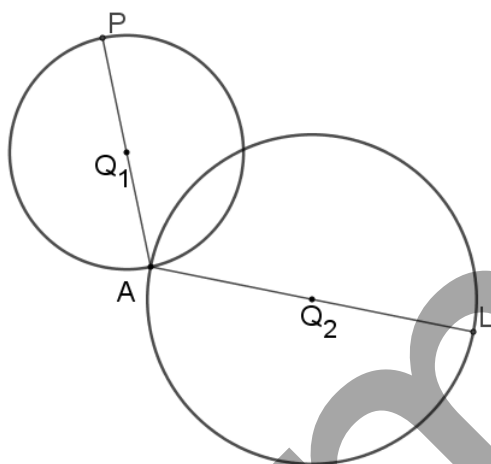
Diszkusszió:

Nem kötelező: Szerkessz derékszögű $\triangle$ -et, ha adott ajánlott: $a+b$ és c . (a két befogó összege és az átfogó).
(Ábrák, Elv, ~~Szerk~~, Diszk.)

Nem kötelező: Szerkessz derékszögű $\triangle$ -et, ha adott R (köré írt kör sugara) és α . (Ábrák, Elv, ~~Szerk~~ Diszk.)

4) Gyakorló példák

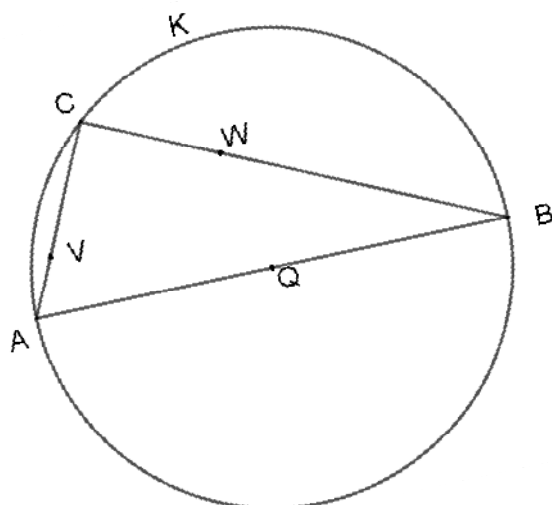
Két egymást metsző kör egyik metszéspontjából húzzuk meg a két átmérőt. Bizonyítsd be, hogy e két átmérő két másik végpontját összekötő szakasz átmegy a körök másik metszéspontján.



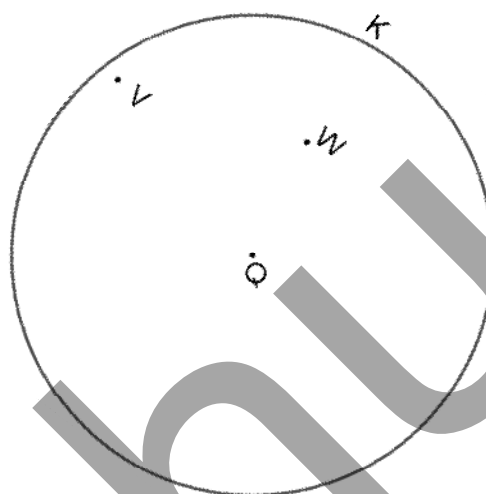
Ajánlott: $\triangle$ -ből adott: $c; m_c, m_b$. Szerkesztendő a $\triangle$. ((Ábrák, Elv, ~~Szerk~~ Diszk.))

Adott egy K körben egy V és egy W pont. Kell $\perp$ -ű $\Delta \rightarrow$ a K kör a köré írt köre, és a két pont 1-1 befogóján van.

„Mintha már kész lenne” ábra
(még rajzolnod kell...)



„Vakábra”



Elv:

~~Szerkesztés:~~

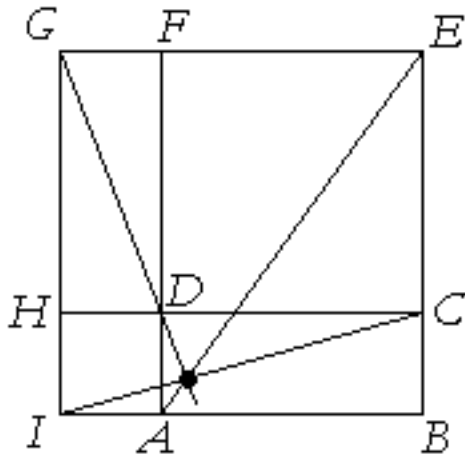
Diszkusszió:

** Adott k kör, AB átmérő, Q kp. F fut a körön. F merőleges vetülete AB átmérőn F' . Legyen $P \in QF \rightarrow QP = QF'$.
Mi a P pontok mértani helye? (Szerkessz meg néhányat, és akkor megsejtheted, beláthatod!)

