

Matematika
Geometria – 2
HF Munkafüzet

v1.0

Szent Margit Gimnázium

szmg.hu
2021

Matematika

Geometria - 2 - HF Munkafüzet

v1.0

Szent Margit Gimnázium

szmg.hu

2021

szmg.hu

Szerkesztette: Vízhányó Zsolt Sch.P. ©

TARTALOMJEGYZÉK

A derékszögű háromszög oldalai	7
I. Ismétlés: háromszögek oldalai illetve az oldalak és a szögek közti kapcsolat	7
1) A háromszög-egyenlőtlenség	7
2) Háromszögek egybevágóságának 4 alapesete és az egyértelmű szerkeszthetőség	7
3) Összefüggés a háromszög szögei és oldalai között	7
4) Tétel.....	8
5) Írd le a Thalész tételt! Írd le a bizonyítást nagy vonalakban, ahogy az órán vettük!	8
6) Két kör közös érintője.....	8
II. A Pitagorasz-tétel és megfordítása, illetve következményei.....	9
1) A Pitagorasz-tétel	9
III. A Befogó-tétel és a magasságtétel, körhatvány bevezetése (szakköri anyag)	10
IV. A Pitagorasz-tétel alkalmazása	10
1) Gyakorlás	10
2) Alappéldák.....	13
3) Egyéb gyakorló feladatok	17
4) Egy kis térgeometria.....	24
Paralelogrammák - Háromszögek - Súlyvonal	25
I. A paralelogrammák ekvivalens definíciói	25
1) Az alapdefiníció és a vele ekvivalens definíciók	25
2) Hány fokok a paralelogramma szögei, ha egyik belső szög a mellettinek háromnegyede?	25
3) Paralelogramma – tételek és gyakorlások.....	26
4) Trapéz.....	28
II. Ismétlés - Thalész tétel + a Δ nevezetes vonalai, pontjai, körei	29
1) Tételek ismétlése.....	29
2) Gyakorlás	30
3) A Δ -be írt és a hozzáírt körök	32
III. A Δ súlyvonala és súlypontja	35
1) Bevezető	35
2) Tétel – súlyvonal, súlypont.....	35
3) Alappéldák.....	36
4) Egyéb példák.....	39
Kerületi szögek – Húrnégyszög - Érintőnégyyszög	41
I. Ismétlés.....	41
II. A középponti és kerületi szögek tétele	43

1)	A kerületi szög	43
2)	Középponti szög.....	43
3)	A kerületi szög és középponti szög kapcsolata.....	44
4)	A Kerületi szögek tétele	45
III.	Tétel: A látószögekörívek tétele - mértani hely	47
IV.	Példák.....	48
1)	Alappéldák	48
2)	Gyakorló példák.....	52
3)	Nem kötelező gyakorló példák	56
V.	A húrnégyszögek	57
1)	Gyakorlás a Definícióhoz	57
2)	Tulajdonságok.....	58
VI.	Gyakorlás.....	60
1)	Alappéldák	60
2)	Gyakorló példák.....	61
VII.	Húrnégyszögeket felhasználó tételek - példák	62
1)	Alapötletek	62
2)	Nem kötelező gyakorló példák	64
VIII.	Az érintő négyszögek	64
1)	A húrnégyszögek definíciója és alaptulajdonsága	64
2)	Az érintő négyszögek és húrnégyszögek kapcsolata	65
	A Párhuzamos szelők tétele	67
I.	A párhuzamos szelők tétele illetve a párhuzamos szelőszakaszok tétele	67
1)	(Segéd tétel – háromszögek, paralelogrammák).....	67
2)	Konkrét racionális arány	67
3)	A párhuzamos szelők tétele, csak racionális arányokkal bizonyítva.....	68
4)	(A párhuzamos szelők tételének megfordítása)	69
5)	A Párhuzamos szelőszakaszok tétele.....	69
II.	Példák.....	69
1)	Alap	69
2)	Párhuzamos szelők, szelőszakaszok tételének alkalmazása	71
3)	„Számítható” szakaszok szerkesztése.....	73
III.	A szögfelező és egyéb feladatok	73
1)	A Szögfelező tétel	73
2)	Gyakorló példák.....	74

Hasonlóság.....	76
I. A középpontos hasonlósági trafó	76
1) Szemléltetés	76
2) Tulajdonságok.....	77
II. A hasonlósági transzformáció.....	78
1) Definíció, tulajdonságok	78
2) Hasonló alakzatok.....	79
III. Gyakorlás	82
1) Alap.....	82
2) Hasonlósággal (is) bizonyítható ismeretek.....	85
IV. Derékszögű háromszögek	87
1) Hasonló háromszögek a derékszögű háromszögnél	87
2) A magasságtétel	87
3) Befogó-tétel.....	89
4) Gyakorló példák.....	89
V. Pont körre vonatkozó hatványának bevezetése.....	92
1) Külső pontból körhöz húzott érintő- és szelőszakaszok tétele.....	92
2) Belső pont – Húrtétel	93
3) Példák	93
4) Tétel – háromszög szögfelezőjének hossza: $f_Y^2 = a \cdot b - c_1 \cdot c_2$	95
5) Pont körre vonatkozó hatványa, körhatvány	96
VI. Hasonló alakzatok területe, térfogata	96
1) Tételek	96
2) Bevezető példák	98
3) Alakzatok darabolása – és háromszög darabolás.....	100
4) Felület - térfogat.....	101
5) Gyakorlás	102

szmg.hu

A derékszögű háromszög oldalai

I. Ismétlés: háromszögek oldalai illetve az oldalak és a szögek közti kapcsolat

1) A háromszög-egyenlőtlenség

Írd le a háromszög-egyenlőtlenség alapeseteit. Tudd is fejből!

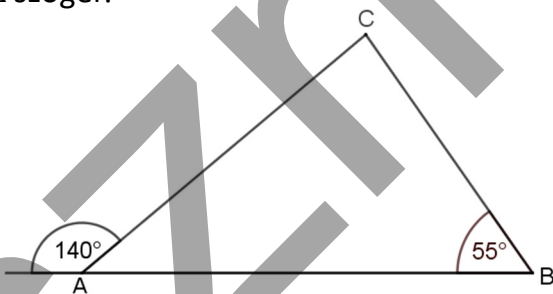
2) Háromszögek egybevágóságának 4 alapesete és az egyértelmű szerkeszthetőség

Írd le és tudd is a Δ -ek egybevágóságának, illetve egyértelmű szerkeszthetőségének alapeseteit!

3) Összefüggés a háromszög szögei és oldalai között

Egy háromszög két oldalának hossza 4,5 cm és 2,9 cm. Mely határok között változhat a harmadik oldal?

Egy háromszög egyik külső szöge $\alpha' = 140^\circ$, egy belső szöge pedig $\beta = 55^\circ$. Mekkora a Δ szögei?



Egy háromszög belső szögeinek aránya: 2:6:7. Mekkora a szögek?

Egy háromszögben az oldalak viszonya a következő: $a \leq b \leq c$. Az α , β , γ szögek vannak velük szemben. Megadunk két szög értékét. Hány fok a harmadik, és melyiknek mi a neve? a) 100° és 60° b) 70° és 120° c) 80° és 50° .

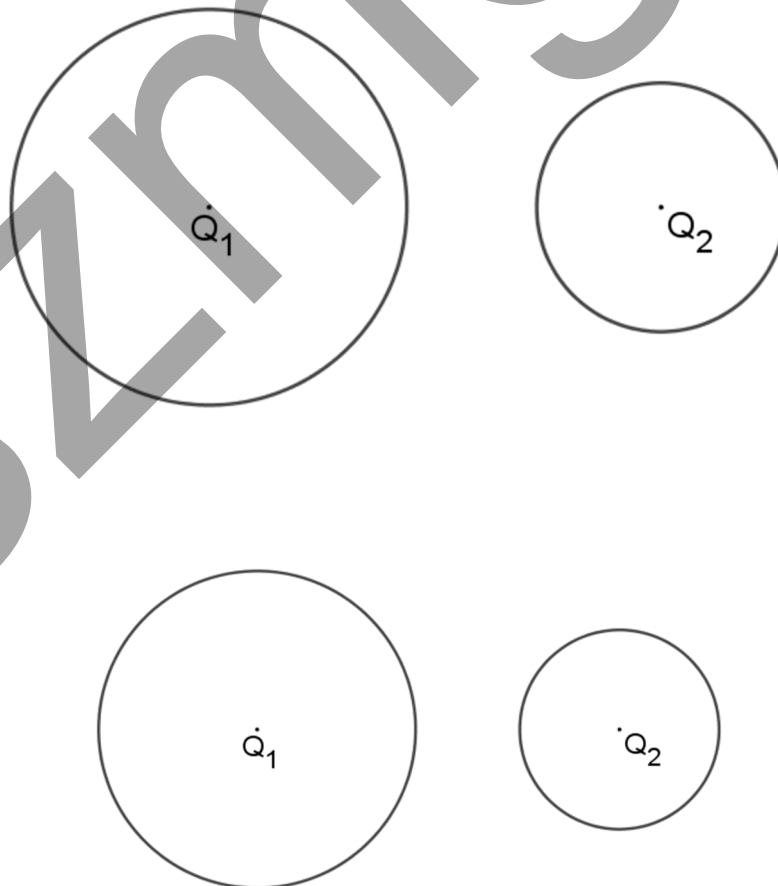
4) Tétel

Írd le a körhöz húzott érintőre vonatkozó tételt és tudd bebizonyítani.

5) Írd le a Thalész tételt! Írd le a bizonyítást nagy vonalakban, ahogy az órán vettük!

6) Két kör közös érintője

Szerkeszd meg az egyik közös külső érintőt, a másik ábra a közös belső érintőt!

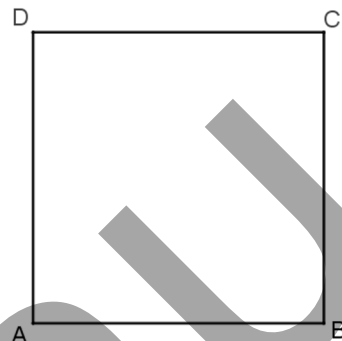
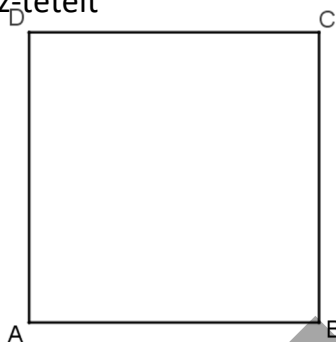
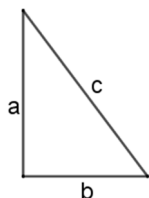


II. A Pitagorasz-tétel és megfordítása, illetve következményei

1) A Pitagorasz-tétel

a) Írd le a Pitagorasz-tételt

b) Bizonyítsd be a Pitagorasz-tételt



Bizonyítsd be, hogy egy egyenlőszárú háromszög egyik szárának és az alapjának összege nagyobb a háromszög területének felénél, de kisebb a terület háromnegyedénél!

c) Írd le azt a két tételt, amely egy háromszögben a hegyes- és a tompaszöggel szemközi oldalról szól

d) Derékszögű háromszögben – ahol a „c” az átfogó, mekkora a hiányzó oldal?

a = 12 cm, c = 13 cm

b = 6 cm, c = 10 cm

a = 9 cm és c = 15 cm

a=9 m c=41 m

Dönts el, hogy hegyesszögű, tompaszögű, vagy derékszögű a $\triangle$.

$$a=8; b=9; c=10$$

$$a=25; b=24; c=7$$

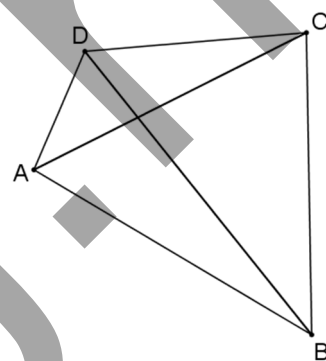
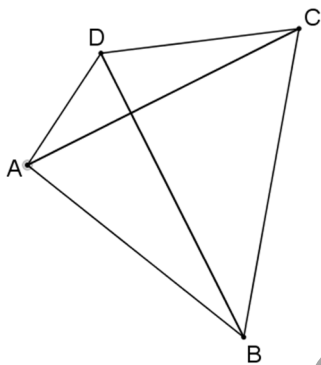
$$a=12; b=6; c=8$$

Mutasd meg, hogy egy négyszög átlói akkor és csak akkor merőlegesek egymásra, ha szemközti oldalak négyzetösszege egyenlő.

Útmutatás:

Először húzd meg a két átlót (úgy, hogy merőlegesek legyenek), majd mutasd meg, hogy így tényleg egyenlő a két négyzetösszeg.

Másodszor: húzd meg úgy a két átlót, hogy ne legyenek merőlegesek, majd hasonlítsd össze annak a kettő oldalnak a négyzetösszegét, amelyek az átlók metszéspontjából nézve hegyesszög alatt látszanak a másik két oldal négyzetösszegével...



Írd le fejből a tanult Pitagorasz-i számhármassokat, illetve melléjük a „kétszeresüket” is!

III. A Befogó-tétel és a magasságtétel, körhatvány bevezetése (szakköri anyag)

IV. A Pitagorasz-tétel alkalmazása

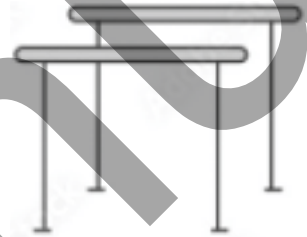
1) Gyakorlás

a) $f(x): [0;10] \rightarrow \mathbb{R}; y = -2x^2 + 4x + 12$. Add meg az eredeti ($y=x^2$ hozzárendelésű) fv. trafoját!

Oldd meg: $3x^2 - 2x - 3 = 0$ (Amit ki lehet, azt emeld ki a gyökjel alól!)

Egy Samsung TV képátlója 138 cm, a képernyő magassága 71 cm. Milyen széles?
Először írd le a számolás menetét, majd számológéppel számold ki a végeredményt!

- b) Egy felemás korlátnál az egyik rúd 150 cm magasan van, a másik 230 cm-en. A két párhuzamos rúd (amit fog a tornász) távolsága 120 cm. Milyen távol van egymástól a két egymással szemközti függőleges tartóoszlop?



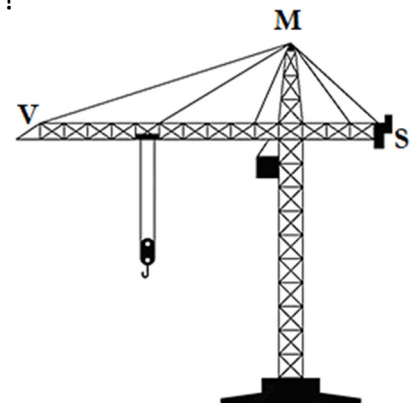
Dönts el, milyen a háromszög (hegyes, derék v. tompaszögű)!

$a=700\text{ cm}$ $b=2,5\text{ m}$ $c=24\text{ dm}$

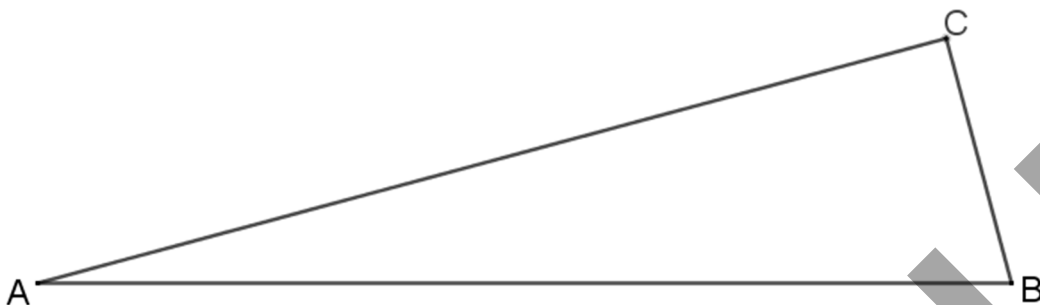
$a=160\text{ mm}$ $b=9\text{ cm}$ $c=1,2\text{ dm}$

$a=16\text{ m}$ $b=180\text{ dm}$ $c=12\,000\text{ mm}$

- c) Egy daru 40 m magas (a földtől M-ig). A darugém vége (V) a daru oszlopától 30 m-re van. Milyen magasan van a darugém, ha a VM drót 33 m hosszú? Mekkora az MS drót, ha az ellensúly az oszloptól 12 m-re van?



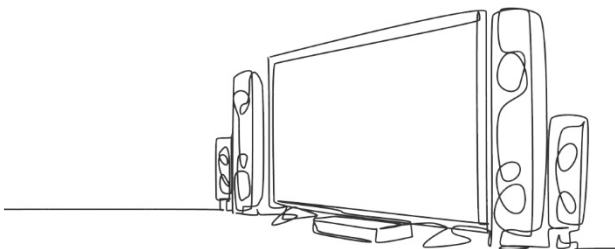
* Mutasd meg, hogy egy 15° -os derékszögű $\triangle$ -ben az átfogóhoz tartozó magasság negyede az átfogónak! (Segítség: érdeme nézni a Thalesz kört.)



- d) Egy 10 m hosszú kötélből egy olyan derékszögű $\triangle$ -et akarok készíteni, melynek egyik befogója kétszerese a másiknak. Mekkora lesznek az oldalak?

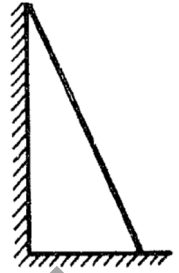
$\perp$ -ű $\triangle$: $a+c=5$ (befogó + az átfogó), illetve az „a” befogó fele a másik befogónak. Mekkora az oldalak?

Ha egy DELL monitor 16:10 arányú, és 24 colos (inch) az átmérője (1 inch = 2,54 cm), akkor mekkora a szélessége és a magassága?

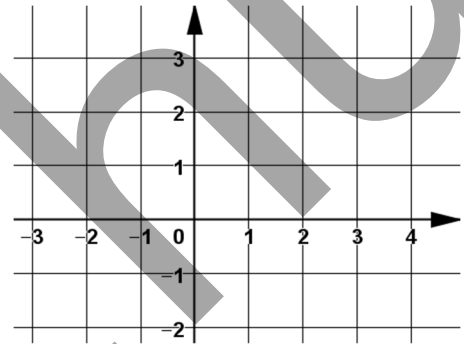


2) Alappéldák

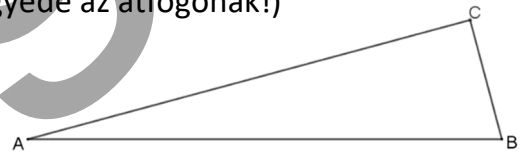
- a) Egy létrát támasztottunk a falhoz. A létra lába 2 m-re van a faltól. Milyen magas a fal, ha a 4,2 m hosszú létra épp a tetejéig ér?



Egy háromszög csúcsai a koordinátságokon a következők: $A(-3;-2)$ $B(4;0)$ $C(-1;3)$. Mekkora az oldalai? Mekkora a területe?



15°-os derékszögű $\triangle$ átfogóhoz tartozó magassága 1 cm. Mekkora a befogók? (Ne feledd: ennél a háromszögnél az m_c negyede az átfogónak!)



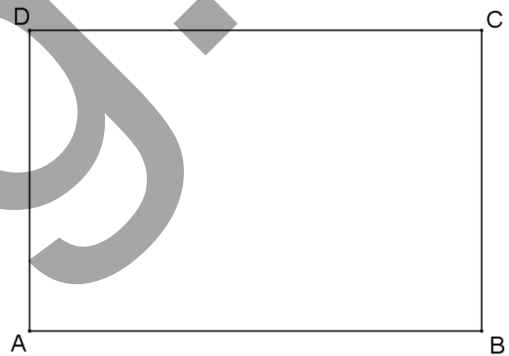
- b) Adott $\triangle$: $\alpha = \beta = 45^\circ$ $c = 5$ cm. $a = ?$

Add meg a gyököket, trafót, csúcspontot, állást, szélsőértékeket:

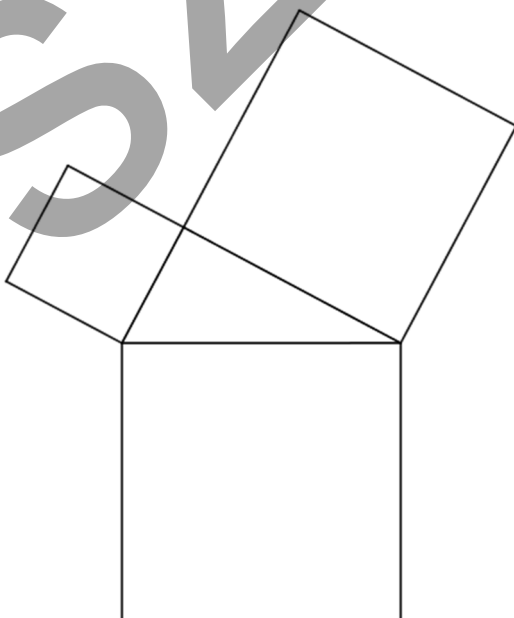
$$f(x): [-1;1] \rightarrow \mathbb{R}; y = -3x^2 + x + 1$$

Adott $\triangle$: $\alpha = 45^\circ$; $\gamma = 75^\circ$; $c = 10$. Mekkora a és b ?