V) Δ nevezetes pontjai, körei: 2. rész - Magasság $\Rightarrow$ magasságpont

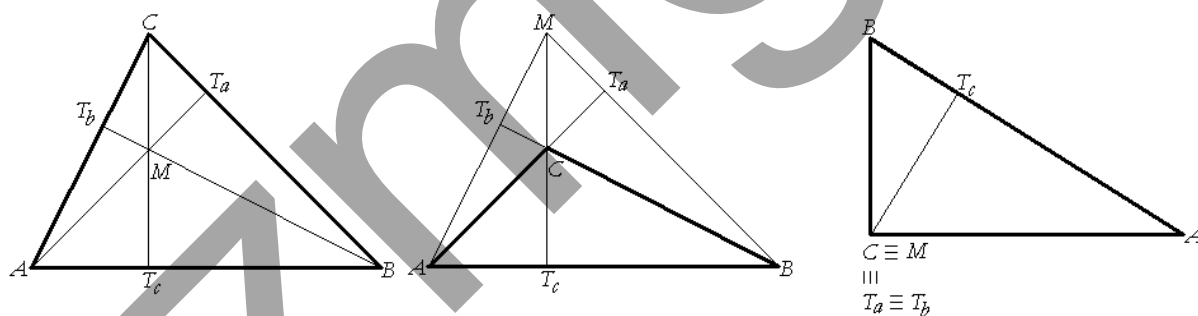
1) Áll.: a Δ -ben a magasságvonalak egy ponton mennek át, és ez a magasságpont: M

* Adott egy téglalap (ABCD) rá két négyzetet emelünk, és készítünk belőle egy nagy négyzetet. Mutasd meg, hogy az adott vonalak (IC, EA és GD) egy ponton haladnak át:



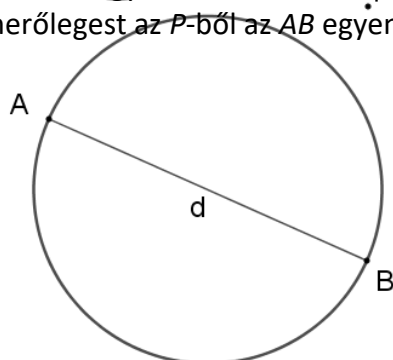
Nem köt: Δ -ból adott: a, α, m_b . Szerkeszd meg a Δ -et!

Mutasd meg, hogy háromszögben az A, B, T_a, T_b egy körön vannak!

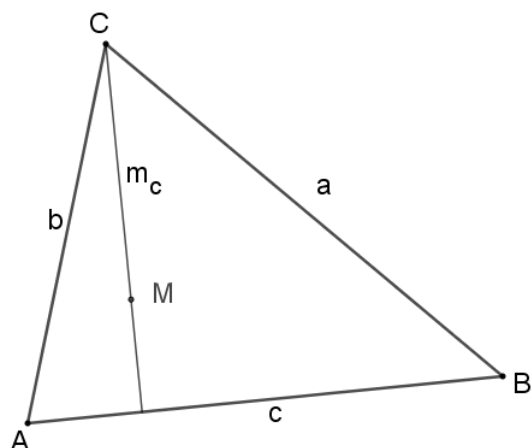


2) Példák

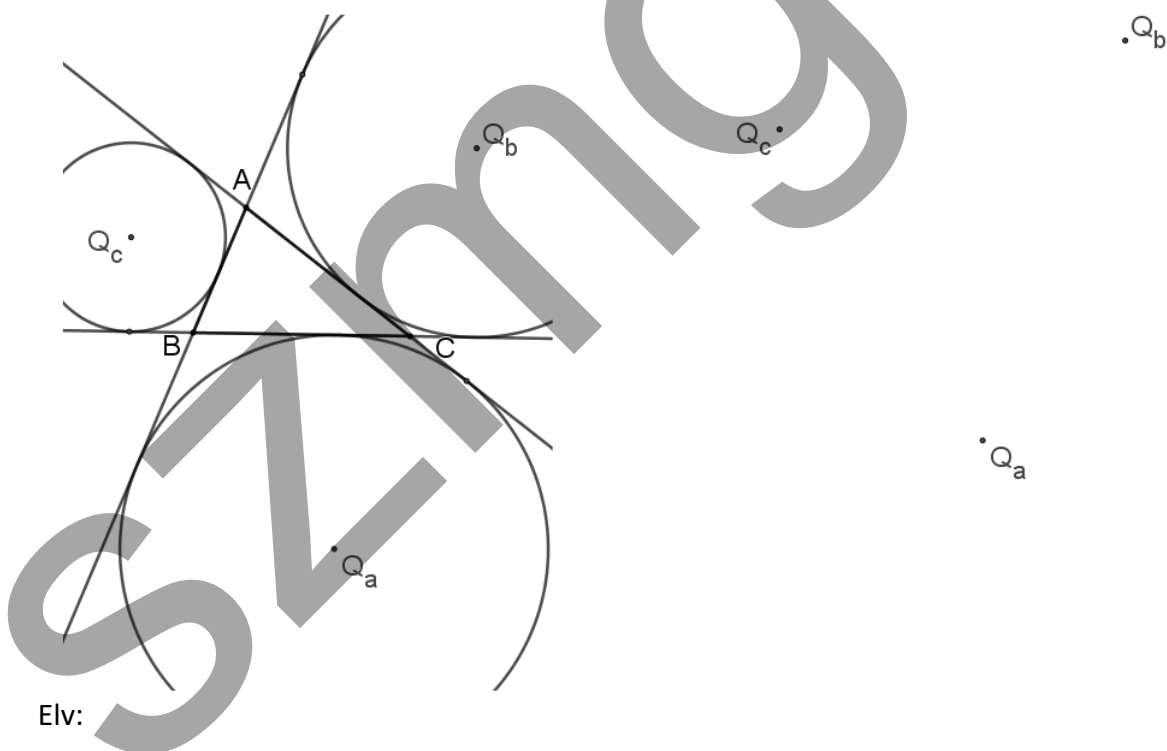
* Adott egy kör az AB átmérővel. Egy körön kívüli pontból csak egyenes vonalzó használatával állíts merőlegest az P-ből az AB egyenesére!



Az ABC_{Δ} -ben az MC szakasz Thalész köre hol metszi c -t és b -t? (M = magasságpont, C = csúcpont) Miért?



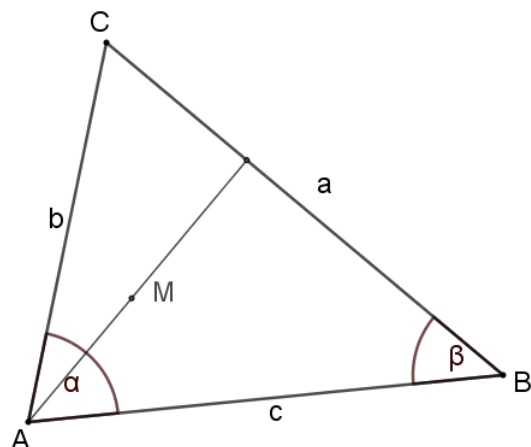
Ajánlott: Adott egy ABC_{Δ} három hozzáírt körének a középpontja: Q_a , Q_b és Q_c . Szerkeszd meg a Δ -et!
 „Mintha már kész lenne” ábra
 (még rajzolnod kell...)



Szerkesztés; Diskusszió

Δ -ból adott az AM szakasz (M a magasságpont), α és β . Kell: Δ .

„Mintha már kész lenne” ábra
(még rajzolnod kell...)



Elv:

~~Szerkesztés, Diszkussió~~

Szerkessz egyenlőszárú Δ -et ($a, b = c$ oldalak), ha adott a kerület $k = a + b + b$ és α .

Ábrák, Elv, ~~Szerk~~, Diszk.

Nem köt.: Szerkessz derékszögű $\triangle$ -et, ha adott R (a köré írt kör sugara) és m_c .

Ábrák, Elv, Szerk, Diszk.

Szerkessz derékszögű $\triangle$ -et ha adott a terület és az α szög!

Ábrák, Elv, Szerk, Diszk.

Ajánlott.: Szerkessz derékszögű $\triangle$ -et ha adott $c-a$ (az átfogó és az „ a ” befogó különbsége) és α .

Ábrák, Elv, Szerk, Diszk.

Nem kötelező: Szerkessz egyenlőszárú derékszögű $\triangle$ -et, ha adott $c+a$ (átfogó és az egyik szár összege).

Ábrák, Elv, ~~Szerk~~, Diszk.

Ajánlott: Derékszögű $\triangle$ -ből adott: p , R . Szerkesztendő a $\triangle$. (p a beírt, R a körülírt kör sugara)

Ábrák, Elv, ~~Szerk~~, Diszk.

Derékszögű $\triangle$ -ben az oldalak: $a = 7$; $b = 24$; $c = 25$ cm. Mekkora a beírt kör sugara (p)?

GEOMETRIA D: NÉGYSZÖGEK, SÍKIDOMOK, TERÜLET

I) A négyszögek

1) Elnevezések, csoportosítások

Igaz/hamis

Van középpontosan szimmetrikus háromszög.

Ha egy síkidom középpontosan szimmetrikus, akkor forgásszimmetrikus is.

Az a sokszög, amely a középpontja körül 20° -ra forgásszimmetrikus, az középpontosan is szimmetrikus.

A paralelogramma tengelyesen szimmetrikus.

Van olyan alakzat, amely bármely szögre forgásszimmetrikus.

Rajzolj vonalzóval, körzővel (nem kell szerkeszteni, csak legyen szép)! A legrövidebb oldal is legyen legalább 3 cm!

trapéz

deltoidot

paralelogrammát

rombuszt

téglalapot

négyzetet

2) Átlók száma, belső szögek összege

Egy $\triangle$ -ből adott két oldala: $a = 8$ cm és $b = 4$ cm, illetve a c oldalhoz tartozó súlyvonala: $s_c = 5$ cm.. Szerkesztendő a $\triangle$. - Ábrák, Elv, Szerk, Diszk. (Emlékezz: a kp-os tükrözésnél tanultuk!)

Egy konvex 20-szögben egy csúcsból hány átlót tudsz húzni? Hány átlója van összesen (vigyázz, a szorzásnál minden átlót kétszer számolsz...)