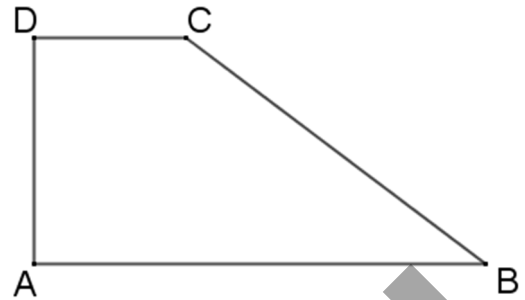
Egy ABCD téglalap oldalai $AB = 9$ $BC = 6$ cm. Mekkora távolságra van D-től az AB oldalnak az a P pontja, amelyre $AP + PC = 12$ cm?



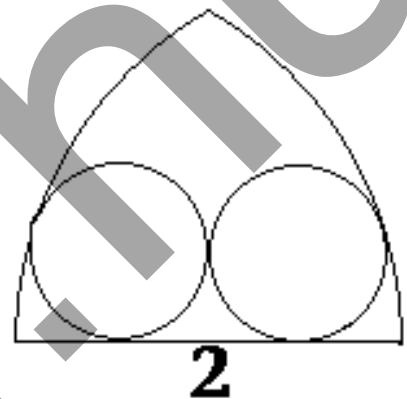
Egy derékszögű háromszög átfogója 17, az egyik befogója 15 egység hosszú. Mekkora az oldalakra emelt négyzetek 1-1 átlójának az összege?



- c) Mutassuk meg, hogy a derékszögű trapézban az átlók négyzeteinek különbsége megegyezik az alapok négyzeteinek különbségével!

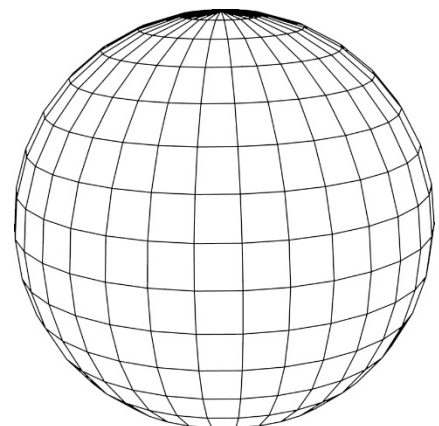


- d) Mekkora az ábrán látható rózsablak belső két körének a sugara, ha a nagy köröké 2 m.

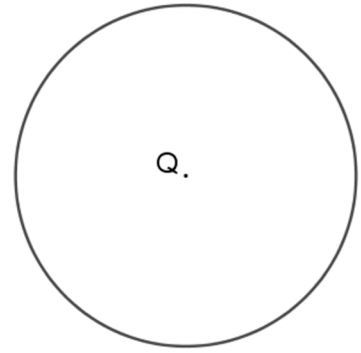


- e) Adott egy 5 cm sugarú kör. Milyen távol van a 7 cm-es húrja a középponttól?

A kis herceg bolygója 2 km sugarú gömb. a) Hány km-t gyalogol az egyenlítő mentén, ha az egyenlítő hosszának a negyedét teszi meg? b) A kiindulási és érkezési pont között milyen hosszú alagutat kellene létesíteni? c) A megtett út felénél van egy 100 m magas kilátó. Az érkezési pontból nézve lehet-e látni a kilátó tetejét?



f) Mekkora az r sugarú körbe írt négyzet oldala?

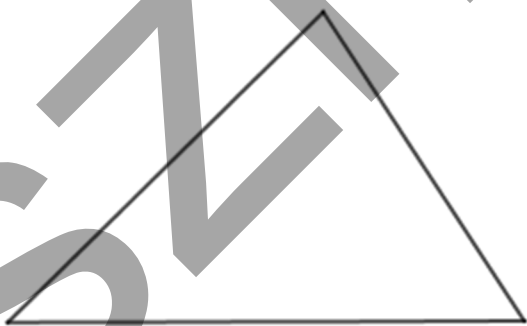


Mutasd meg, hogyha $a > 0$, akkor $a + \frac{1}{a} \geq 2$.

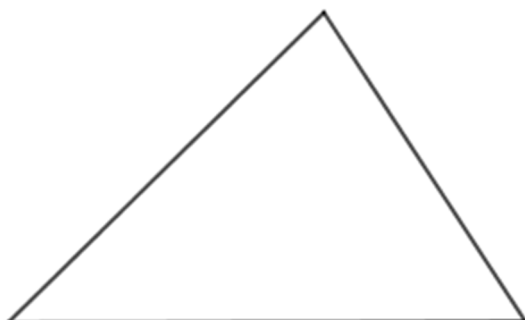
Egy szabályos háromszög oldala 4,5 m. Mekkora a magassága?

Egy félszabályos háromszög rövidebbik befogója 2,5 m. Mekkora a másik két oldal?

g) Adott egy háromszögből: $a=5$, $b=6$ $c=7$. Mekkora s_a ?



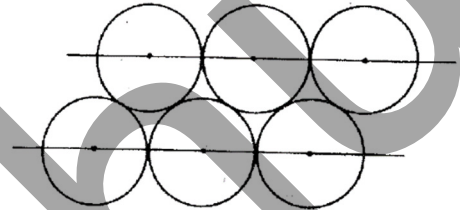
h) Adott $\triangle$: $a=5$; $b=6$; $c=7$. Mekkora m_c ?



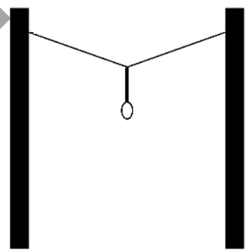
3) Egyéb gyakorló feladatok

- a) Derékszögű háromszög kerülete 10 egység. Az átfogó 3-szorosa az egyik befogónak. Mekkora az oldalak?

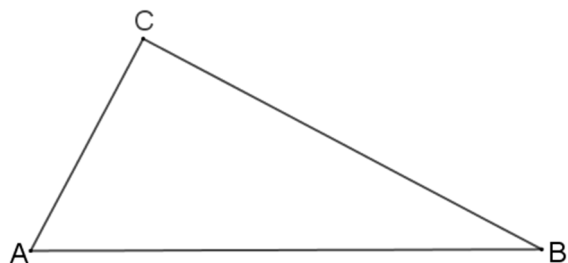
- b) Vaslemezről 14 mm sugarú körlelapokat kell kivágni az ábrán látható módon. Határozzuk meg a kivágandó körök középpontjait tartalmazó egyenesek távolságát!



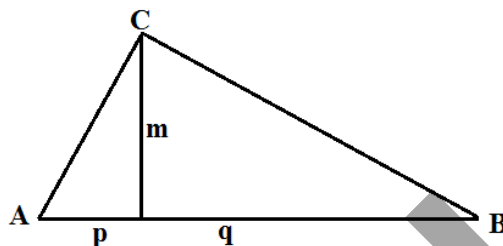
Egy 3 m széles sikátorban az egymással szemkösti házfalra egy 4 m hosszú kötel két végét egymással szemben 5-5 méter magasságban rögzítik és közepén lelógatnak egy 2 m hosszú dróton egy lámpát. Elfér-e alatta egy átlagos ember?



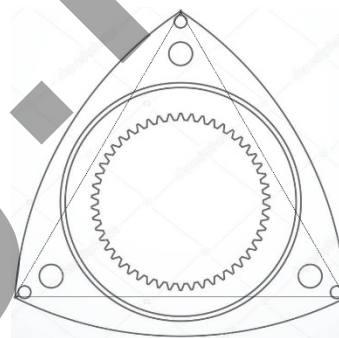
- c) Egy derékszögű $\triangle$ két befogója 8 és 15 cm. a) Mekkora a területe? b) Mekkora az átfogója? c) Mekkora az átfogóhoz tartozó magassága? d) Mekkora szakaszokra bontja az átfogóhoz tartozó magasság az átfogót?



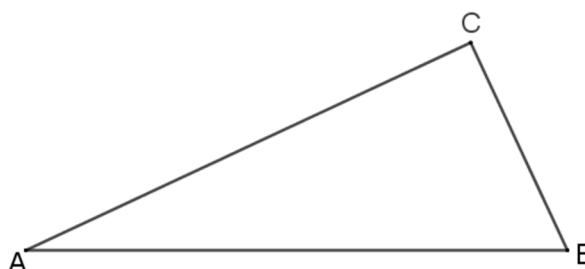
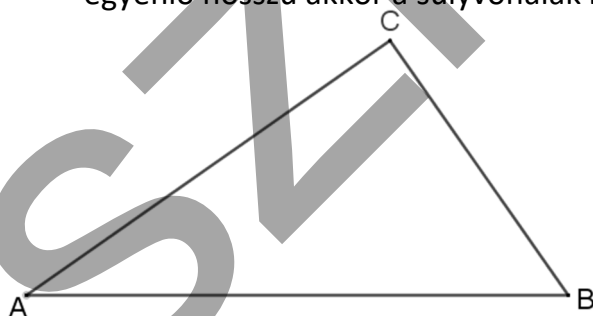
Lásd be általában, hogy derékszögű $\triangle$ -ben az átfogóhoz tartozó magasság mértani közepe annak a két szakasznak, amelyre a magasság osztja az átfogót, vagyis: $m = \sqrt{p \cdot q}$ ($\Leftrightarrow m^2 = p \cdot q$) (Segítség: $p; q; m$ -ből írd föl a nagyháromszögre a Pitagorasz-tételt!)



Egy Wankel motor forgó része egy olyan keresztmetszetű alakzat, mintha egy egyenlőoldalú $\triangle$ csúcaiból az oldal hosszára kinyitott körzövel köröznék háromszor, az ábra szerint. (Az alakzatot Reuleaux-háromszögnek hívjuk.) Mekkora ennek a területe, ha a háromszög oldala 4 cm?

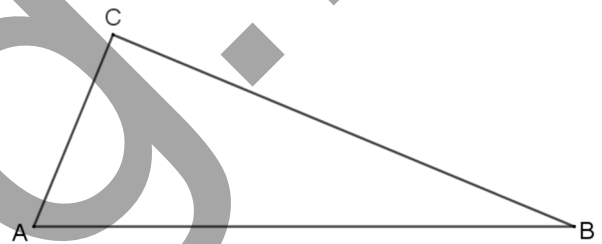


- d) Mutassuk meg, hogy ha két – nem egybevágó - derékszögű háromszög átfogója egyenlő hosszú akkor a súlyvonalak négyzetösszege egyenlő.



* Áll.: $ABC\Delta$: $s_a^2 + s_b^2 + s_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$ (Nézd meg, amit a paralelogrammánál tanultunk!)

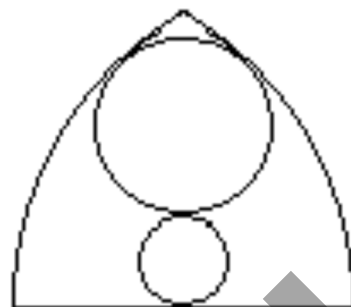
* Adott egy $67,5^\circ$ -os derékszögű Δ , melynek átfogója 10 cm. Mekkora a befogók?



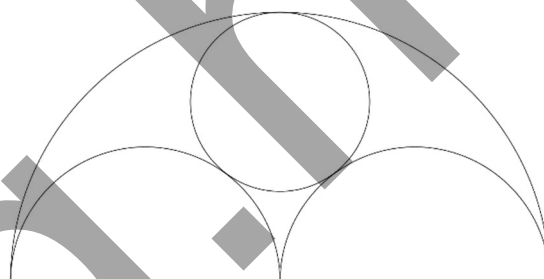
e) Egy 12 cm sugarú körhöz a középponttól 40 cm-re eső pontból milyen hosszú érintőszakasz húzható?

Adott egy $a=7$; $b=8$; $c=10$ Δ . a) Döntsd el, hogy milyen (hegyes-, derék-, vagy tompaszögű), b) Mekkora m_c .

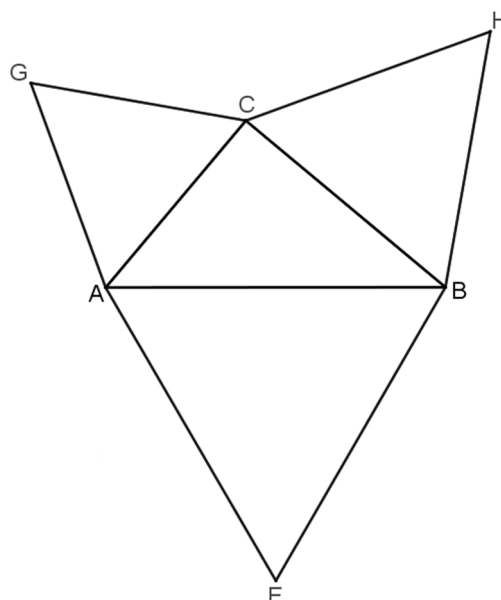
- f) Rózsablak: $R=4$ cm. A kisebbik beírt kör sugarának (r) kétszerese a nagyobbik beírt kör sugara. (Ami érintésnek látszik, az ábrán, az az is, a két kis kör centrálisa merőleges az alpra). Mekkora a kis kör sugara?



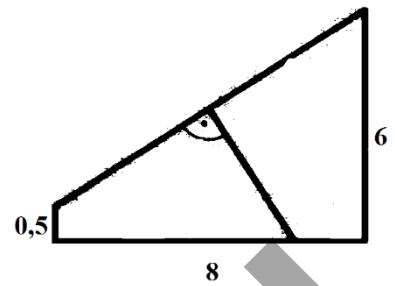
Rózsablak: A legnagyobb kör sugara: R (Ha akarod, mondjuk 8 cm.). Nyilván a két egyforma kisebb félkör sugara $R/2$. Mekkora a beírt legkisebb kör r sugara?



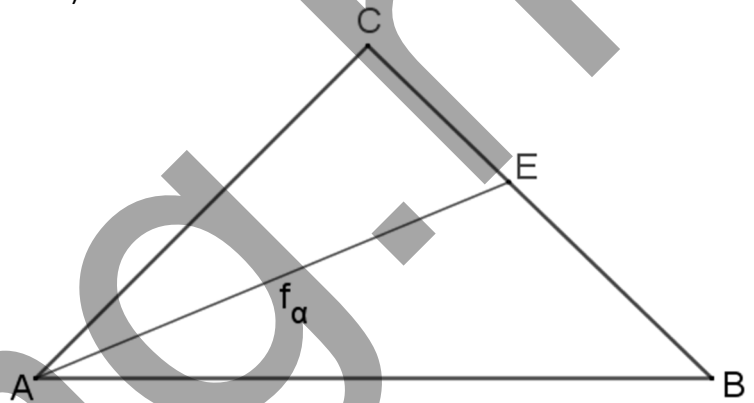
- g) Mutasd meg, hogy egy derékszögű $\triangle$ befogóira emelt egyenlőoldalú $\triangle$ -ek területének összege egyenlő az átfogóra emelt egyenlőoldalú $\triangle$ területével!



- h) Az ábrán látható tetőszerkezet (ún. süllyesztett fedélszék) 8 m hosszú gerendája 0,5-rel lentebb van, mint az eresz. A tetőszerkezet 6 m magas. A tető közepéből támasztófa (dúc) indul ki a tetőre merőlegesen. Milyen hosszú a támasztófa?

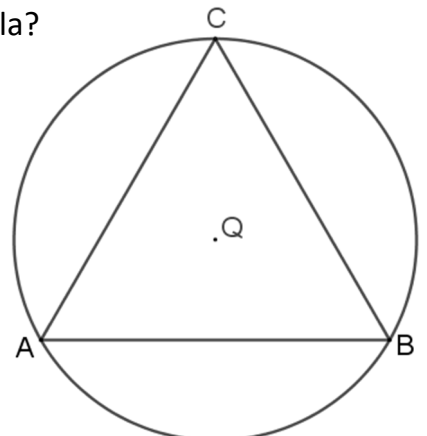


Milyen hosszú részekre osztja egy 10 cm átfogójú, egyenlőszárú derékszögű háromszög befogóját a szemközti szög szögfelezője?
(Elindulás: húzz E-ből merőleges c-re...)

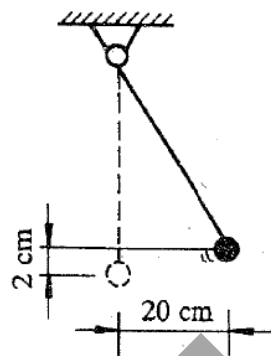


Milyen a következő Δ : $a=9, b=24, c=26$; illetve $a=16, b=30, c=34$ (hegyes, tompa, derék...)

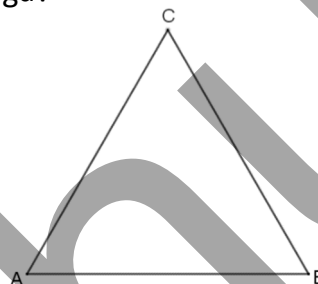
Szabályos Δ köré írt sugara: 3 cm. Mekkora az oldala?



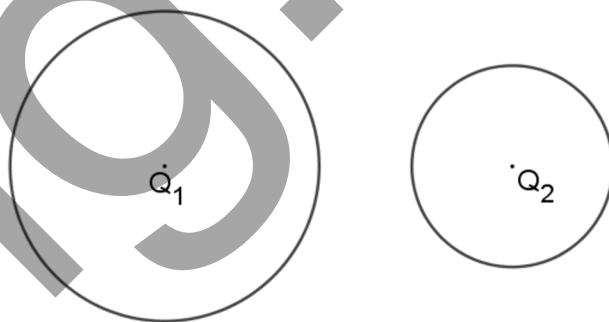
Mekkora annak az ingának a hossza, amely 20 cm-es kitérésnél 2 cm-t emelkedik?



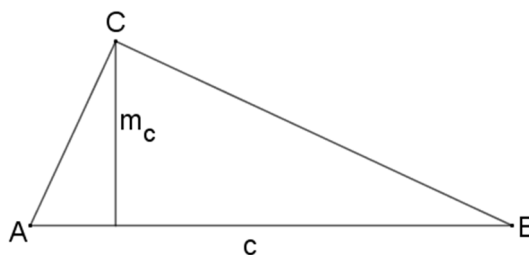
- i) Mekkora egy a oldalú szabályos háromszög magassága?
Ezt tudd fejből!!!



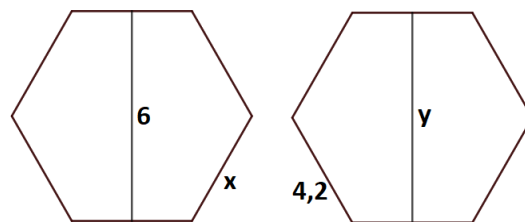
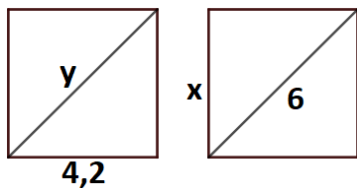
Egy 20 és egy 13 cm sugarú középpontjának távolsága 45 cm. Milyen hosszú a közös külső és belső érintőszakasz?



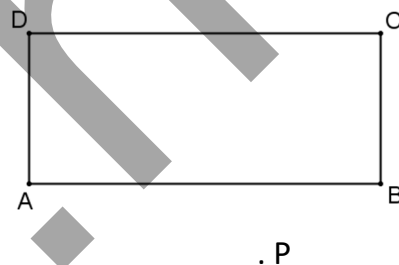
- j) Mutassuk meg, hogy ha a és b egy derékszög háromszög befogói, átfogója c , és az átfogóhoz tartozó magasság m , akkor az $a+b$, m és $c+m$ szakaszokból derékszögű háromszög szerkeszthető.



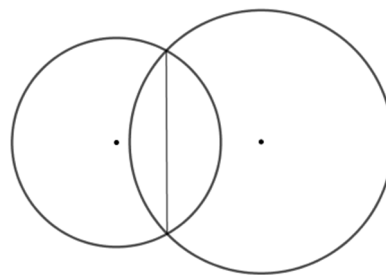
k) Két-két szabályos sokszöget látunk. Mekkora az ismeretlennel jelölt adatok?



l) A sík egy P pontjának egy téglalap négy egymás utáni csúcsától mért távolságai $a=PA$, $b=PB$, $c=PC$, $d=PD$. Mutassuk meg, hogy $a^2+c^2=b^2+d^2$.



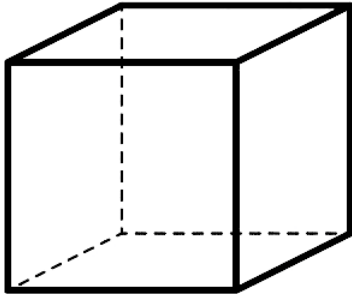
m) Két egymást metsző kör közös húrja 24 cm. Határozzuk meg a középpontok távolságát, ha a körök 13 és 15 cm sugarúak!



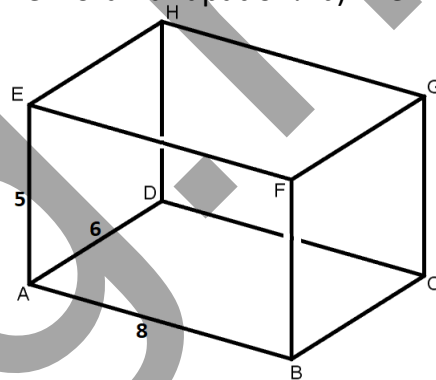
n) * Az ABC derékszögű $\triangle$ -ben a Q egy olyan belső pont, amelyre a QAB , QAC és QBC $\triangle$ -ek területe egyenlő. Bizonyítsd be, hogy $QA^2+QB^2=5 \cdot QC^2$.

4) Egy kis térgeometria

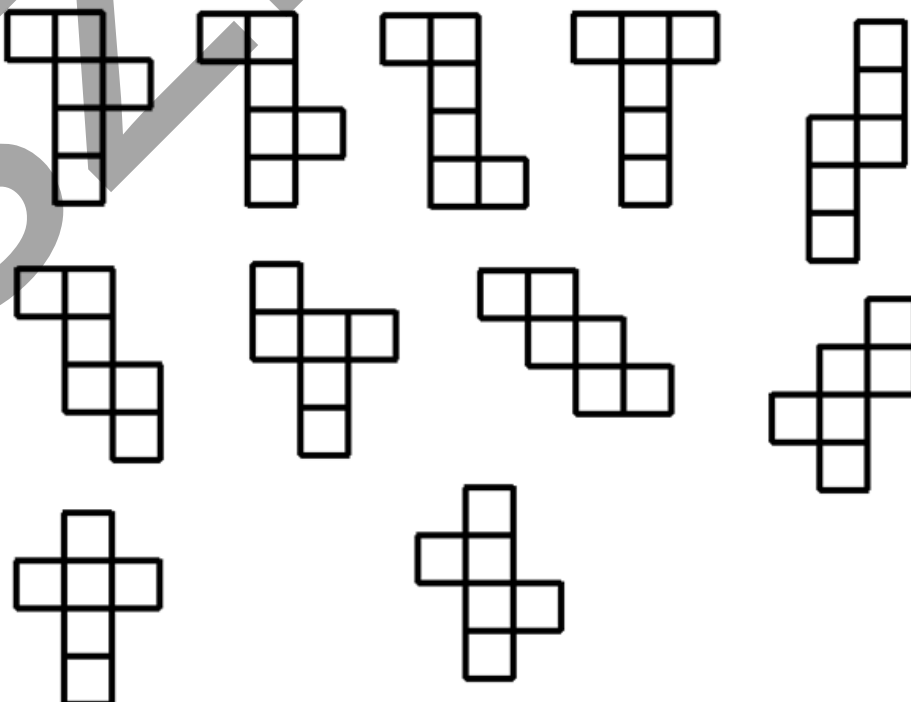
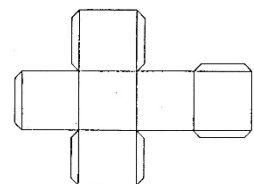
- a) Egy a élhosszúságú kocka két élét 1-1 cm-rel növelem, a harmadik élét 1 cm-rel csökkentem. Így egy olyan téglatestet kapok, melynek a térfogata 5 cm^3 -rel nagyobb, mint az eredeti kockáé. Mekkora volt a kocka éle; lapátlója, testátlója?



- b) Egy téglatest élei: 5 cm, 6 cm és 8 cm. a) Mekkora a lapátlók? b) Mekkora a testátló?



Mindegyik hálót rajzban egészítsd ki fülekkel úgy, hogy kockát lehessen belőle ragasztani! (Nem kell ragasztani, de legyen úgy berajzolva a fül, hogy teljesen össze lehessen ragasztani!) Lásd jobbra!



Paralelogrammák - Háromszögek - Súlyvonal

I. A paralelogrammák ekvivalens definíciói

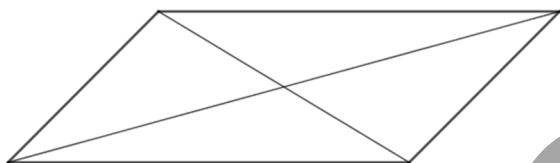
1) Az alapdefiníció és a vele ekvivalens definíciók

Írd le a paralelogrammák 7 ekvivalens definícióját fejből.

Szerkessz paralelogrammát, ha adott a, e, f (egy oldal és a két átló) (Mintha már kész lenne ábra, vakábra, elv)

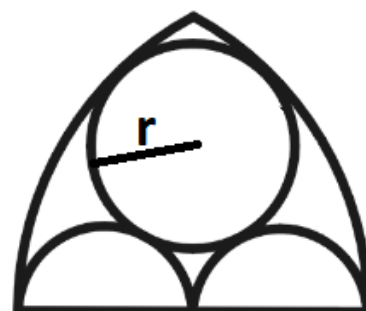
Mintha már...

Vakábra

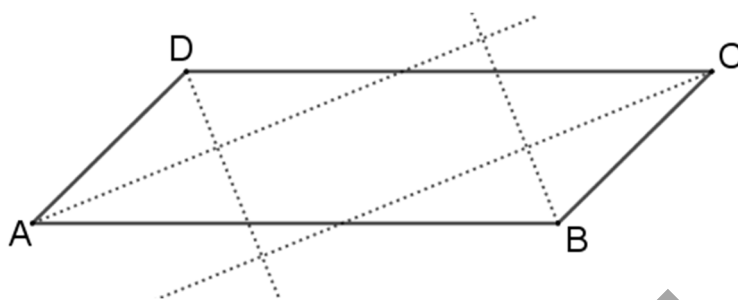


2) Hány fokosak a paralelogramma szögei, ha egyik belső szög a mellettinek háromnegyede?

A képen látható egy gótikus ablak sémája. Az alap $R=4$ m. Két félkörön nyugszik benne egy minden körívet érinti kör. Mekkora a r sugara?

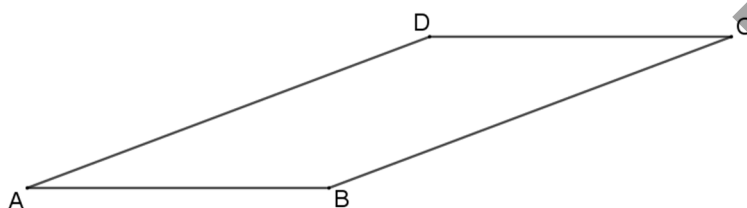


Mutasd meg, hogy egy nem rombusz paralelogramma belső szögfelezői egy téglalapot határoznak meg!

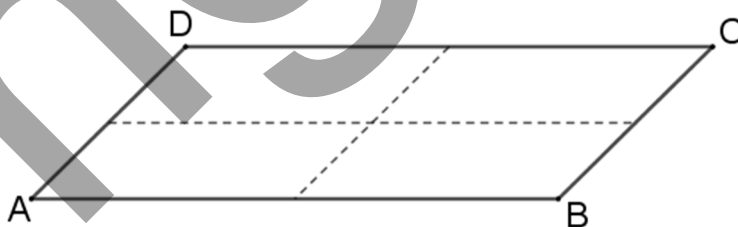


3) Paralelogramma – tételek és gyakorlások

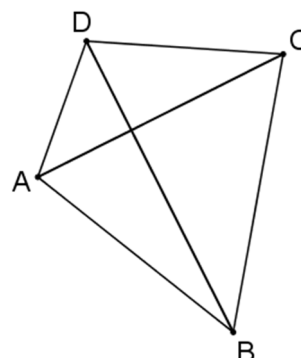
- a) Egy paralelogramma AD oldalán A -ból D -felé felmérjük annak $3/7$ -ét: P , illetve BC -n C -ből B -felé szintén a $3/7$ -ét: R . Mutasd meg, hogy az $ARCP$ paralelogramma! (Nyilván elég az egyik ekvivalens definíciót használni...)



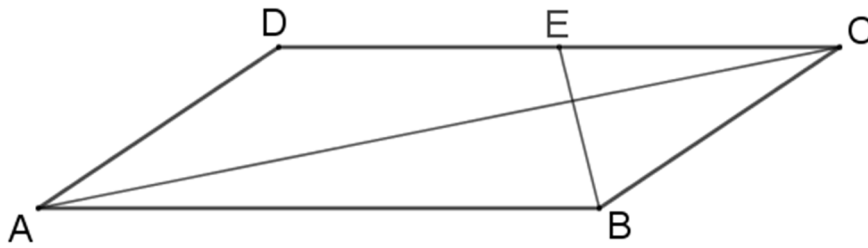
- b) Mutasd meg, hogy a paralelogramma középvonalai átmennek az átlók metszéspontján. (Négyszög középvonala: a szemkötti oldalfelező-pontokat összekötő szakasz. Nyilván kettő van belőle...)



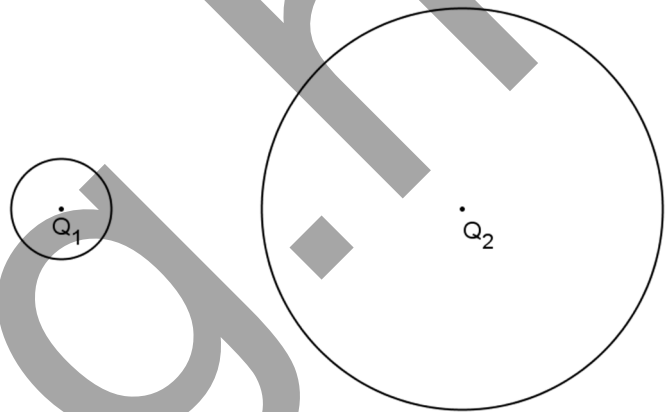
- c) Egy konvex négyszög átlói merőlegesek egymásra (egyáltalán nem biztos, hogy valamelyik felezné a másikat!). Az egyik $f=20$ a másik $e=14$ egység. Mekkora a területe számmal, illetve f és e -vel kifejezve?



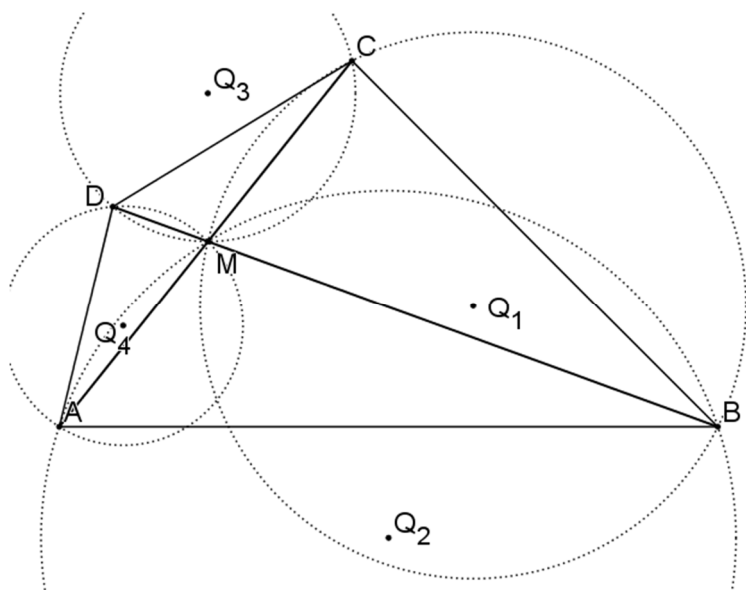
- d) Mutasd meg, hogy a paralelogramma AC átlója és a B csúcsot a DC felezőpontjával összekötő szakasz harmadolják egymást!
(Ötlet: húzd meg a keletkezett nagyobb háromszög megfelelő középvonalát!)



- e) Adott két kör: $K_1(Q_1; r_1=1)$ $K_2(Q_2; r_2=4)$ $d(Q_1; Q_2)=10$. Mekkora a közös belső és közös külső érintő szakasz?

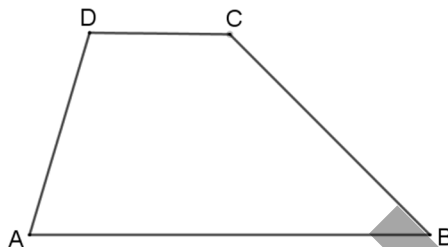


- f) A négyszöget átlói négy háromszögre bontják. Bizonyítsd be, hogy a háromszögek köré írt köröknek a középpontjai egy paralelogramma csúcsai!

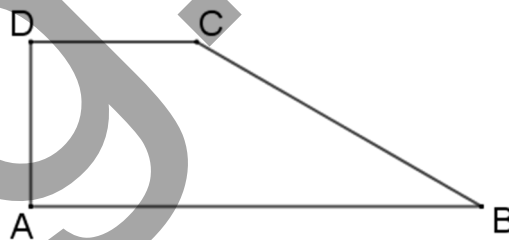


4) Trapéz

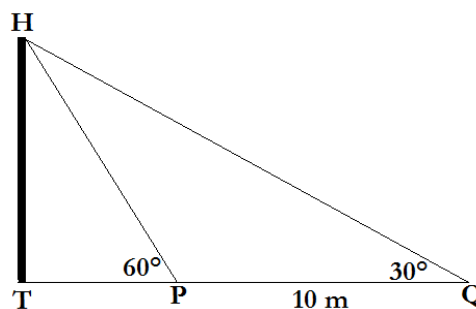
- a) * Állítás: ha egy trapézt a két átlójával 4 db. háromszögre bontok, akkor a szemkölti $\triangle$ -ek területének szorzata megegyezik.
(Ötlet: tükrözd az oldalakra az átlók metszéspontját!)



- b) Egy derékszögű trapéz két szára d és $2d$ hosszú, sőt, az egyik alapja is d hosszú.
Mekkora a másik alap?
(Ötlet: egy jó szakaszt húzz be!)

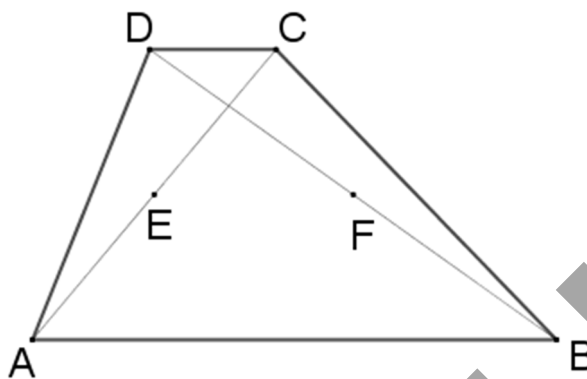


- c) Egy torony tetejét egy földre helyezett mérővel 60° emelkedési szögben látjuk. A toronytól „el” még 10 méterrel odébb ez a szög már csak 30° .
Mekkora a torony?

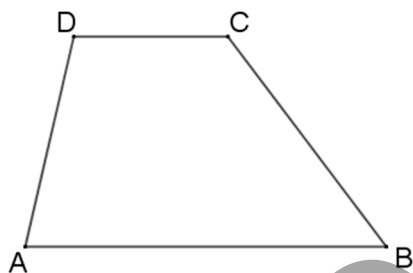


- Egy trapéz két alapja 5 és 13 egység. a) Meghúzzuk a középvonalat. Mekkora ez?
b) Ez a középvonal két trapézra vágta az eredetit. Mekkora azoknak a középvonala?

- d) * Mutasd meg, hogy a trapéz két átlójának felezőpontját összekötő szakasz párhuzamos az alapokkal. Mekkora ez, ha mondjuk az egyik alap 10, a másik 4 cm?



Szerkesztendő trapéz, ha adott: α , β ; k (=középvonal), és m (=magasság)



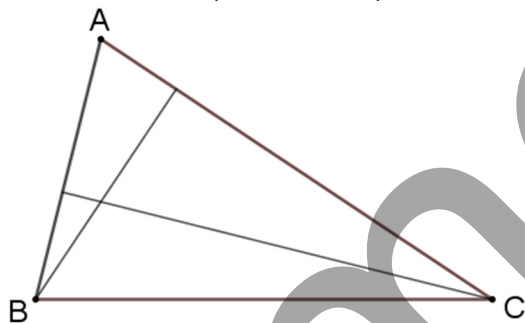
II. Ismétlés - Thalész tétel + a Δ nevezetes vonalai, pontjai, körei

1) Tételek ismétlése

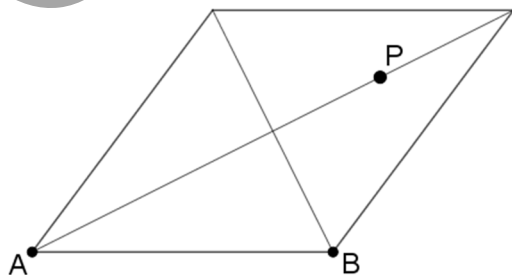
Adott két kör. $r_1=6$ cm $r_2=2$ cm. $d(Q_1;Q_2)=11$ cm. Mekkora a közös belső és a közös külső érintőszakasz?

A triangle with vertices labeled A, B, and C. Vertex A is at the bottom left, vertex B is at the bottom right, and vertex C is at the top. The triangle is formed by three black line segments connecting the vertices.

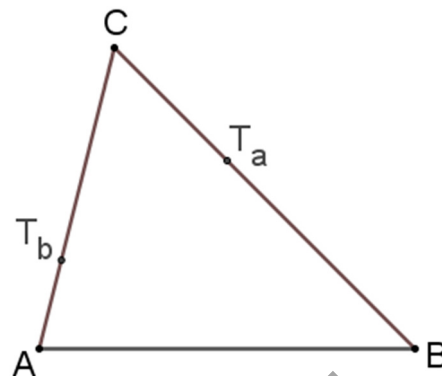
- c) Szerkessz $\triangle$ -et, ha adott a , m_c . és m_b .



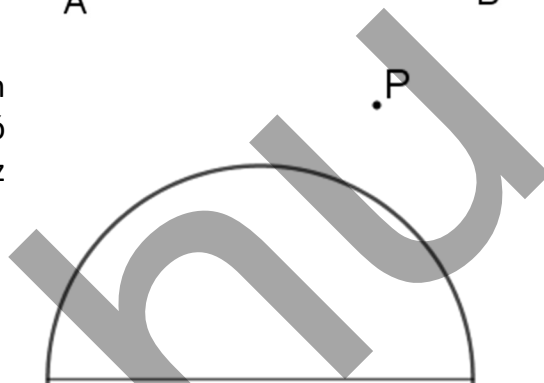
- e)
f)



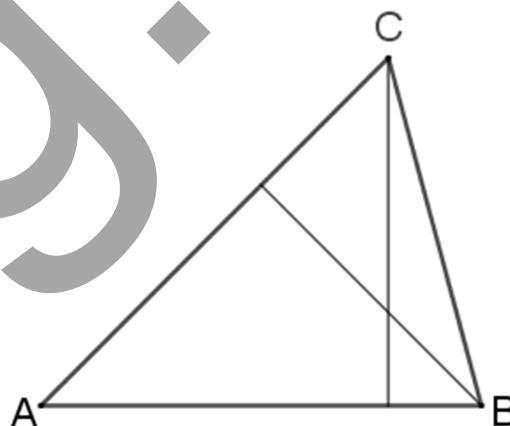
- g) Mutasd meg, hogy egy $\triangle$ -ben: C ; T_a (az m_a talppontja) T_b ; és M egy körön vannak.



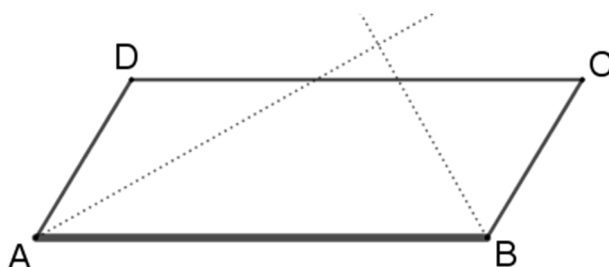
- h) Adott egy félkör az átmérőjével. Egy körön kívüli v. belüli pontból csak egyenes vonalzó használatával bocsássunk merőlegest az átmérő egyenesére.



- i) Egy háromszög két szöge szög $\alpha=45^\circ$, $\beta=75^\circ$. Mekkora szöget zár be egymással m_c és m_b ; illetve m_a és m_c ?



- j) * Egy paralelogramma alakú keret a csúcsai körül csuklósan mozog „nyeklik”. Rögzítsük az AB oldalt. Mit ír le mozgás közben a rögzített csúcsokhoz tartozó szögfelezők metszéspontja? (Szerkessz egy AB alapra néhány ilyen, és látni fogod!)

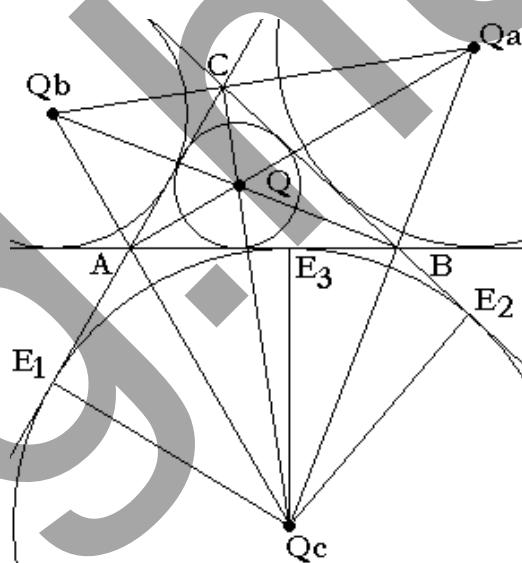


3) A $\triangle$ -be írt és a hozzáírt körök

a) Adott egy $\triangle$ beírt és egy hozzáírt köre. Kell a $\triangle$.