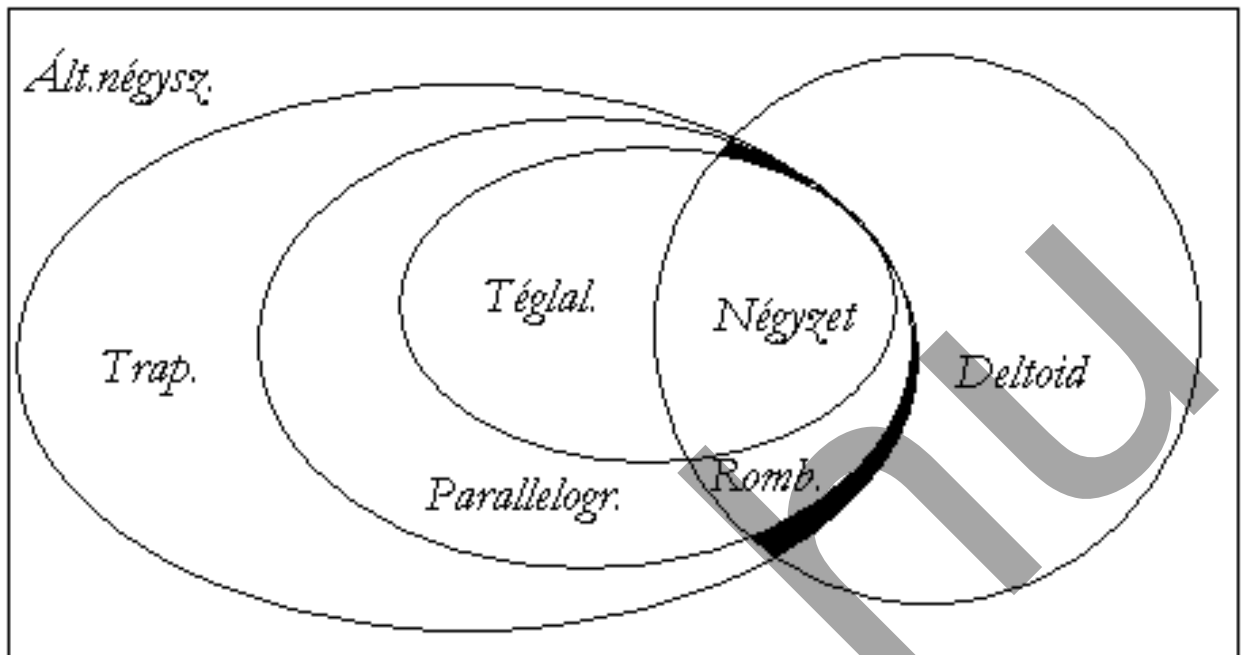
Hány egyenest határoz meg 10 olyan pont, mely közül nincs három kollineáris (vagyis nem esik három egy egyenesre). (Két pont határoz meg egy egyenest.) Gondolkodj azzal a módszerrel, ahogy egy sokszög átlóinak számát kiszámoltuk!

15 ember találkozik. Mindenki mindenkivel kezet fog. Hány kézfogás volt összesen?

Hány ember találkozott, ha összesen 66 kézfogás történt?

3) Rendszerezzük a négyszögeket

Rajzolj mindenhová egy alakzatot (férjen be).



Egy konvex sokszög csúcsainak számát 4-gyel növeltem. Így 50-nel több átlója lett. Hány csúcsa volt eredetileg. Egyenlet!

Egy konvex sokszögnek 80-nal több átlója van, mint egy nála 5-tel kevesebb csúcsúnak. Hány csúcsuk van?

Konvex 20-szögben az egy csúcsból húzható átlók hány háromszögre vágják a sokszöget.

Mennyi a konvex 20-szög belső szögeinek az összege?

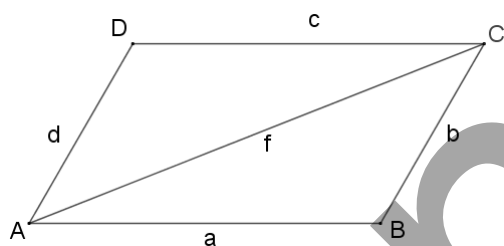
Mennyi a konvex sokszög belső szögeinek összege 2160° . Hány csúcsa van?

4) A paralelogramma

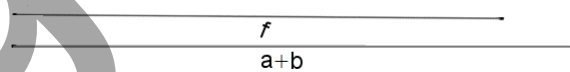
Ajánlott: Egy paralelogrammából adott az a oldal: 7 cm; az A csúcsból induló e átló: 9 cm és $m_a = 5$ cm. szerkesztendő a paralelogramma! (Ábrák, Elv, Szerk, Diszk.)

Adott egy paralelogrammából a két szomszédos oldal összege: $a+b$, $\alpha=60^\circ$ és az AC átló hossza. Szerkesztendő a paralelogramma!

„Mintha már kész lenne” ábra
(még rajzolnod kell...)



„Vakábra”



Elv:

Szerkesztés:

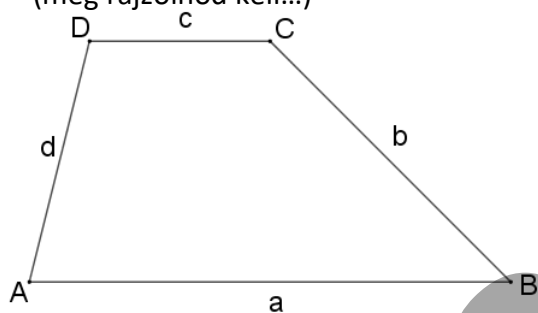
Diszkusszió:

Nem kötelező: Szerkessz rombuszt, ha adott az oldala (5 cm) és az egyik átlója (8 cm)!
(Ábrák, Elv, ~~Szerk~~, Diszk.)