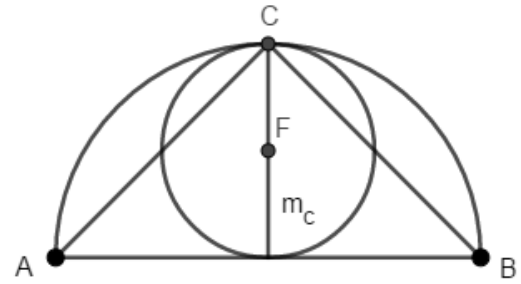
b)

c) Mutasd meg, hogy az $ACQ_{b\Delta}$ szögei ugyanakkorák, mint a $Q_bQ_cQ_{a\Delta}$ szögei!

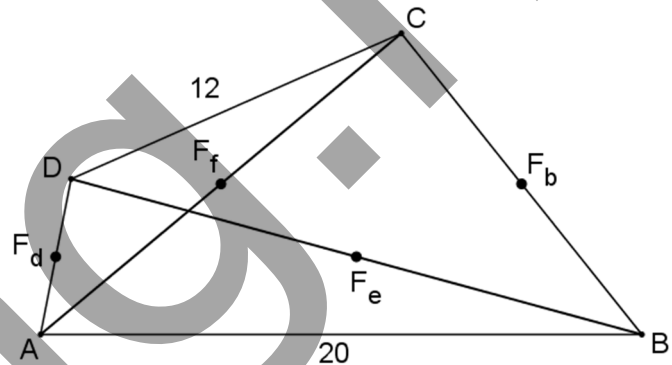


d) * Adott egy $\triangle$ három hozzáírt körének a középpontja. Szerkeszd meg a $\triangle$ -et! (Elv!)
(Ötlet: nézd meg a fenti ábrán, hogy $Q_aQ_bQ_c$ -nek mi je az AQ_a)

Adott egy ABC egyenlőszárú derékszögű háromszög. Az m_c -re mint átmérőre az ábrán látható módon kört emelek. Mekkora a körnek az ABC_Δ -ön kívül eső területe, ha $AB=10$ egység?



Egy konvex nem speciális négyszög két szemkötti oldala 12 és 20. a) Mutasd meg, hogy a másik két oldal két felezőpontja és az átlók felezőpontjai paralelogrammát alkotnak. b) Mekkora ennek a paralelogrammának a kerülete?

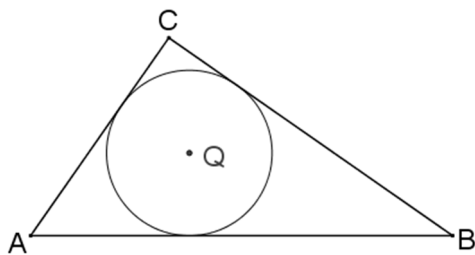


Δ -ben: $a=4$, $b=6$ és $s_c=5$. Mekkora a c oldal?

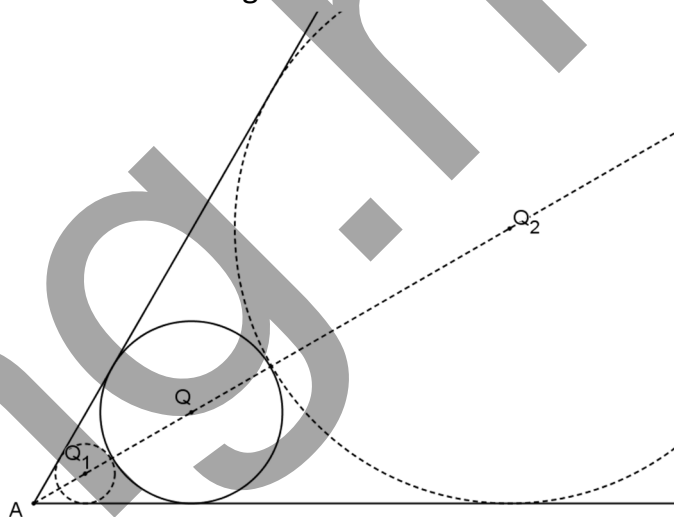
Szerkesztendő $\perp$ -ű Δ , ha adott: R_c (átfogóhoz írt kör sugara) és α .

Szerkesztendő $\perp$ -ű $\triangle$, ha adott: c ; p .

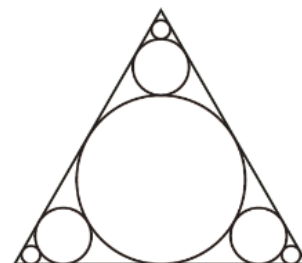
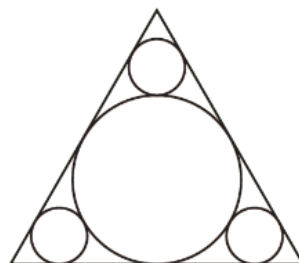
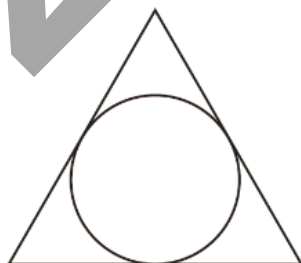
(Ötlet: derékszögű $\triangle$ -ben p és az oldalak közti összefüggés. Majd hajtogasd ki b-t)



- e) Egy 60° -os szög szárait érinti egy 4 cm sugarú kör. Mekkora annak a két körnek a sugara, amelyek érintik a szög szárait és a 4 cm sugarú kört is?



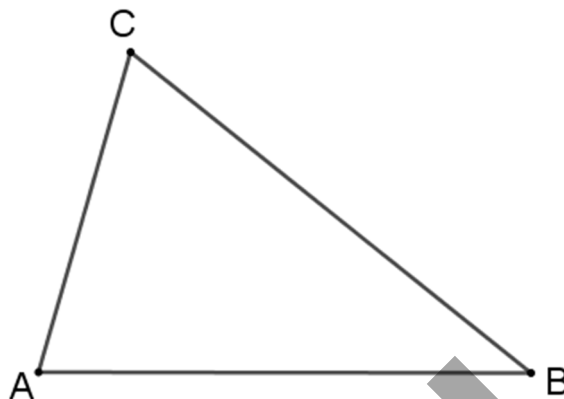
Az egyenlőoldalú háromszög oldala a . a) Mekkora az első ábrán a kör sugara? Nem köt.: b) Mekkora a második ábrán a kis körök sugara? * c) Mekkora a harmadik ábrán a legkisebb körök sugara?



III. A Δ súlyvonala és súlypontja

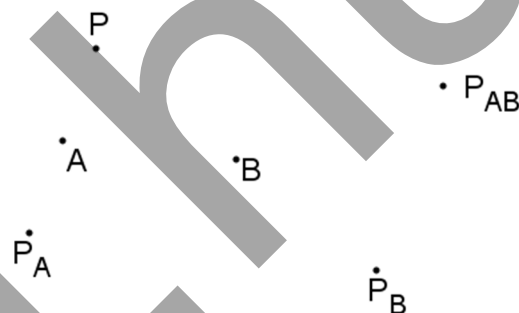
1) Bevezető

a) Szerkeszd meg a ΔS súlypontját!

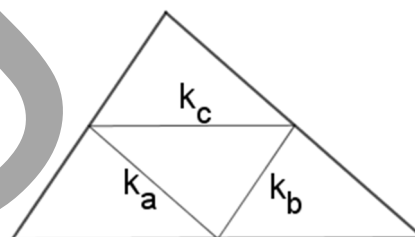


Nem köt.: Adott A és B pont. Tükrözzük a sík egy P pontját A-ra: P_A , majd ezt B-re: $B(A(P)) \equiv P_{AB}$. Ezután az eredeti P-pontot tükrözzük B-re: $P_B \equiv B(P)$, majd ezt A-ra: $A(B(P)) \equiv P_{BA}$. Milyen kapcsolat van P_{AB} és P_{BA} közt?

P_{BA} .

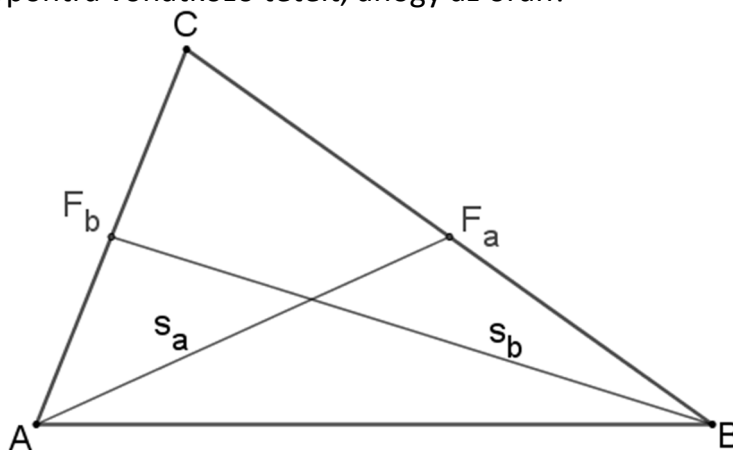


Egy háromszög oldalfelező pontjai által meghatározott Δ oldalai: 5;6;7. Mekkora az eredeti Δ oldalai?

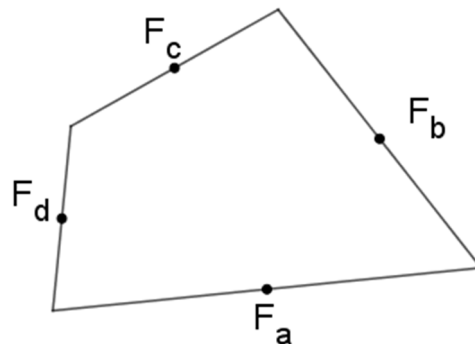


2) Tétel – súlyvonal, súlypont

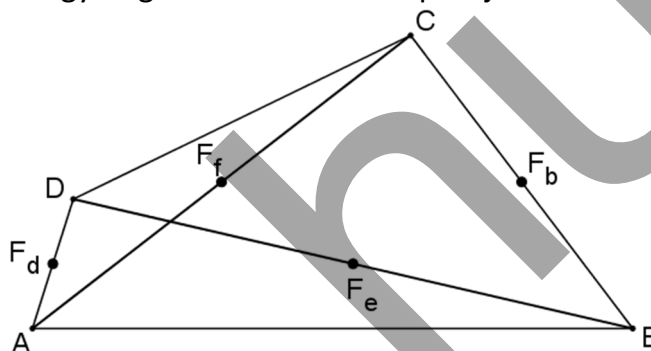
Bizonyítsd be a Súlyvonalra, súlypontra vonatkozó tételt, ahogy az órán!



Mutasd meg, hogy egy négyszög oldalfelező pontjai paralelogrammát alkotnak!

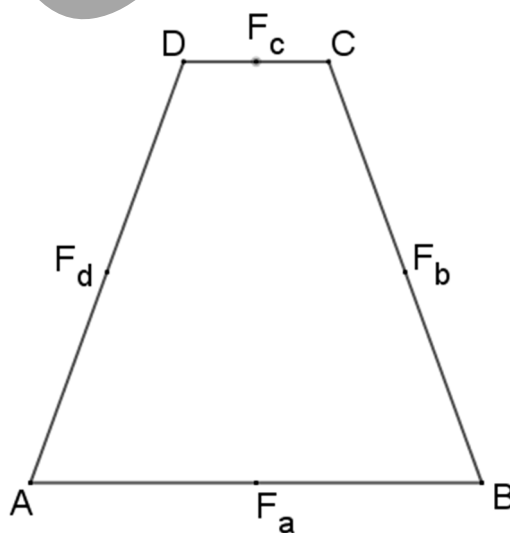


Mutasd meg, hogy egy nem trapéz négyszögben az átlók felezőpontja és F_b és F_d paralelogrammát alkot!



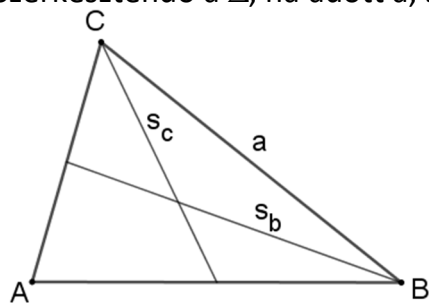
3) Alappéldák

- a) Kösd össze egy szimmetrikus trapéz oldalfelező pontjait. a) Milyen négyszöget kapunk? b) Milyen feltételek mellett lesz ez négyzet?

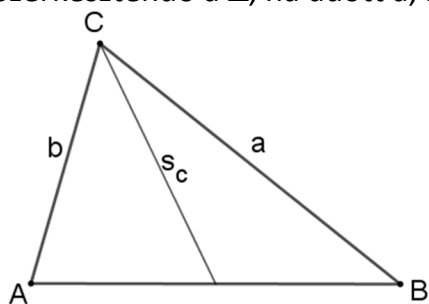


- b)
c) Mi a mértani helye egy pontot egy egyenes pontjaival összekötő szakaszok felezőpontjának?

d) Szerkesztendő a $\triangle$, ha adott a , s_b , s_c .

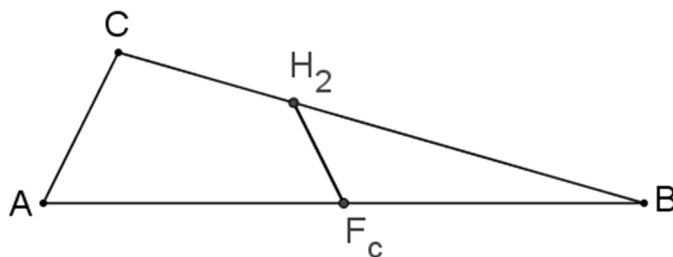


e) Szerkesztendő a $\triangle$, ha adott a , b , s_c .



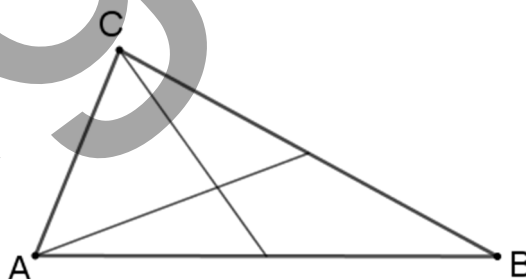
* Mutasd meg, hogy egy háromszög akkor és csak akkor derékszögű, ha $s_a^2 + s_b^2 = 5 \cdot s_c^2$ (Az elnevezések a szokásosak!)

- f) Egy háromszög F_c oldalfelező pontját az ábra szerint összekötjük a BC C-hez közelebbi harmadoló pontjával. Mekkora lesz az így keletkezett háromszög és négyszög területének aránya?

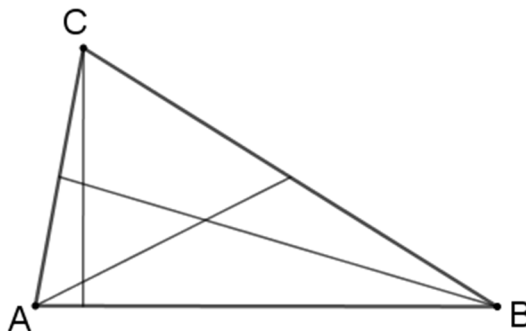


$\triangle$ -ből adott $b=6$, $m_c=4,8$ $s_c=5$. Mekkora c oldal?

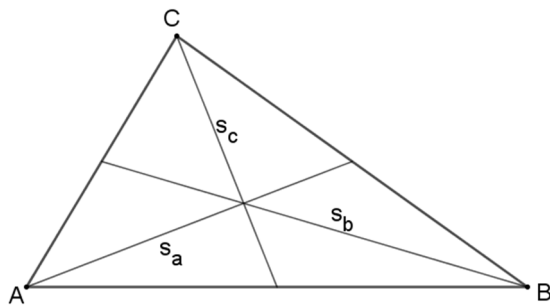
- g) Szerkessz $\triangle$ -et, ha adott: c , s_c és s_a .



- h) * Szerkessz $\triangle$ -et, ha adott s_a , s_b , m_c ;

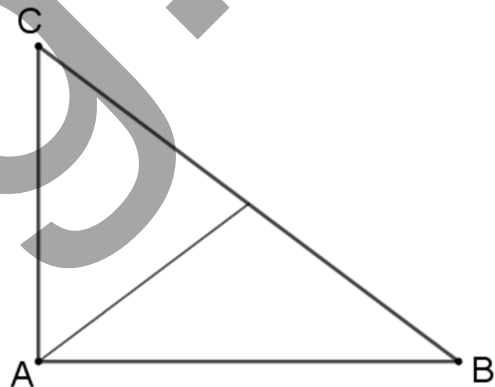


* Szerkessz háromszöget, ha ismert három súlyvonalának a hossza!



4) Egyéb példák

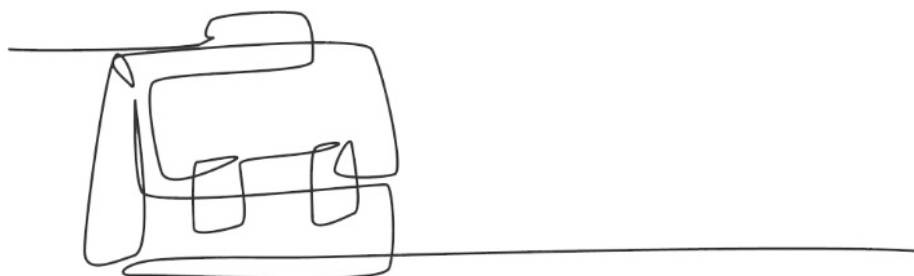
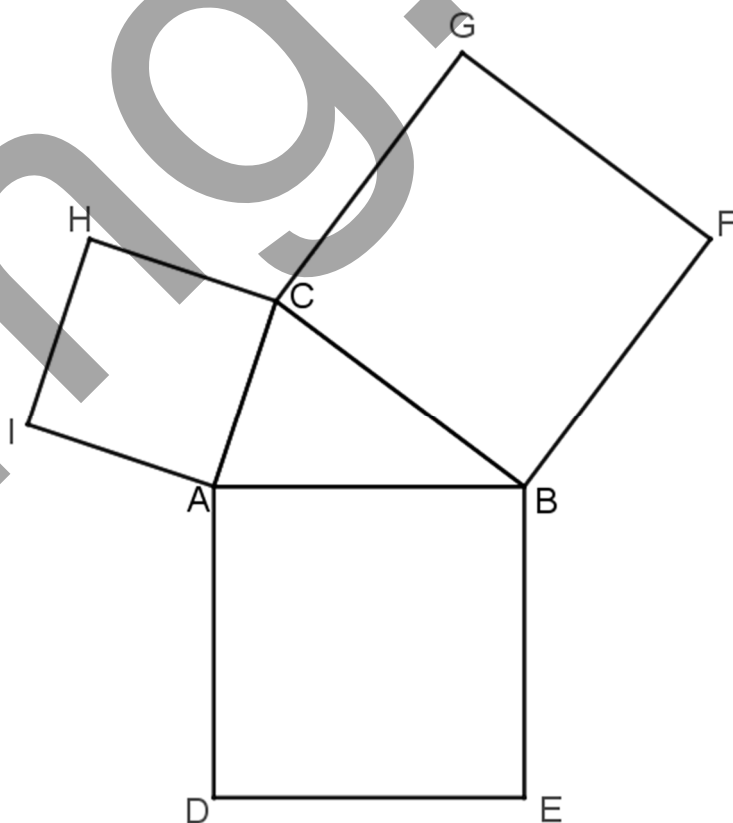
- a) Egy derékszögű háromszög egyik befogója 6 cm, átfogójához tartozó súlyvonala 5 cm. Határozzuk meg a háromszög területét, területét, másik két súlyvonalának hosszát, köré és beírható körének sugarát!



- b) Szerkessz $\triangle$ -et, ha adott c ; m_c ; s_a .

- c) Egy háromszög két oldalának hossza 3 cm és 8 cm. Az utóbbihoz tartozó súlyvonal 5 cm hosszú. Mekkora a háromszög területe?

- d) Egy háromszög oldalaira – kifelé – négyzeteket emeltünk. Bizonyítsd be, hogy a négyzeteknek a háromszög csúcsaitól különböző csúcsai olyan hatszöget alkotnak, amelynek minden második oldala a háromszög egy-egy súlyvonalának kétszerese!