5) Trapéz

Szerkessz trapézt, ha a adott a négy oldala.

„Mintha már kész lenne” ábra
(még rajzolnod kell...)



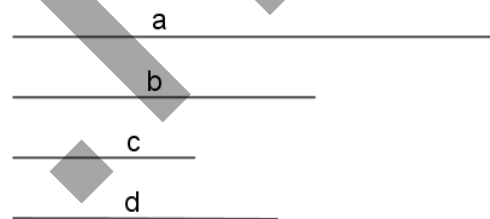
Elv:

Szerkesztés:

Diszkusszió:

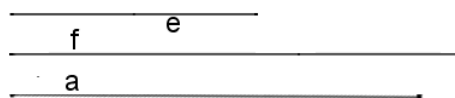
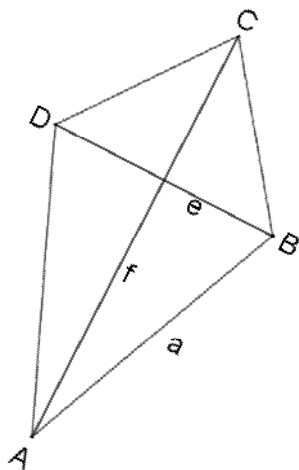
Egy sokszögnek 20 átlója van. Hány csúcsa van?
(A jó egyenletért lehet sok pontot kapni!
Egyenlettel!)

„Vakábra”



Egy sokszögnek 84-gyel kevesebb átlója van,
mint a kétszer annyi csúcsúnak. Hány csúcsa van?
(A jó egyenletért lehet sok pontot kapni!
Egyenlettel!)

Egy deltoidnak meg van adva a két átlója: e, f az a oldala. Szerkesztendő a deltoid.
 „Mintha már kész lenne” ábra „Vakábra”



Elv:

Szerkesztés:

Diszkusszió:

Nem kötelező: Egy deltoidnak adott két egymás melletti szöge α és β , és a szimmetria-tengely átlója $BD = e$. Szerkesztendő a deltoid.
 (Ábrák, Elv, Szerk, Diszk.)

Egy érintőnéyszög 3 oldala: 5, 6 és 7 egység hosszú – valamilyen sorrendben. Mekkora lehet a negyedik oldal (vigyázz, több megoldás is lehet...)

II) Síkidomok kerülete, területe

1) Kerület

Számold ki a 3 cm sugarú kör területét! Minimum mekkora területű négyzettel lehet lefedni? Számold ki a kör és a négyzet kerületét is!

Számold át:

$$4,8 \text{ dm}^2 = \dots\dots\dots \text{cm}^2.$$

$$560 \text{ cm}^2 = \dots\dots\dots \text{dm}^2$$

$$8,3 \text{ m}^2 = \dots\dots\dots \text{mm}^2$$

$$3 \cdot 10^8 \text{ mm}^2 = \dots\dots\dots \text{m}^2$$

2) A területszámítás fölépítése

Egy téglalap területe 2700 dm^2 , az egyik oldala 3 méter. Mekkora a másik oldal dm-ben mérve?

Számold ki a 40 cm kerületű négyzet területét, majd a 80 cm kerületűét! A dupla terület lett?

Ha egy téglalap mindkét oldalát megháromszorozom, hányszorosára nő a területe? (Rajzolj!)

Egy téglalap két oldala: 3 és 4 cm. Mekkora a területe? Mindkét oldalt háromszorozd meg négygyel, és számold ki úgy is a területet. Hányszorosára nőtt a terület?

Van egy kis négyzetem. Hány ilyenből tudok összerakni egy négyszer nagyobb oldalú négyzetet?

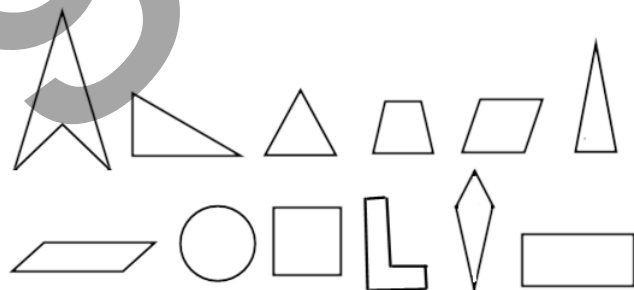
Egy derékszögű háromszög oldalai 50 cm, 120 cm és 130 cm. Mekkora a területe m^2 -ben? Mekkora a belé írt kör sugara? (Rajzolj!)

Egy háromszög területe: 4 m^2 . Az a oldala 8 m. Mekkora m_a ? (Rajzolj!)

Egy paralelogramma oldala 40 cm, a hozzá tartozó magasság 25 cm. Mekkora területű háromszögekre vágja szét az egyik átló a paralelogrammát? (Rajzolj!)