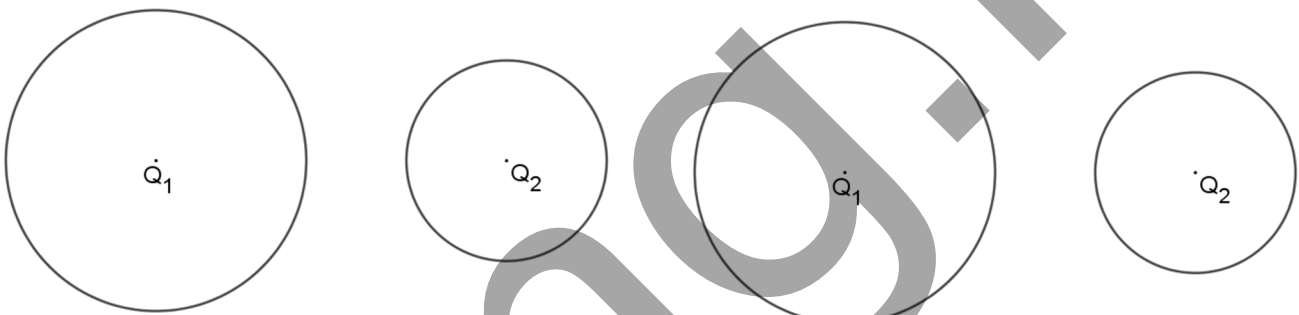


Kerületi szögek – Húrnégyszög - Érintőnégyyszög

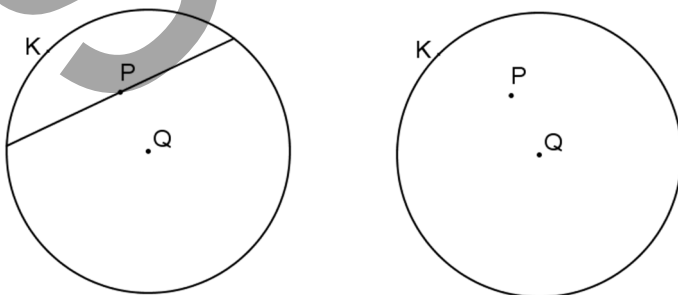
I. Ismétlés

- Adott két kör: $K(Q_1; r_1=3)$ $K(Q_2; r_2=13)$ $d(Q_1; Q_2)=20$. Számold ki a közös külső és közös belső érintőszakaszok hosszát!

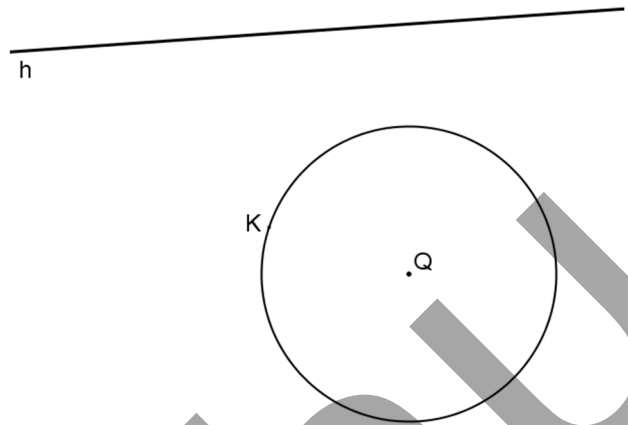
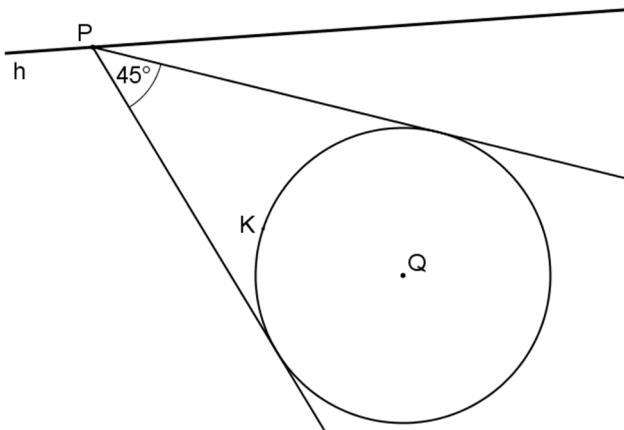
- * $K_1(Q_1; r_1=6)$ és $K_2(Q_2; r_2=4)$ $d(Q_1; Q_2)=14$. Adott $h_1=5$ és $h_2=2$. Szerkesztendő közös szelőegyenest, olyan, hogy a K_1 -be eső szakasza h_1 és a K_2 -be eső szakasza h_2 hosszú legyen.
* Számold ki, hogy milyen hosszú a szelőnek a h_1 és h_2 közé eső szakasza!



- Szerkesztendő egy $(Q; r)$ kör adott P belső pontján keresztül egy húr, melyet a P felez.

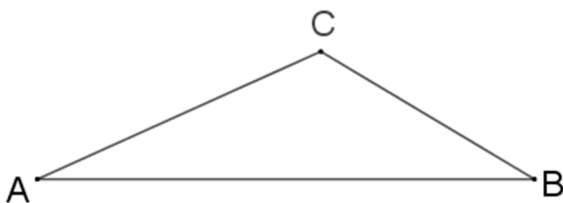


- Adott $(Q;r)$ kör és e egyenes. Kell $P \in e \rightarrow P$ -ből a kör 45° alatt látszódik.
(Mo.: pl. forgatással, vagy mértani hely: a keresett pontok egy adott körön vannak.. Vagy a $PEQ_\perp$ külön megszerkesztésével... (A kettő többé-kevésbé ugyanaz!))

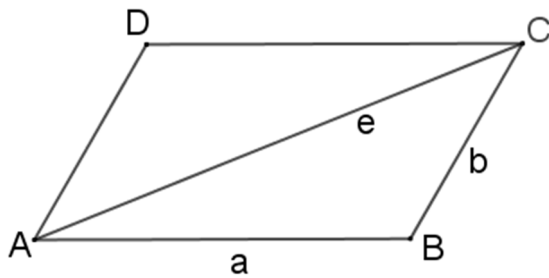


- Számold ki fokban tizedestörttekkel a következő szögeket, $36^\circ 30' 18''$ és $20^\circ 40' 36''$ illetve: számold át fokká, perccé stb. (tizedes tört!): $25,3^\circ$ és $45,7^\circ$.

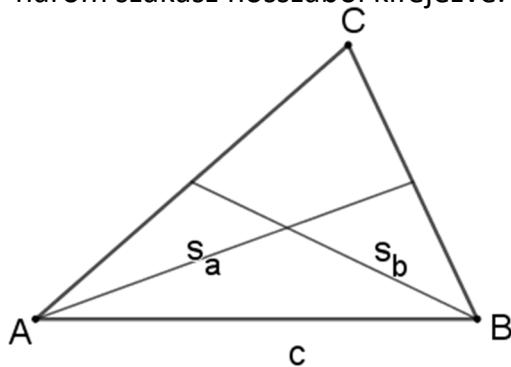
- Adott egy 4, 5 és 8 cm oldalú $\triangle$. Mekkora a legkisebb, illetve a legnagyobb oldalhoz tartozó magassága? (A Pitagorasz-tétel megfordításához használt állítással bizonyítsd, hogy tompaszögű a háromszög, majd a Pitagorasz-tétellel dolgozz!)



- Adott egy paralelogrammából: $a=5$, $b=3$, és az e átló 7 egység. Mekkora az e átló? (Lapozz vissza, és nézd meg a Pitagorasz-tételnél milyen tételt tanultunk a paralelogrammákkal kapcsolatban!)



- Egy $\triangle$ -ből adott: c , s_a , s_b . Szerkesztendő a $\triangle$. Számold ki, hogy mekkora s_c az adott három szakasz hosszából kifejezve.

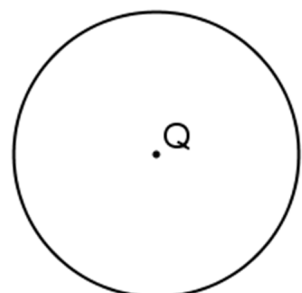
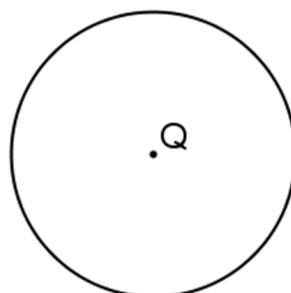
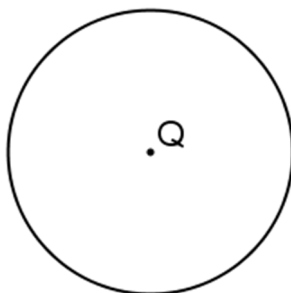
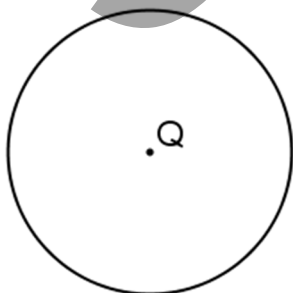


II. A középponti és kerületi szögek tétele

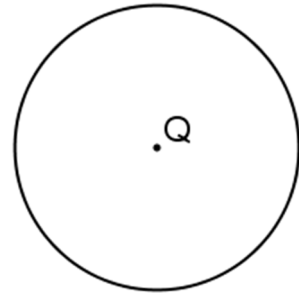
1) A kerületi szög

2) Középponti szög

A körökben szerkessz (elég szögmérővel) 1-1 db. 20° , 60° , és 150° -os kerületi és 1 db. 30° -os érintőszárú kerületi szöget - α . Rajzold be a középponti szöget is - β



Hány fokos kerületi, illetve középponti szög tartozik a körív $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{5}$; $0,3$ részéhez?



Milyen méretintervallumba eshet egy körben egy α kerületi szög?

3) A kerületi szög és középponti szög kapcsolata

Egy középponti szög és egy hozzátartozó kerületi szög összege 150° . Mekkora?

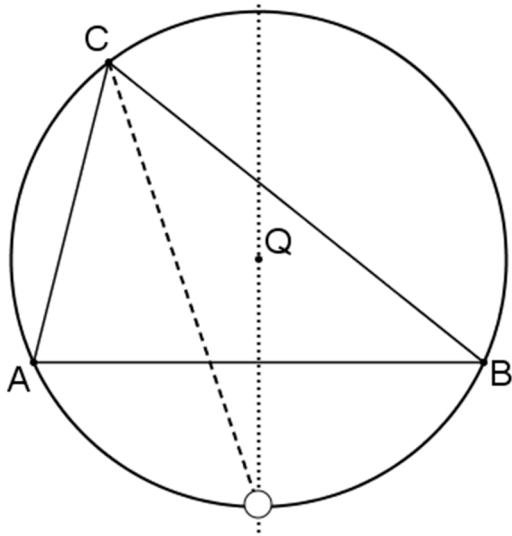
Egy középponti szög és egy hozzátartozó kerületi szög különbsége 40° . Mekkora?

Fokokban számolva egy kerületi szög és egy hozzá tartozó középponti szög szorzata 48 egységgel nagyobb, mint a középponti szög 10-szerese. Mekkora a kerületi és a középponti szög?

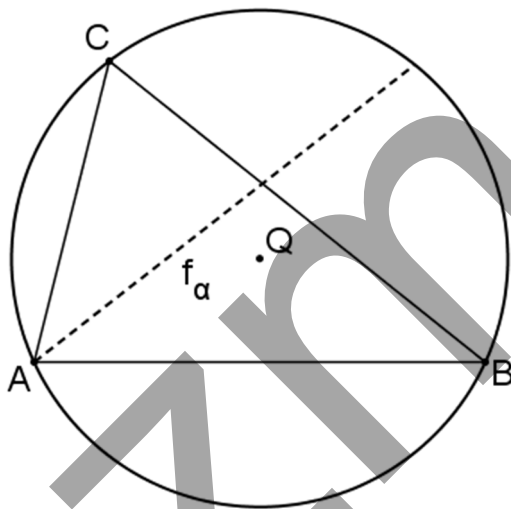
A kör egy rögzített körívéhez tartozó középponti szög 70° -kal nagyobb, mint a rajta nyugvó kerületi szög. Mekkora a kerületi szög?

4) A Kerületi szögek tétele

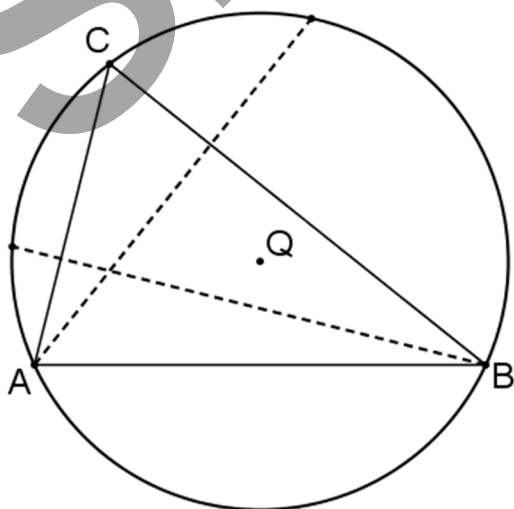
Bizonyítsd be: $\forall \triangle$ -ben egy szöghöz tartozó szögfelező és a szöggel szemközti oldal felezőmerőlegese a körülírt körön metszik egymást, vagyis f_γ és $f_c^\perp$ metszéspontja a körülírt körön van.



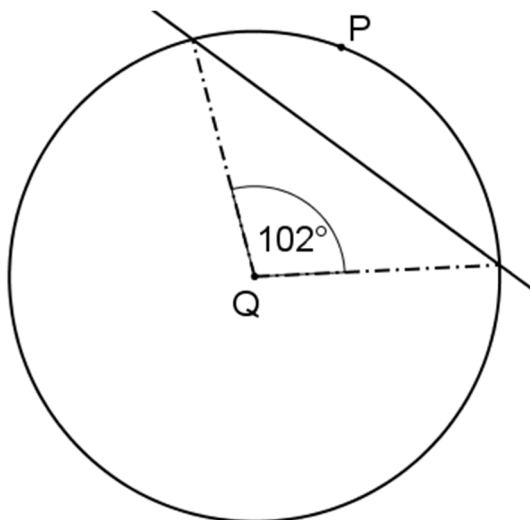
Mutasd meg, hogy háromszögben ha $P \in f_\alpha \cap$ Háromszög köré írt kör $\Leftrightarrow PB=PC$.



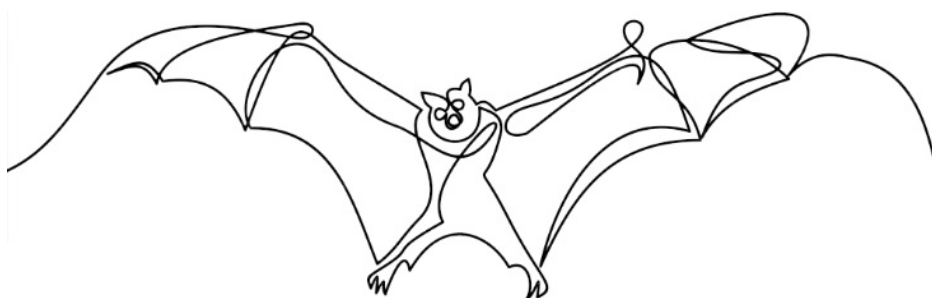
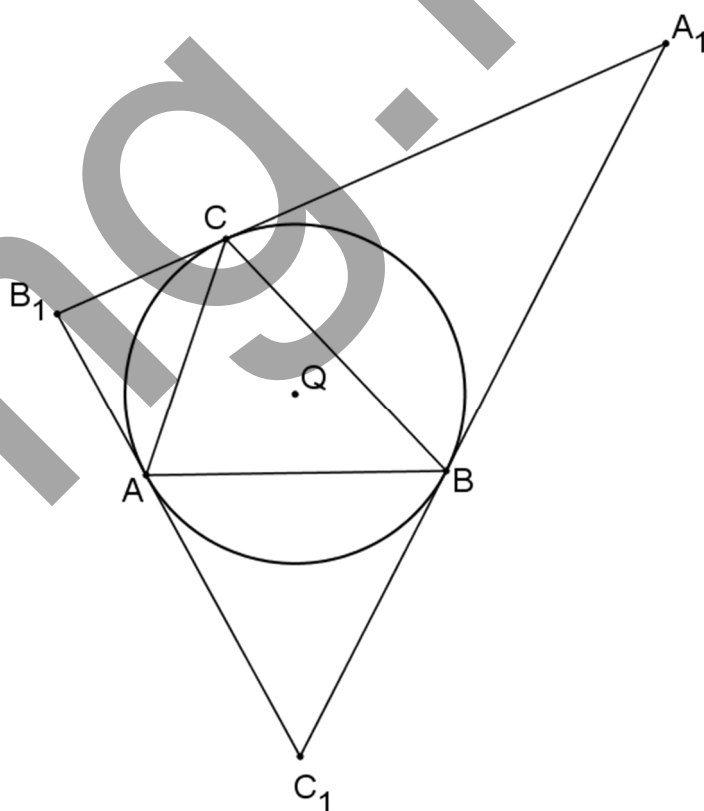
Mutasd meg, hogy egy háromszög két magasságvonala a köré írt kört a harmadik csúctól ugyanolyan távol metszi!



Egy körszelethez tartozó középponti szög 102° . Mekkora szögből látom az ív egy P pontjából a körszeletet határoló húst?

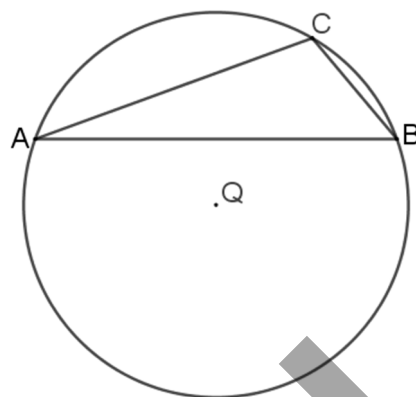


Húzzuk meg egy háromszögre írt kör csúsaiban a kör érintőit. Mekkora az általuk létrehozott Δ szögei az eredeti α, β , és γ -ból kifejezve?



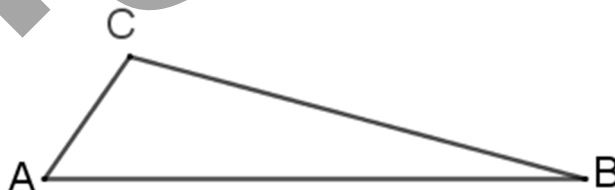
III. Tétel: A látószögekörívek tétele - mértani hely

- Mekkora középponti szög tartozik egy 20° , 50° , 110° -os $\triangle$ köré ért kör középpontjából a 3 csúcs által meghatározott ívekhez?

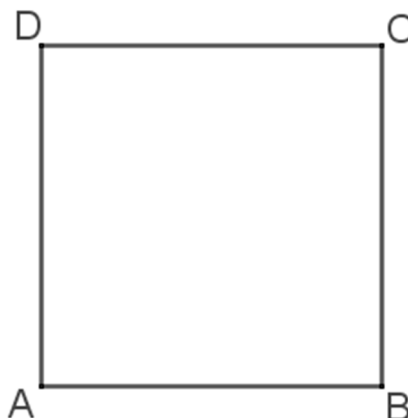


- Szerkessz egy-egy 5 cm-es szakaszra: egy 30° -os és egy 135° -os látóköríveket (elég szögmérővel).

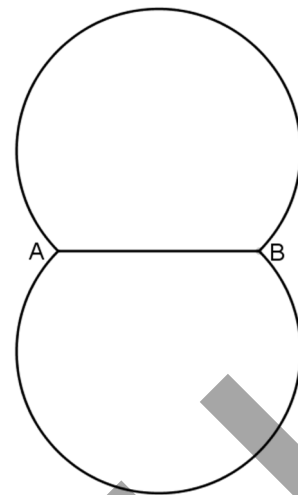
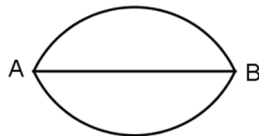
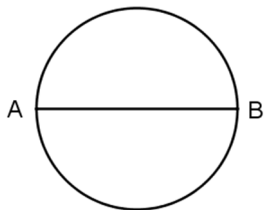
- Adott az $ABC_\triangle$. Szerkessz egy-egy 5 cm szakaszra egy α , és egy γ szögű látószögekörívet!



- Az ABCD négyzet belsejében szerkeszd meg az a P pontot, amelyből az AB oldal 120° , a BC oldal pedig 45° alatt látszik.



- Hány közös pontja lehet egy egyenesnek és egy adott szakasz α szögű látószögműködívének, ha a) α hegyesszög, b) α derékszög, c) α tompaszög? (Melyik ábra melyik?) Rajzolj!

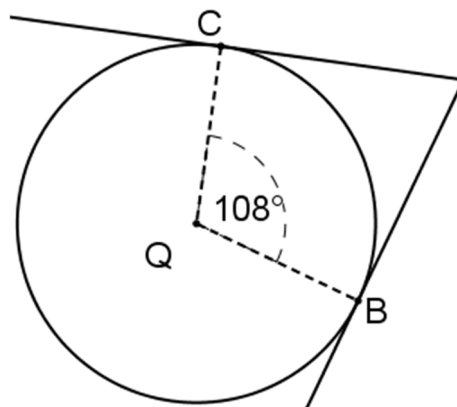


- * Adott egy konvex 20-szög ($A_1; A_2; \dots; A_{20}$) úgy, hogy egyik négy csúcs sincs egy körön. Mutasd meg, hogy a lehet olyan kört szerkeszteni, amely átmegy az A_1 és A_2 csúcson és még van rajta egy csúcs, a körön belül pedig pontosan 5 csúcs van, a többi 12 pedig a körön kívül. (Gondold át a III. pontban a tételt és a bizonyítását!).

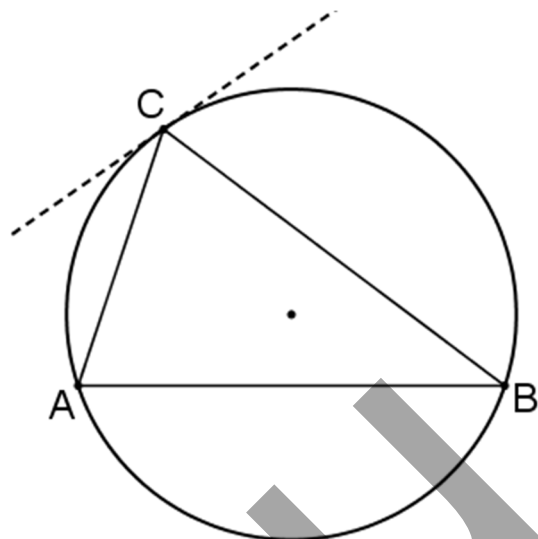
IV. Példák

1) Alappéldák

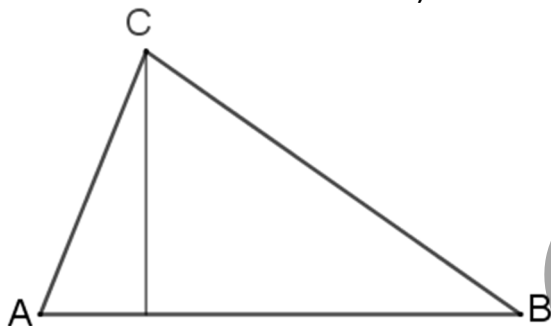
- Egy körhöz két pontjában érintőket húzunk. Mekkora szöget zár be ez a két érintő, ha az érintési pontokat összekötő húr a kör középpontjából a) 108° -os b) ε fokos szög alatt látszik?



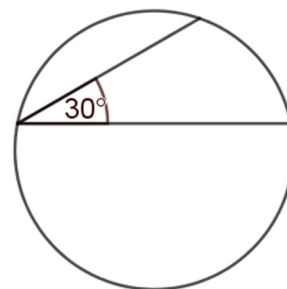
- b) Egy $\triangle$ két szöge: α és β . Mekkora szöget zár be a háromszög oldalaival a körülírt kör harmadik csúcsához tartozó érintője?



- c) Szerkeszd meg a háromszöget, ha adott c , γ és m_c . (A vakábrát a mintha már kész ábra adataiból vedd föl!)



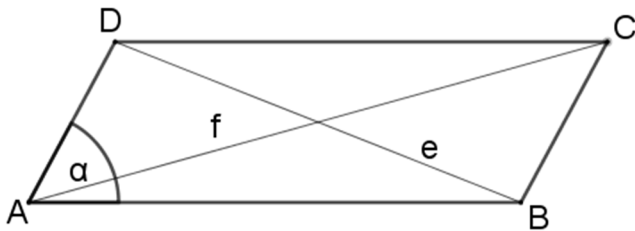
Egy R sugarú körben az ív egy adott pontjából kiinduló két húr 30° -ot zár be. Mekkora a két húr végpontját összekötő szakasz?



- d) Szerkesztendő hegyesszögű $\triangle$ -ben az a pont, melyből mindhárom oldal egyenlő szög alatt látszódik! (Rajzolj föl egyet, és rögtön kiderül...) (Elv.)

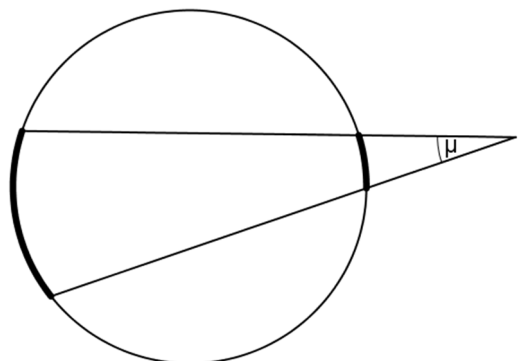
Szerkesztendő a $\triangle$, ha adott: α , a , $b+c$. (Elv, diszk.)

Szerkesztendő paralelogramma, ha adott α és a két átló: e, f .

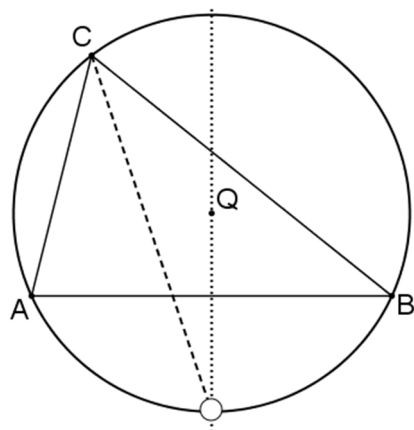


* Szerkessz paralelogrammát, ha adott egy oldala, egy szöge, és az átlók hajlásszöge! (Segítség: ha az AB adott, akkor érdemes B-re tükrözni A-t, és a C-t keresni!)

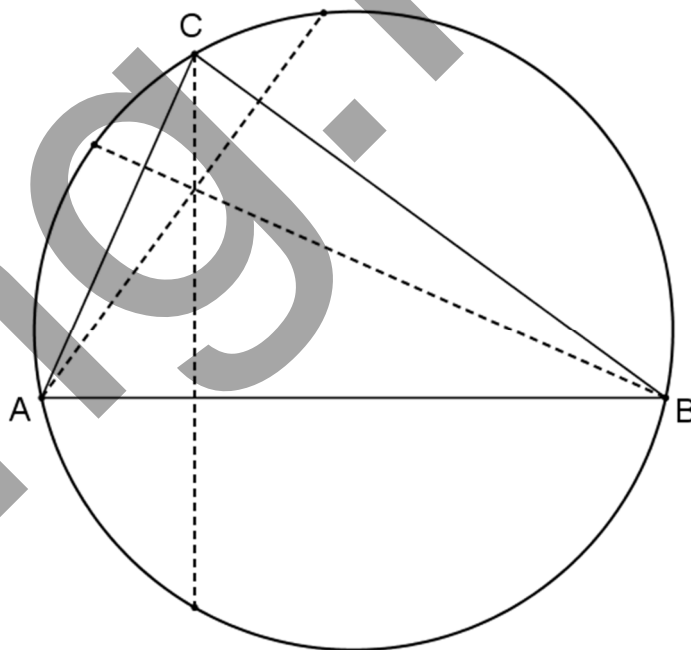
- e) A nagyobb vastag ívhez τ , a kisebbhez φ kerületi szög nyugszik. Mekkora μ ?



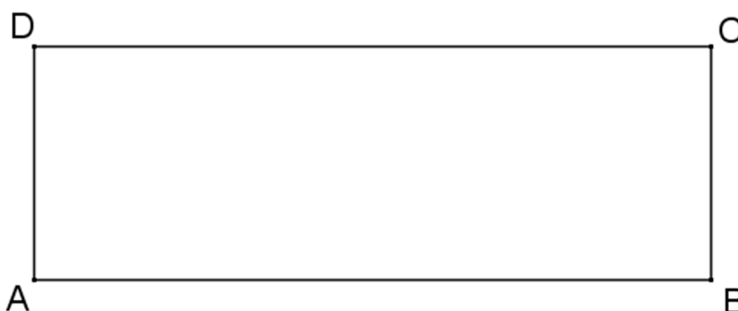
- f) Mutasd meg, hogy egy Δ egyenese és $f_c^\perp$ (c felezőmerőlegese) a Δ köré írt körön metszik egymást! (Ha már egyszer meg tudtad csinálni II/4-ben, most nem kell.)



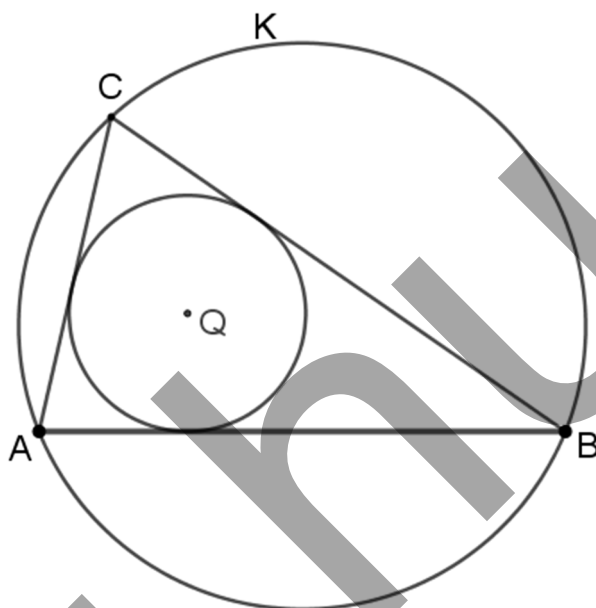
- g) Hosszabbítsuk meg egy Δ magasságvonalait a köré írt körig. Mutassuk meg, hogy a 3 metszéspont által meghatározott Δ szögfelezői épp az eredeti háromszög magasságvonalai!



- h) Adott egy $ABCD$ téglalap. Az AB oldalt a CD oldal mely pontjából látom a legnagyobb szög alatt? Miért?

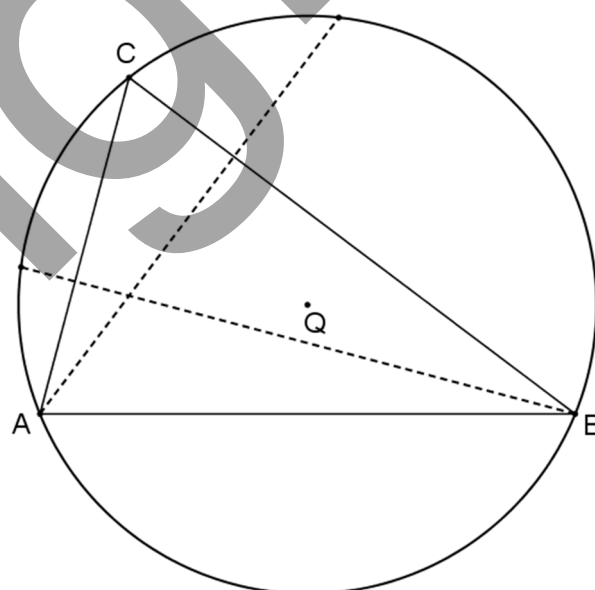


- i) * Rögzítsük egy háromszög kör írt K körét és A B csúcsait. Mit ír le a háromszögbe írt kör középpontja, ha a C befutja A -tól B -ig a kört? (Figyelem: nem elég megmutatni, hogy a körök középpontjai milyen, mely alakzaton vannak, hanem azt is, hogy ennek az alakzatnak minden pontja előáll a példában leírt módon! *Mértani hely.*) (Segítség: olyan körív, melynek húrja az AB)



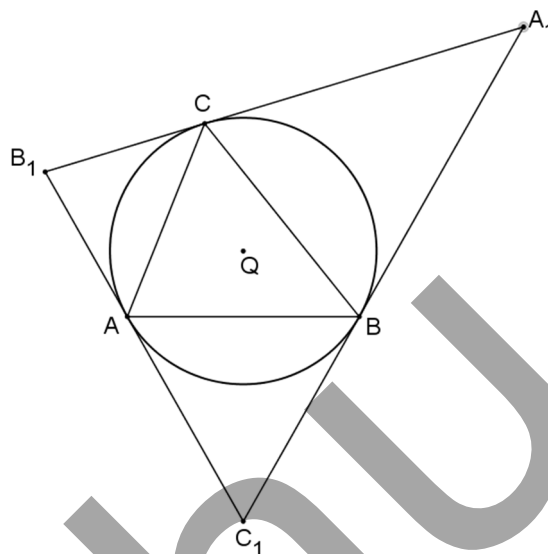
2) Gyakorló példák

- a) Hosszabbítsuk meg egy háromszög két magasságát (m_a , m_b) a köré írt körig, a metszéspontokat (A' és B') összekötő húrra állítsunk merőlegest a harmadik csúsból: e_c . Mutassuk meg, hogy e_c átmegy a $\triangle$ köré írt kör Q középpontján.

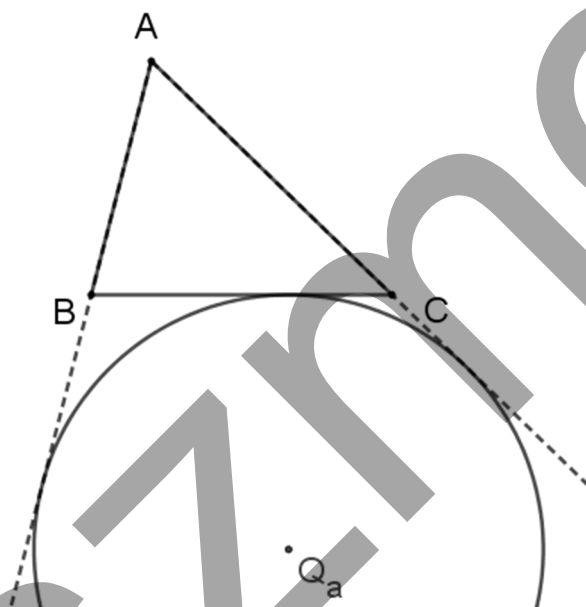


- b) Írjunk adott körbe háromszöget, ha ismert a háromszög két szöge!

- c) Az ABC_{Δ} három csúcsában szerkesszük meg a köré írt kör érintőit: e_A , e_B , e_C . Mekkora az így létrejött Δ szögei az eredeti háromszög szögeiből kifejezve?

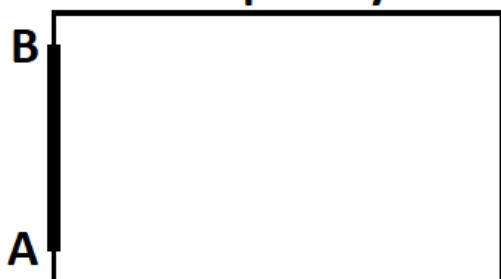


Rajzoljuk meg az ABC_{Δ} -höz A csúccsal szemközti hozzáírt körét. Mekkora az érintési pontok alkotta háromszög szögei (ha az eredeti Δ -é α , β , γ)? Ne feledd, hogy az érintő körök középpontja mindig a szögfelezőn van!



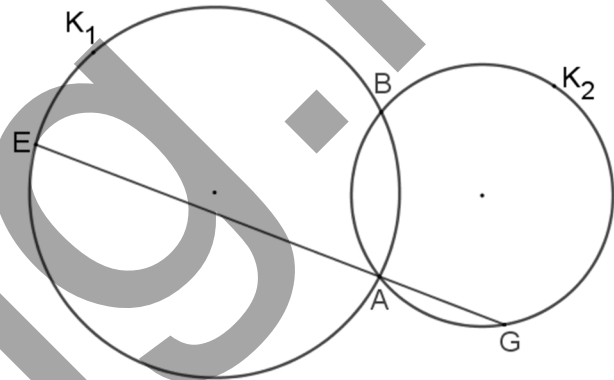
- d) Egy téglalap alakú színházteremben a színpad két széle az A és B pont. Az oldalpáholyok oldalának mely pontjából lehet a legnagyobb szögben látni a színpadot? Adj módszert a keresett pont megszerkesztésére!

oldalpáholyok

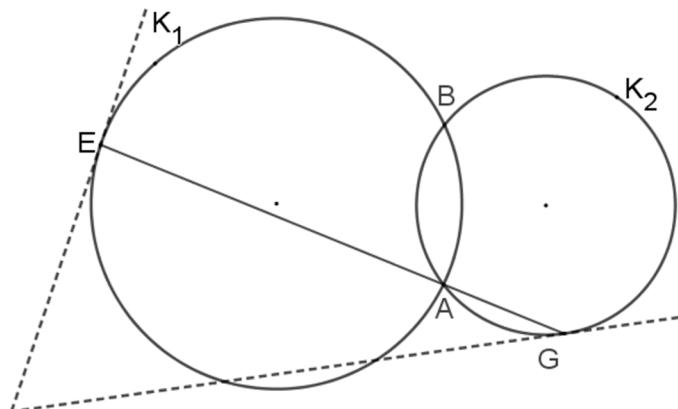


Egy galériában a 2 m széles festmény előtt, a fallal párhuzamosan, attól 2,4 m távolságra faltól-falig biztonsági kötelet feszítettek ki, hogy a látogatók ne menjenek túl közel a festményhez. a) Hány olyan pont van a kötélen, amelyből a festmény 45° -os szög alatt látszódik? b) 2,4 m helyett milyen távol legyen a kötélen, hogy csak egyetlen pontból lehessen 45° -ban látni a festményt. Mi a tulajdonsága ekkor ennek a pontnak?

- e) Két kör közös húrja AB. (Nem feltétlen azonos sugarúak!). Az A-n keresztül egyeneseket húzunk. Egy egyenes metszéspontja az egyik körrel E, a másikkal G. Mutasd meg, hogy a $\angle EBG$ nagysága független az egyenes állásától! Diszkussziók is!

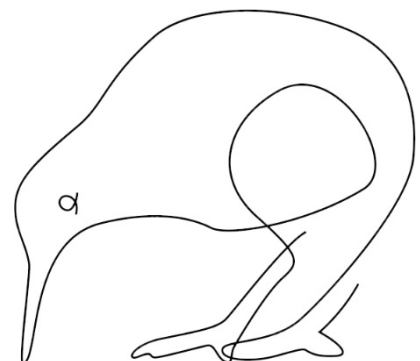
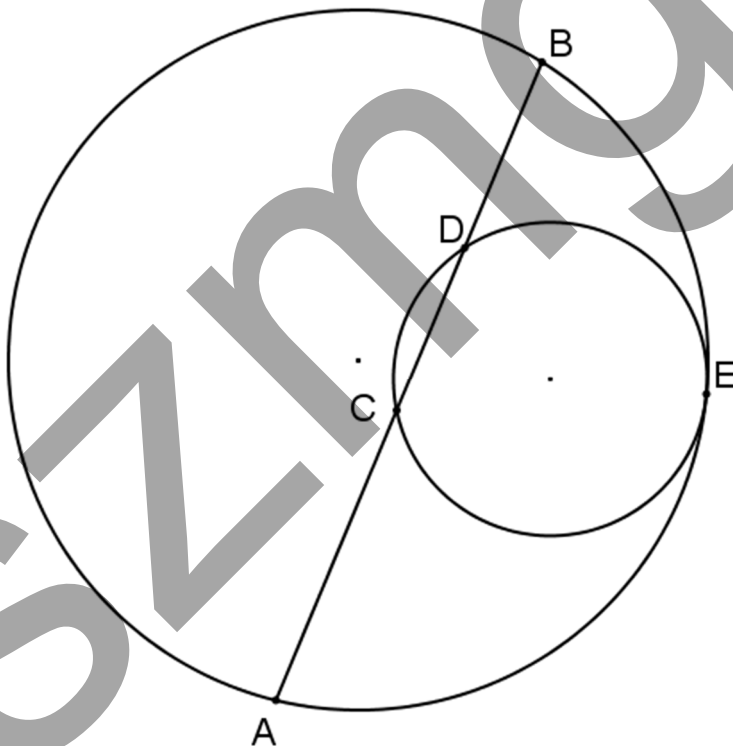


Adott két egymást metsző kör. Az A metszéspontban húzunk egy közös szelőt. Ez E és G pontokban metszi a két kört. E-ben és G-ben húzzuk meg a körök érintőit. Mutassuk meg, hogy a két érintő szöge független a közös szelő helyzetétől! (Mi következik ebből a metszéspontok mértani helyére?)

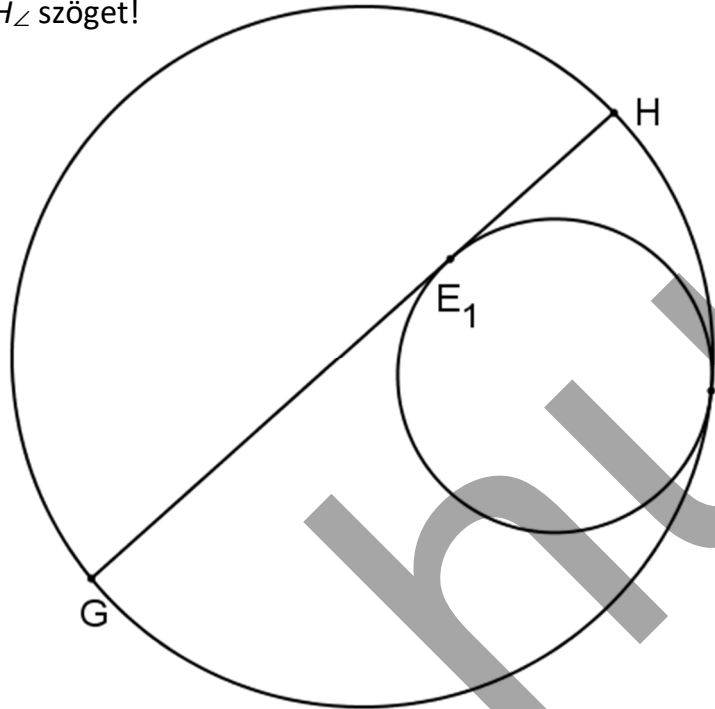


- f) Föld Nap körüli keringésének pályáját közelítsük egy olyan 150 millió km sugarú körrel, amelynek középpontjában a Nap áll!
- Mekkora középponti szög tartozik ahhoz az ívhez, amelyet egy óra alatt befut a Föld?
 - 100 millió km-te kb. hány nap alatt tesz meg a Föld?
 - Hány négyzetkilométer az egy óra alatt befutott ívhez tartozó körívk terület?