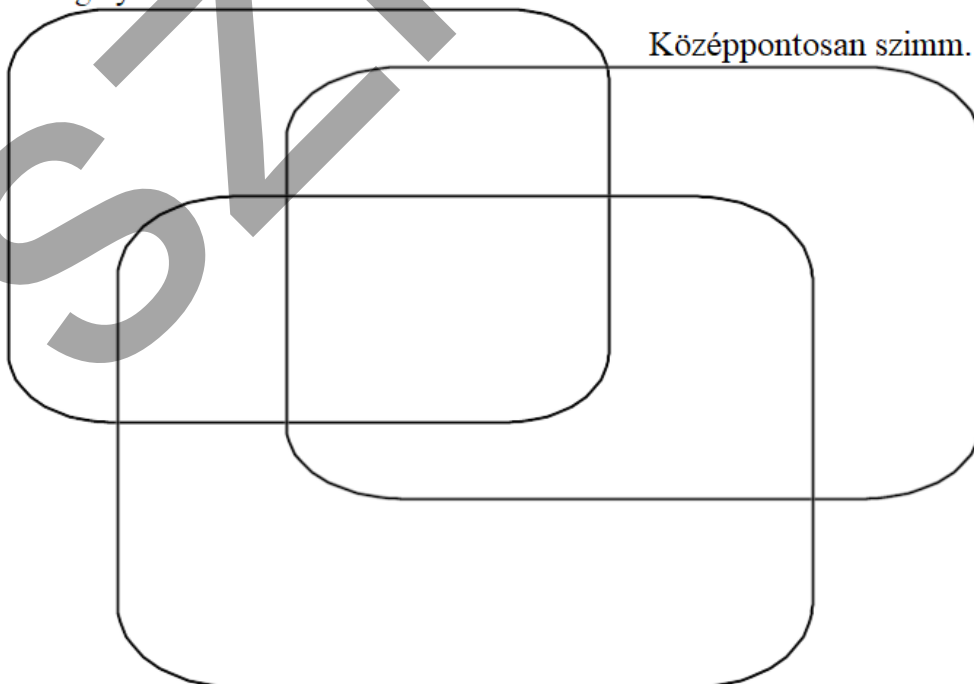
Határozd meg a deltoid területét cm^2 -ben, ha az egyik átló $e = 5 \text{ m}$, a másik $f = 30 \text{ dm}$

Rajzold be a megfelelő helyre az alakzatokat (amely szakaszok egyenlőnek tűnnek: azok is.)! Amelyik sehova sem tartozik, azt satírozd be!



Tengelyesen szimmetrikus

Középpontosan szimm.

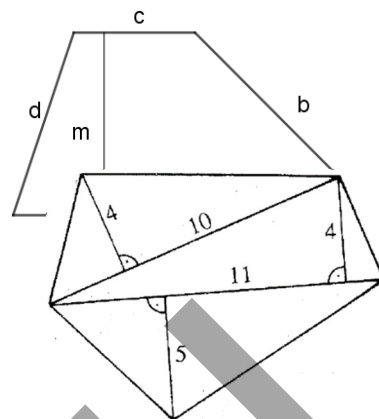


Forgásszimmetrikus (nem 180° -ra)

Egy trapéz adatai vannak megadva a táblázatban. Töltsd ki a hiányzó helyeket.

a	b	c	d	m	Kerület	Terület
6	4,24	2	3,16	3		
	5,66	3	4,47	4		24

Határozd meg a sokszög területét: (A 10 és 11 egység az ötszög átlójára vonatkozik!)



3) Számítások

Egy körlapból kivágok egy vele koncentrikus, harmad akkora sugarú kört. $279,25 \text{ dm}^2$ területű körsávot kapok. Mekkora az eredeti kör sugara?

Egy derékszögű háromszög két befogója 8 és 15 cm. Számold ki a területét. Ha tudjuk, hogy 17 cm az átfogó, akkor mekkora a beírt kör területe?

Állítsd növekvő sorrendbe a következő területeket:

5200 mm^2

$0,054 \text{ m}^2$

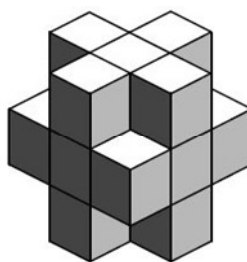
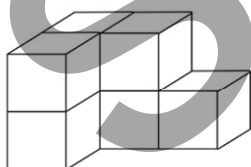
51 cm^2

$5,42 \text{ dm}^2$;

Sorrendben:

4) Gyakorlás

Mekkora az alábbi alakzatok felülete, térfogata (egy kiskocka éle 1 cm.):



Rajzolj, majd írd föl egy egyenletet, majd oldd meg: Egy téglalap szomszédos oldalainak hossza úgy aránylik egymáshoz, mint 3:4. Ha a rövidebb oldalát 3 m-rel csökkentjük, a hosszabb oldalát pedig 6 m-rel növeljük, akkor olyan téglalapot kapunk, amelynek területe egyenlő az eredetiével. Mekkora az eredeti téglalap kerülete és területe?

a	m_a	T
20		38
	12	40
15	8	

Határozd meg a hiányzó adatot (Δ : a az oldala, m_a a magassága és T a terület)

Mekkora a Δ beírt körének sugara, ha a Δ területe 84 cm^2 , oldalai pedig 7, 24 és 25 cm.