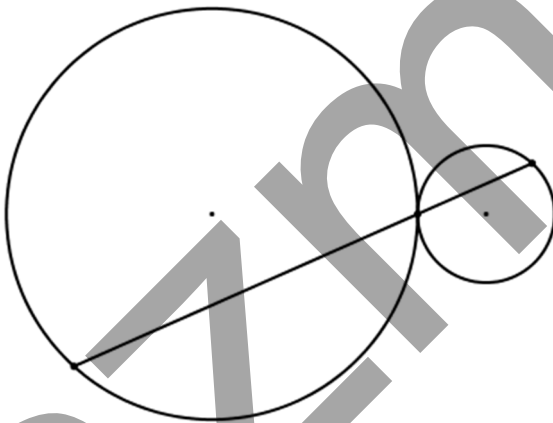
- g) * Adott két egymást belülről érintő kör. Húzzunk meg egy olyan szelőt, mely mindkettőt metszi. Mutassuk meg, hogy a közös E érintési pontból a szelő két kör közé eső két szakasza ugyanakkora szögből látszódik! ($\angle AEC = \angle DEB$)



- h) *Adott két egymást E pontban belülről érintő kör. A kisebbik körhöz húzzunk egy E_1 pontjában érintőt, amely a nagyobb kört G és H pontokban metszi. Mutassuk meg, hogy EE_1 felezi az GEH szöget!



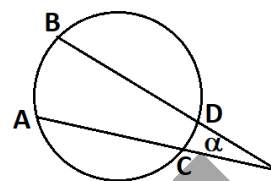
- i) Két kívülről kör érintkezési pontját át szerkesszünk tetszőleges szelőt. Mutassuk meg, hogy a szelőn található húrokhoz mindkét körben ugyanakkora középponti szög tartozik!



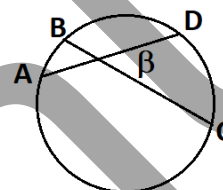
3) Nem kötelező gyakorló példák

- $\triangle$ -ből adott: α ; β ; s_c . Kell a háromszög. (Elv, diszk)
- Négyszögből adott: e, f (átlók), a és b (két szomszédos oldal) és δ (c és d oldalak szöge): szerkesztendő a négyszög.
- ** Szerkesszünk négyszöget, ha adott két átlója e és f , azok szöge: φ , és két szemkötti szöge: α és γ . (Segítség: Oldalfelezőpontok. Két látókörív a paralelogrammán kifelé. 2-szeres tükrözés.)
- Egy körben az AC és BD húrok metszik egymást. Az AB ívhez μ , CD ívhez ν kerületi szög tartozik. Mekkora szögben metszi egymást a két húr?
- Szerkesztendő a háromszög, ha adott a következő három pont (K köré írt kör): $K \cap m_a$ egyenese $= A_1$, $K \cap s_a$ egyenese $= A_2$, $K \cap f_\alpha$ egyenese $= A_3$.

- f) Szerkesztendő $\triangle$, ha adott a köré írt kör magasságokkal adott – csúcsokon kívüli – három metszéspontja.
- g) Adott egy AB szakasz és egy e egyenes, mely nem metszi a szakaszt, és merőleges a szakasz tartóegyenésére. Szerkesszük meg e -n azt az E pontot, melyből az AB a legnagyobb szög alatt látszódik.
- h) Az AB ívhez tartozó kerületi szög κ , a CD -hez τ .
Mekkora az α ?



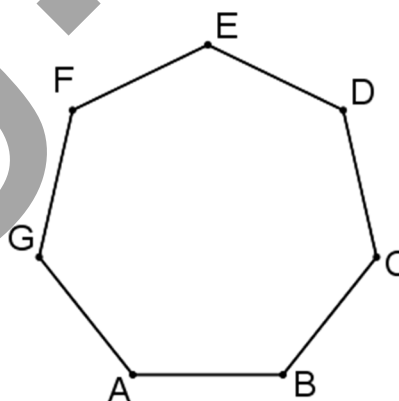
- i) Az AB ívhez tartozó kerületi szög κ , a CD -hez τ .
Mekkora a β ?



V. A húrnégyszögek

1) Gyakorlás a Definícióhoz

- a) Mutasd meg, hogy egy 9 oldalú szabályos sokszög egyik oldala az oldal végpontjaitól különböző csúcsokból ugyanakkora szög alatt látszódik.
Mekkora ez a szög?

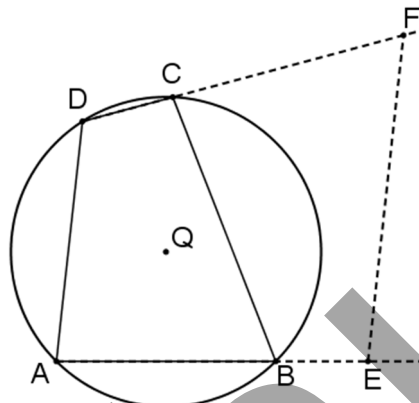


Hány húrnégyszöget találsz a pontokból, ha az AB pont fixálva van, és mekkorák a szögek?

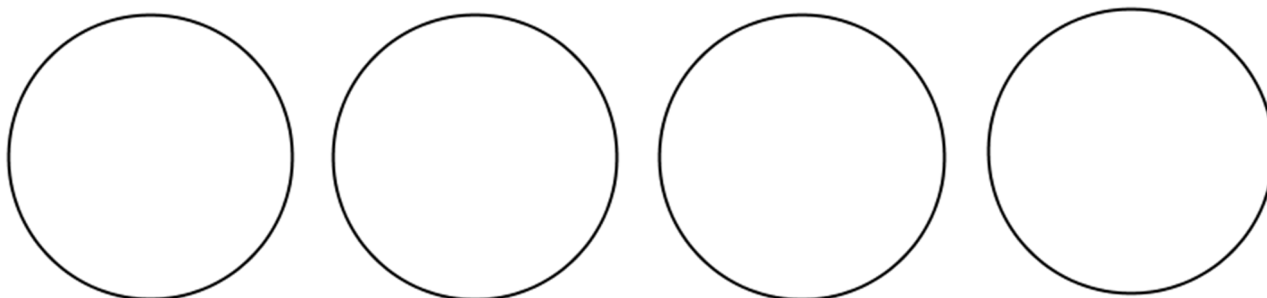
- b) Egy szabályos sokszög egyik oldala a köré írt kört két ívre bontja. Mekkora szög alatt látszik a kisebbik körív pontjaiból a sokszög oldala, ha az oldalak száma a) 12
b) n ?

2) Tulajdonságok

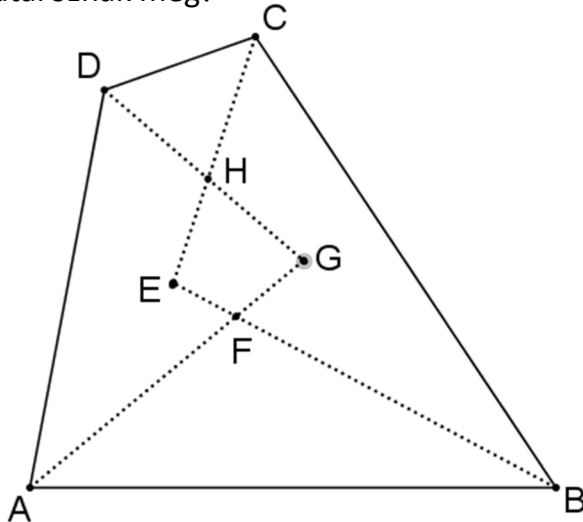
- Adott az ABCD húrnégyszög. Az A kezdőpontú AB, illetve D kezdőpontú DC félegyeneseken felvesszünk egy E illetve egy F pontot úgy, hogy az $EF \parallel AD$, továbbá az ABCD köré írt körrel nincs közös pontja. Bizonyítsd be, hogy az E, F, C, B egy körre illeszkedik!



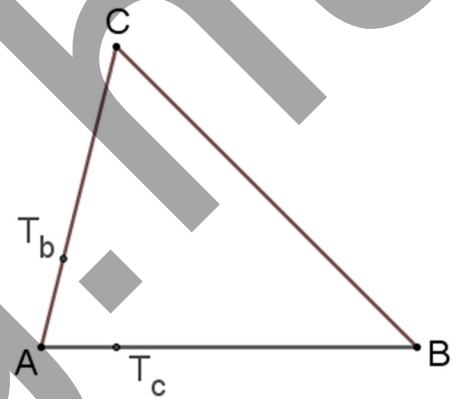
- Döntsd el, hogy Igaz v. Hamis – írd mellé rövid magyarázatot! (Alul rajzolhatsz)
- Van konkáv húrnégyszög.
- A húrnégyszöget egy átlója egy hegyes és egy tompaszögű $\triangle$ -re bontja.
- Ha egy trapéz húrnégyszög, akkor szárai egyenlő hosszúak.
- Ha egy trapéz szimmetrikus, akkor húrtrapéz.
- A paralelogrammák közül csak a téglalap húrnégyszög.
- A húrnégyszögben van tompaszög.
- Ha egy húrnégyszögben nincs 90° -os szög, akkor két tompaszöge van.



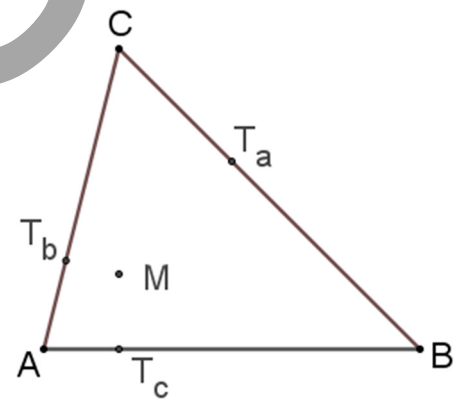
- Mutasd meg, hogy egy nem deltoid négyszögben a szögfelezők húrnégyszöget határoznak meg!



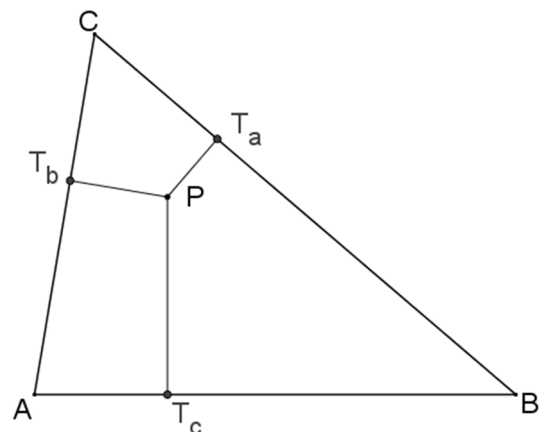
- Bizonyítsd be, hogy egy háromszög két csúcsa, illetve a belőlük induló magasságvonalak talppontjai húrnégyszöget alkotnak. Hol van a négyszög köré írt kör középpontja?



- Mutasd meg, hogy egy háromszögben T_a , C , T_b , és M egy körön vannak. (T_a az a -ból induló magasság talppontja)



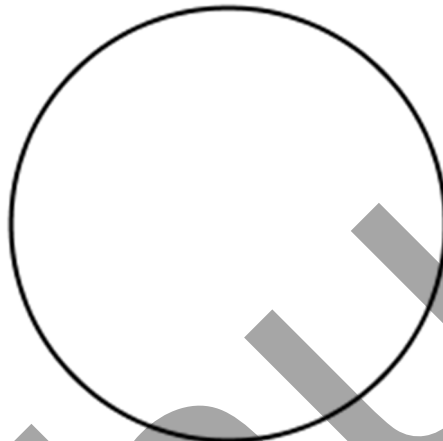
- Mutasd meg, hogy egy hegyesszögű háromszög P belső pontjából az oldalakra állított merőlegesek 3 húrnégyszögre bontják a háromszöget!



VI. Gyakorlás

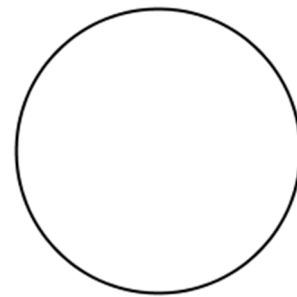
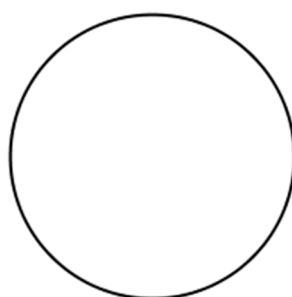
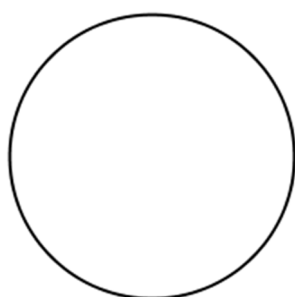
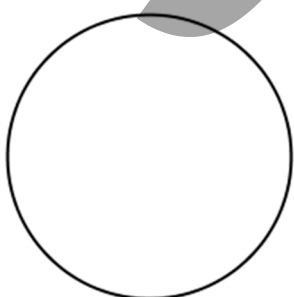
1) Alappéldák

- a) Mutasd meg, hogy egy nem derékszögű húrnégyszögben nem lehet páratlan számú hegyesszög!



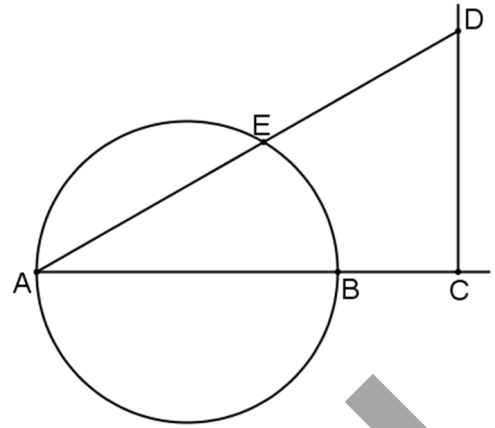
- b) Igaz/hamis (Rövid magyarázat is kell!)

- Ha egy trapéz húrnégyszög, akkor egyenlőszárú.
- Ha egy trapéz egyenlőszárú, akkor húrnégyszög.
- A paralelogramma húrnégyszög.
- Van húrnégyszög paralelogramma.
- Nincs olyan rombusz, amelyik húrnégyszög.
- Ha egy húrnégyszög két átlója egyenlő, akkor ő trapéz is.
- Egy húrnégyszög 3 szöge lehet: 50° 80° 120° .

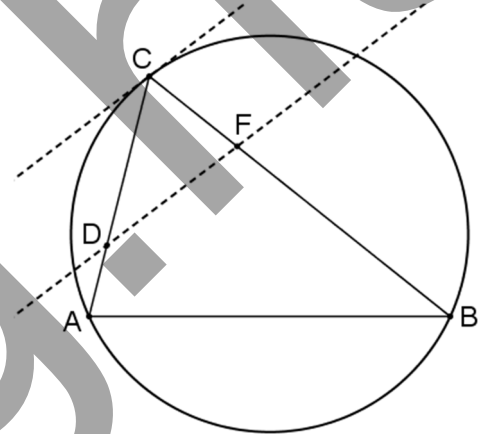


2) Gyakorló példák

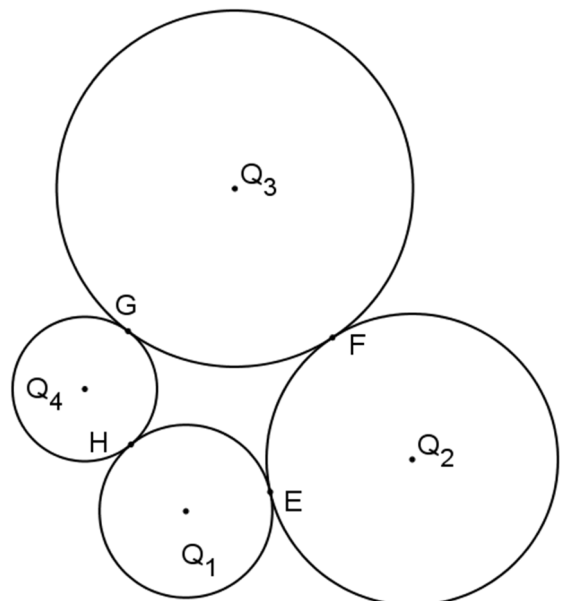
- a) Egy kör AB átmérőjének B -n túl meghosszabbított egyenesén található C pontjában húzzunk rá merőlegest. Ezt a merőlegest egy D pontban, a kört E pontban metszi egy A -ban húzott másik egyenes. Mutassuk meg, hogy $BCDE$ húrnégyszög!



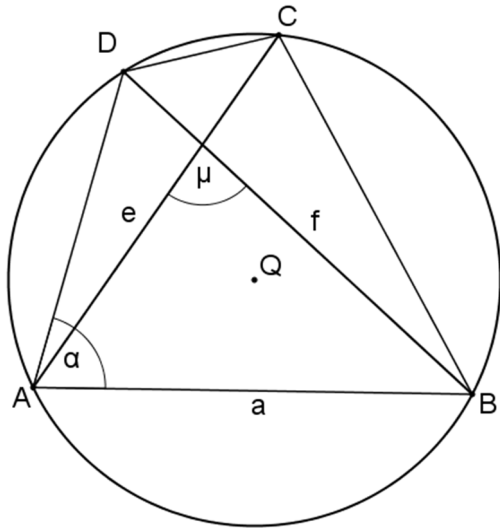
- b) Szerkesszünk érintőt a háromszög köré írt körhöz az egyik csúcsban, és messük el a csúcsból induló két oldalt egy ezzel párhuzamos egyenessel. Mutassuk meg, hogy a háromszögből így lemetezett négyszög húrnégyszög!



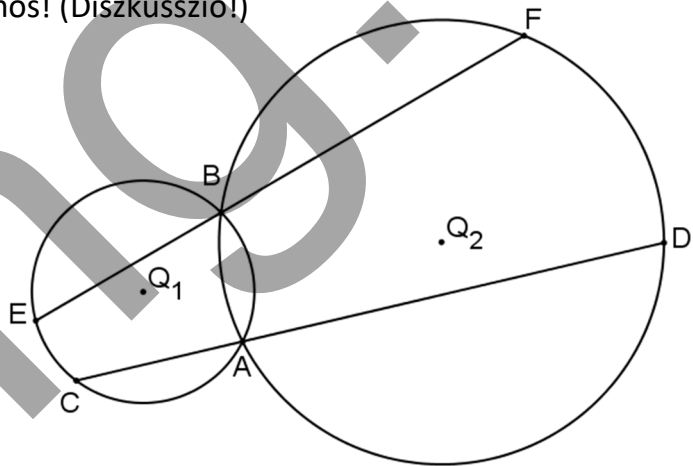
- c) Mutassuk meg, hogy ha négy kör bármelyike két másikat (és csak kettőt) kívülről érint, akkor a négy érintési pont egy körön van.



- d) Szerkesszünk húrnégyszöget, ha adott α , e és f átló és μ , az átlók szöge.



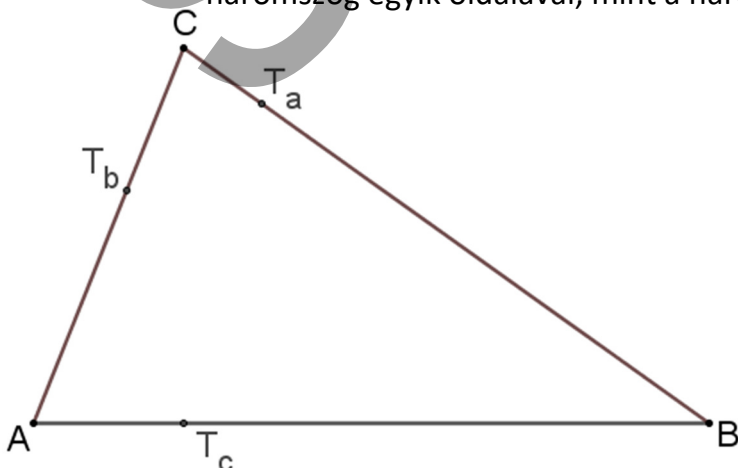
- e) Húzzunk két kör metszéspontjain át 1-1 szelőt. Illesszünk egyenest az ugyanabban a körben található második metszéspontra mindkét körnél, és igazoljuk, hogy az így nyert két egyenes párhuzamos! (Diskusszió!)



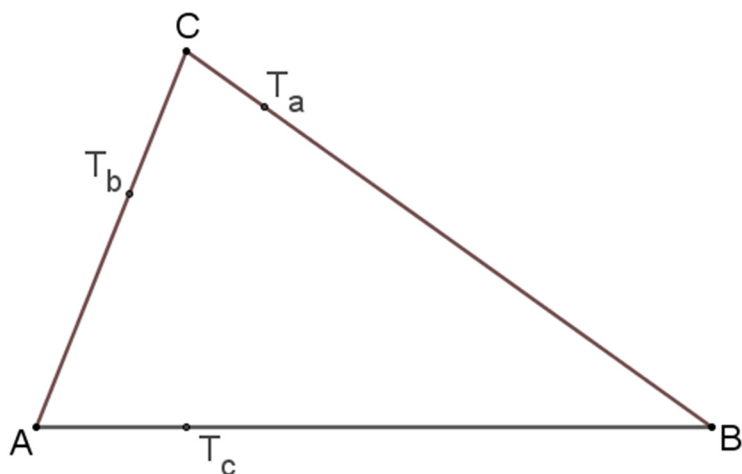
VII. Húrnégyszögeket felhasználó tételek - példák

1) Alapötletek

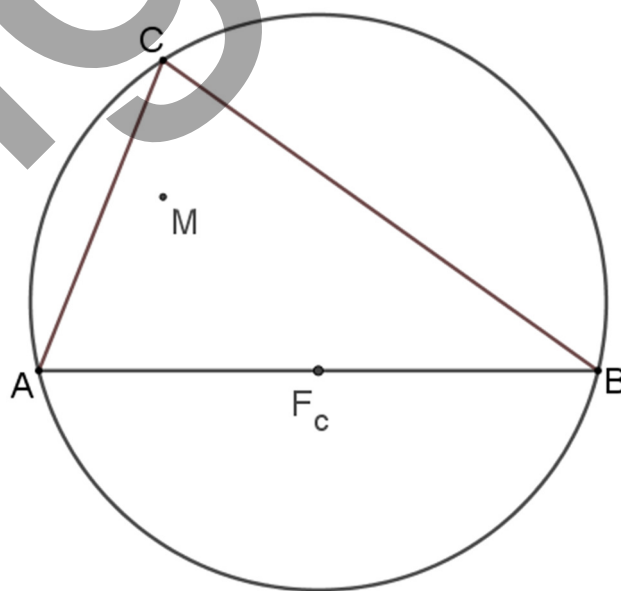
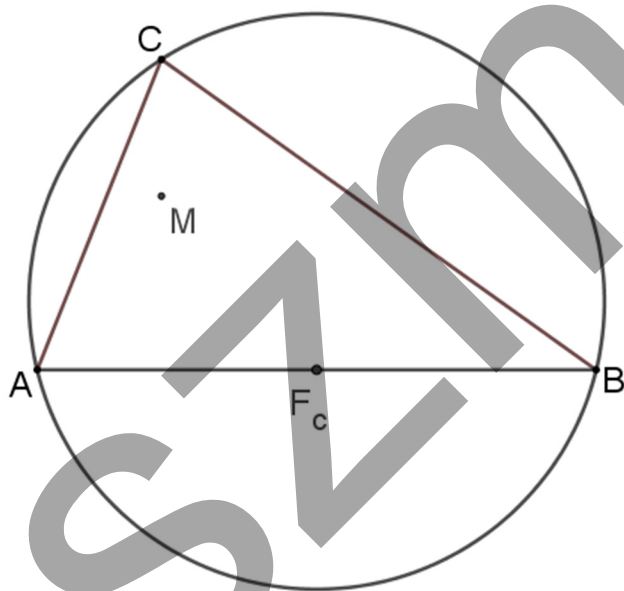
- a) Mutasd meg, hogy a talpponti háromszög egyik oldala akkora szöget zár be a háromszög egyik oldalával, mint a háromszög egyik szöge!



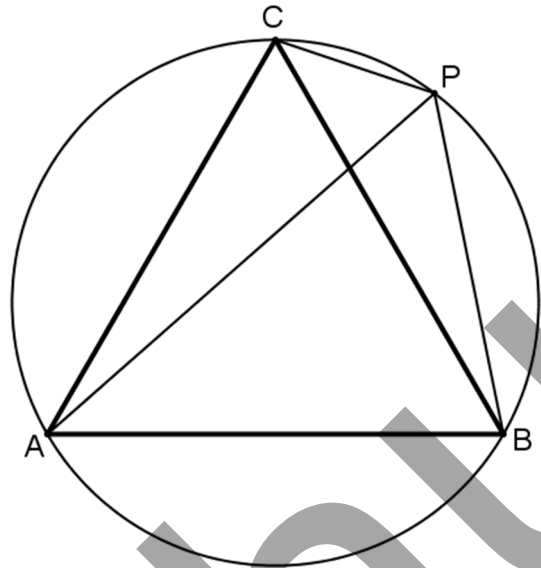
b) * Szerkeszd meg a háromszöget, ha adott a talpponti háromszög!



- c) Egy háromszögben tükrözzük M-et az egyik oldalra. Mutasd meg, hogy M a körülírt körre esik! (Pl.: $a(M) \in K$) (Ábra alább)
- d) Egy háromszögben tükrözzük M-et az egyik oldalfelező pontra. Mutasd meg, hogy M a körülírt körre esik!

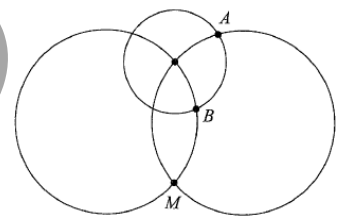


- e) Egyenlő oldalú Δ köré írjunk kört. Áll.: az A-t nem tartalmazó BC ív bármely P pontjára igaz: $PA=PB+PC$.



2) Nem kötelező gyakorló példák

- Kössük össze a háromszög M magasságpontját a csúcsokkal. Így az eredetivel együtt négy háromszög keletkezik. Bizonyítsuk be, hogy az ezek köré írt körök egyenlő sugarúak!
- Δ -ból adott 3 pont: a 3 magasságvonal $\cap$ köré írt kör. Szerkesztendő a Δ .
- Δ -ból adott: M, Q (köré írt kör kp-ja) és az a egyenese. Kell a Δ .
- Adott két egyenlő sugarú, egymást metsző kör. Az egyik metszéspont köré kört rajzolunk. Mutasd meg, hogy M, A és B kollineáris (egy egyenesbe esik). (A kollinearitást sokszor úgy bizonyítjuk, hogy a középső pontnál 180° van...)
- Áll.: $\forall$ hegyesszögű háromszög köré írt kör kp-ból a ΔA csúcsába futó sugár $\perp T_b T_c$ -re.



VIII. Az érintőnégyszögek

1) A hűrnégyszögek definíciója és alaptulajdonsága

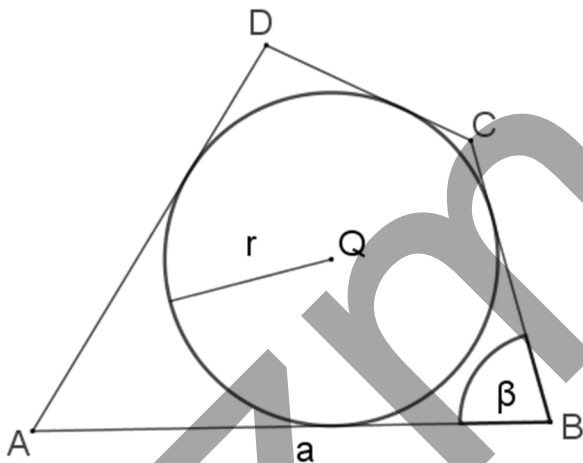
- Egy érintőnégyszög három oldala (valamilyen sorrendben) 3, 5 és 6 cm. Mekkora lehet a harmadik oldal?
- Mutasd meg, hogy a konvex deltoid érintőnégyszög!

- Mely paralelogrammák érintőnégszögek?

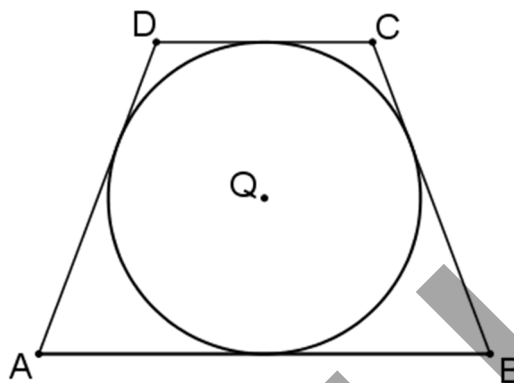
- Van-e olyan deltoid, amely érintő- és húrnégyszög is?

2) Az érintőnégszögek és húrnégyszögek kapcsolata

- a) Szerkessz érintőnégszöget, ha adott két egymás melletti oldal – a és b , azok szöge – β – és a beírt kör sugara – r .



- b) Állítás: ha egy húrtrapéz magassága a két alap mértani közepe, akkor az érintőnégszög is! ($m^2 = a \cdot c$ vagy másképp: $\sqrt{a \cdot c} = m$)



- c) * Adott egy K körön az A, B, C . Kell $D \in K \rightarrow ABCD$ érintőnégszög.

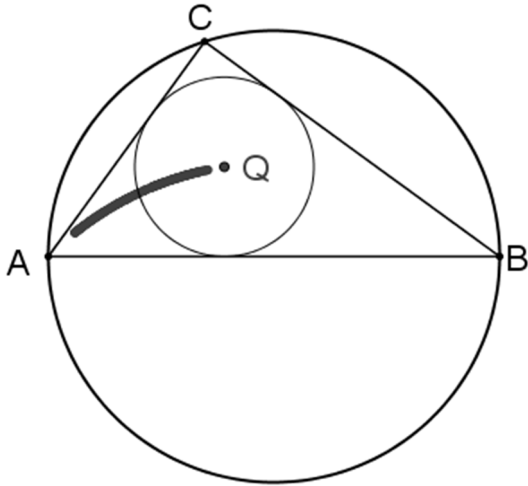


A Párhuzamos szelők tétele

I. A párhuzamos szelők tétele illetve a párhuzamos szelőszakaszok tétele

1) (Segédétel – háromszögek, paralelogrammák)

- Egy ABC derékszögű $\triangle$ AB átfogóját rögzítjük. A C csúcs mozog a Thalesz körén. Mutasd meg, hogy egy látószöggöríven mozog a beírt kör Q középpontja! Hány fokos látószöggörív ez? (Az ábrán vastagon látszódik a nyomvonal, ahogy C haladt a körön...)



- Írd le jelekkel a háromszögek egybevágóságának négy alapesetét!
 $ABCD \cong A'B'C'D \Leftrightarrow$

- ☐
- ☐
- ☐
- ☐

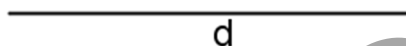
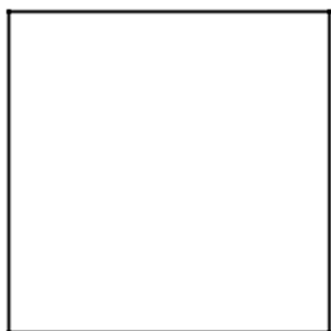
2) Konkrét racionális arány

- Az órán tanult módszerrel ossz fel egy 6 cm hosszú szakaszt 5 egyenlő részre! Egy másikat 2:5 arányban.

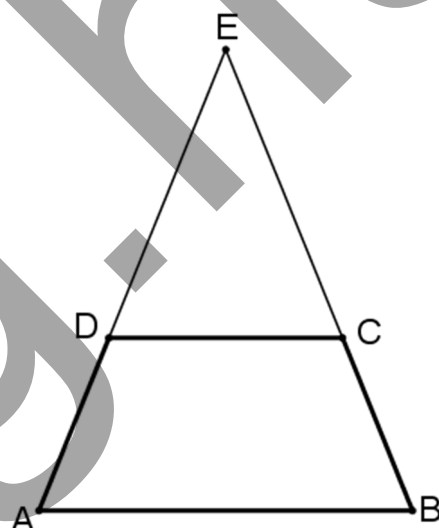
- Ossz fel egy szakaszt a $\triangle$ -ek súlyvonalára vonatkozó tétellel 3 egyenlő részre!

3) A párhuzamos szelők tétele, csak racionális arányokkal bizonyítva

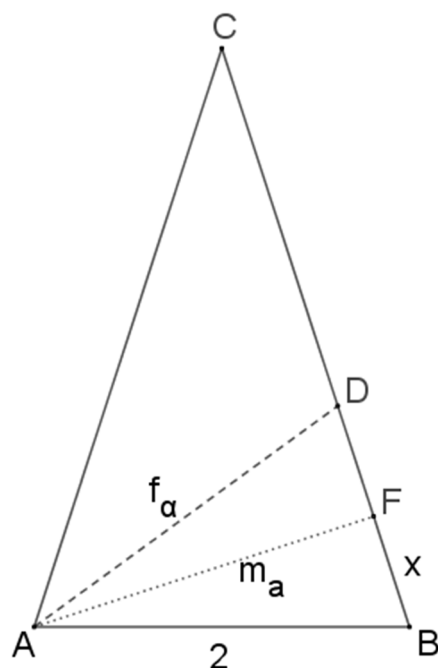
- Ossz fel a d szakaszt két részre, melyek úgy aránylanak egymáshoz, mint a négyzet oldala az átlójához – vagyis: $1 : \sqrt{2}$ kb: $1 : 1,4142135623730950488016887242$ ☺



Egy szimmetrikus trapéz hosszabbik alapja 6 cm, a szára 4 cm hosszú. A trapézt háromszöggé kiegészítő egyenlőszárú háromszög szárának hossza 5 cm. Mekkora a rövidebbik alap a trapézban?



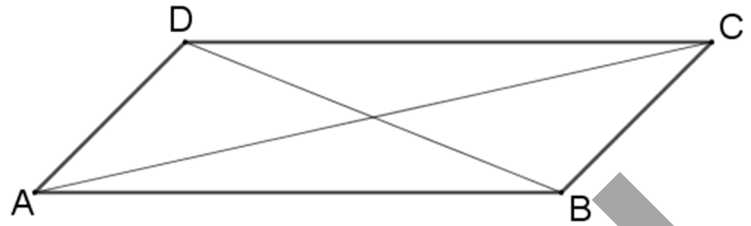
Adott egy $36^\circ 72^\circ 72^\circ$ fokos $\triangle$. (Az aranymetszés háromszöge). Az alapja 2 egység hosszú. Mekkora a szára? Pitagorasszal!
(Néhány segítő vonalat, ismeretlent megadtam, de még ki kell egészíteni adatokkal az ábrát!)



4) (A párhuzamos szelők tételének megfordítása)

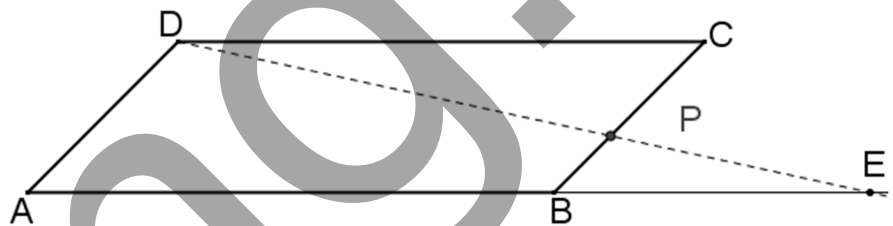
Pitagorasz-tétellel lásd be hogy: a paralelogramma oldalaira emelt négyzetek területösszege = az átlókra emelt négyzetek területösszegével! ($2a^2 + 2b^2 = e^2 + f^2$)

(Segítség: állíts merőlegességeket C-ből és D-ből az AB egyenesre!)



5) A Párhuzamos szelőszakaszok tétele

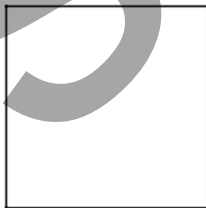
Az ABCD paralelogramma BC oldalán található P pont BP : PC = 3:5 arányban oszt. Kössük össze D-t P-vel és hosszabbítsuk meg, hogy messe az AB egyenest: E pontban. AB=10 Mekkora BE?



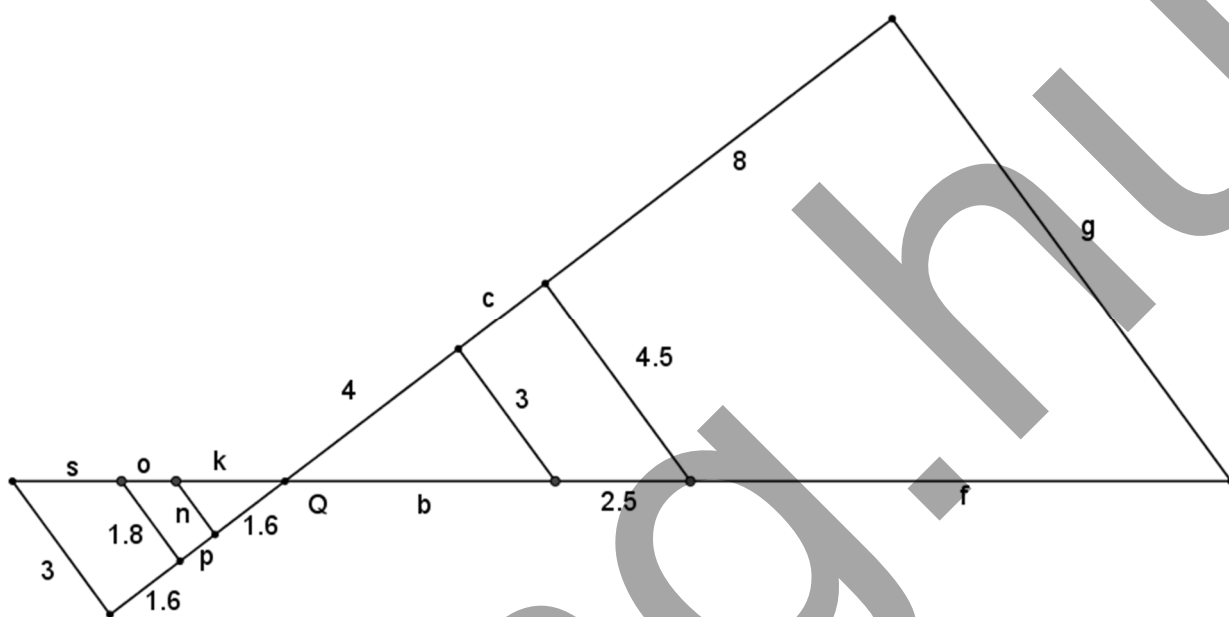
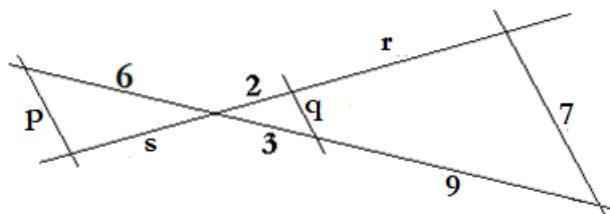
II. Példák

1) Alap

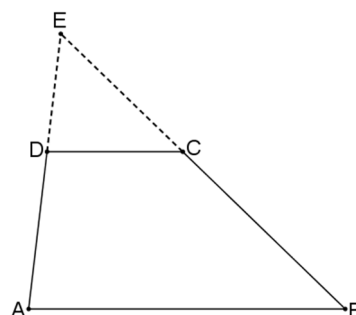
a) Adott egy négyzet. Szerkessz vele egyenlő területű háromszöget, mely oldalainak aránya 2:3:4.



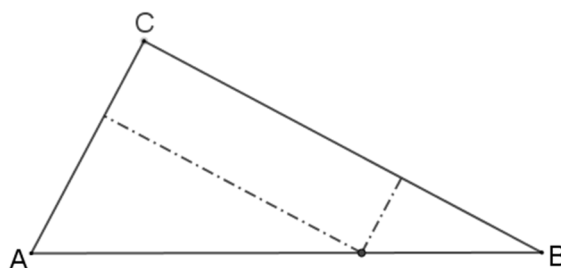
b) Egy szög szárait párhuzamosokkal metszettem. Számítsd ki a hiányzó adatokat



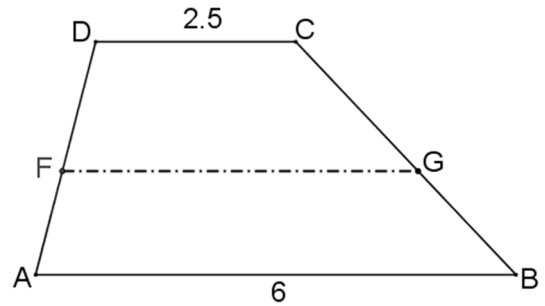
c) Egy trapéz AB alapja 7 egység. BC szára 5. CD alapja 3. Mekkora a kiegészítő háromszög EC oldala?



Egy derékszögű háromszögbe téglalapot írunk úgy, hogy a téglalap két szomszédos oldala egy-egy befogóra egy további csúcsa az átfogóra esik. Ez a csúcs az átfogót 11:6 arányban osztja. A háromszög befogóinak hossza 16 és 30 cm. Mekkora a téglalap területe. Hány ilyen téglalap felel meg a feltételnek?

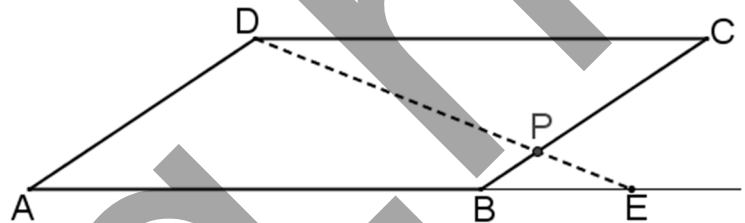


- d) Egy 6 és 2,5 cm alapú trapézot elmetsem egy – az alapokkal párhuzamos – egyenessel, amely az egyik szárát 4:5 arányban osztja. Mekkora az egyenesnek a trapézba eső szakasza?

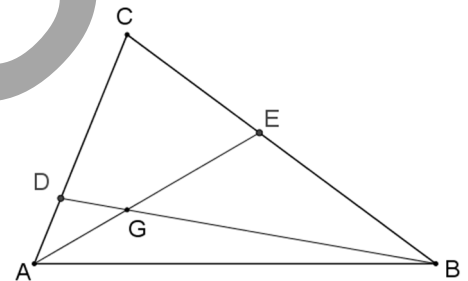


2) Párhuzamos szelők, szelőszakaszok tételének alkalmazása