Egy derékszögű Δ átfogója 10 cm, egyik befogója 6 cm, a beírt kör sugara 2 cm. Mekkora a területe?

Egy 5 dm sugarú körlepből kivágunk egy fele sugarú koncentrikus 1 dm sugarú körlepot. Mekkora a területe a maradék körsávnak?

Egy négyzetből kivágok egy lehető legnagyobb körlepot. A veszendőbe ment sarkak összterülete $85,84 \text{ dm}^2$. Mekkora volt a négyzet oldala?

Egy körből kivágok egy 72° -os cikket. A maradék területe 2262 m^2 . Mekkora a kör sugara?

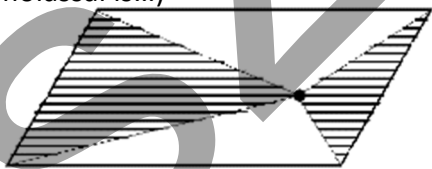
5) Területdarabolások

Egy háromszögben húzd meg a középvonalakat (oldalfelező pontokat összekötő szakaszok). Négy háromszögre esik szét az eredeti háromszög. Mi a viszonyuk egymáshoz?

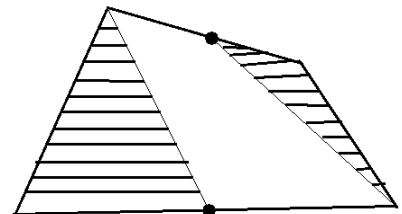
Egy 24 egység területű háromszög c oldalát 5:3 arányban felosztom egy P ponttal, és összekötöm a C csúccsal. Mekkora a két keletkezett $\triangle$ területe?

Egy 30 egység területű háromszög c oldalát 3:8 arányban felosztom egy P ponttal, és összekötöm a C csúccsal. A keletkezett kisebbik $\triangle$ területe 15 egységnégyzet. Mekkora az eredeti $\triangle$ területe?

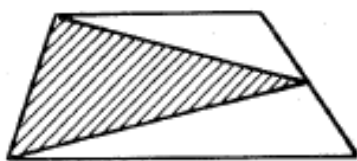
* Egy paralelogramma belsejében kijelölök egy pontot. Összekötöm a csúcsokkal, majd a két szemközti háromszöget besatírozom (ld. ábra). Mutasd meg, hogy a satírozott terület egyenlő a nem satírozottal. Segítség: húzz a ponton keresztül párhuzamost az oldalakkal. (De lehet számolással is...)



* Négyyszög két szemközti oldalfelező pontját a ábra alapján összekötöm 1-1 csúccsal. Mutasd meg, hogy a satírozott terület egyenlő a nem satírozottal. Ötlet: húzd meg az egyik átlót... (Nem mindegy, melyiket ☺)

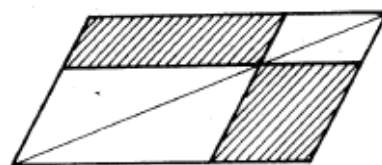


* Mutasd meg, hogy a satírozott egyenlő területű a nem satírozotttal: Trapéz, oldalfelezőpont:



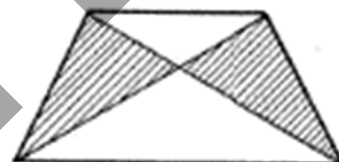
Ötlet: középvonal behúzása, v. türközés...

* Paralelogramma, átlón egy pont, párhuzamosak. Mutasd meg, hogy a két satírozott terület egyenlő:

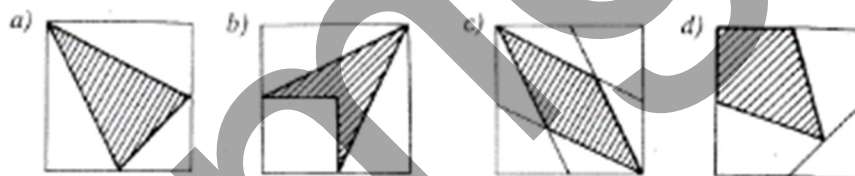


Ötlet: területkivonás

* Mutasd meg, hogy a két satírozott terület egyenlő - Trapéz, átlók:

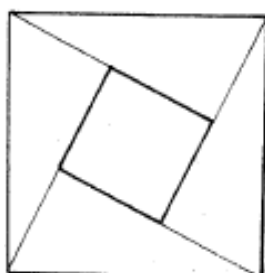


Nem kötelező: Hányad része a satírozott a négyzet területének. Négyzet, felezőpontok:

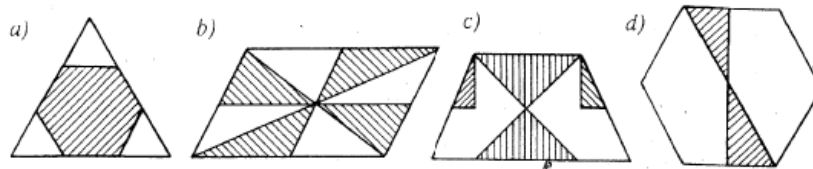


Ötlet: a) területkivonás b) területkivonás c) rombusz hosszabb átlója, majd súlyvonalak... d) pl. a levágott sarkon lévő csúcsát a satírozottnak „mozgasd”!

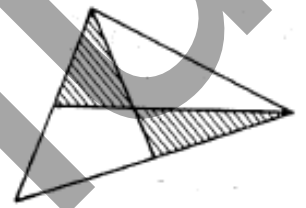
A belső négyzet oldalai a kétszeresére vannak hosszabbítva. A kapott négyzet területe hányszorosa a belsőnek?



Nem kötelező: Hányad rész a sáírozott?

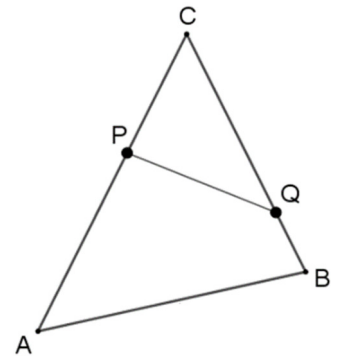
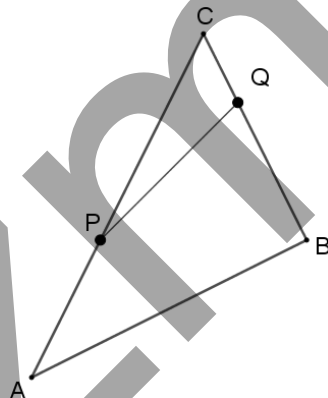


Mutasd meg hogy a két sáírozott egyenlő: (Tudni kell hozzá, hogy milyen arányban osztják egymást a súlyvonalak...):



Az ABC_{Δ} b oldalát oszd 2:3 arányban (A -hoz közelebb) és az a oldalát 1:2 arányban (C -hez közelebb a rövidebb). Mekkora a levágott PQC_{Δ} területe az egészhez képest.

Az ABC_{Δ} b oldalát oszd 3:2 arányban (C -hez közelebb) és az a oldalát 4:1 arányban (B -hez közelebb). A levágott PQC_{Δ} területe 60 egység. Mekkora az ABC_{Δ} területe?

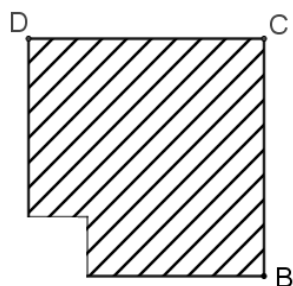


6) Nagyítás, kicsinyítés

Hányszorosára nő egy négyzet területe, ha minden oldalát a) 2-szeresére b) harmadára, c) k -szorosára változtatom?

Két négyzet területének aránya 1:16. Hogy aránylanak egymáshoz az átlók?

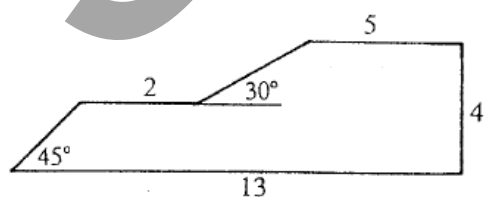
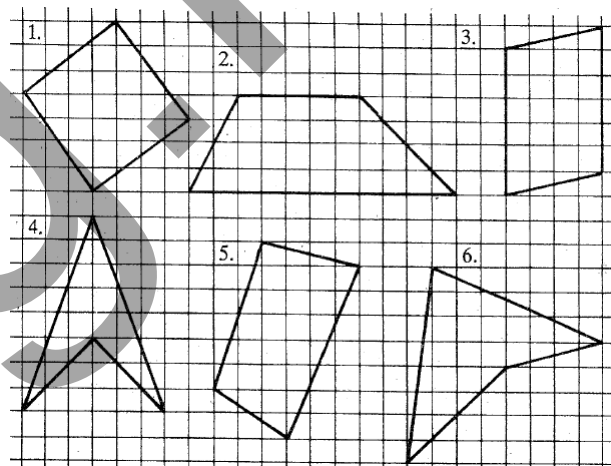
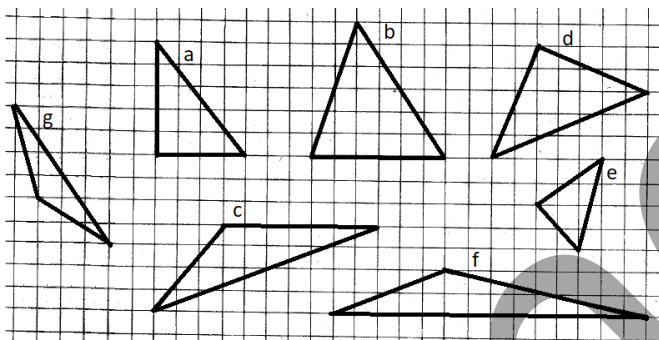
Egy négyzet sarkából kivágtam egy negyed olyan oldalú négyzetet. A maradék területe 128 egység lett. Mekkora az eredeti terület?



Egy kör sugarát megdupláztam. A területe így 72 cm^2 lett. Mekkora volt eredetileg a terület?

7) Rácssokszögek, sokszögek a koordinátasíkon

Számold ki a területeket:



Ajánlott: Számold ki a területet: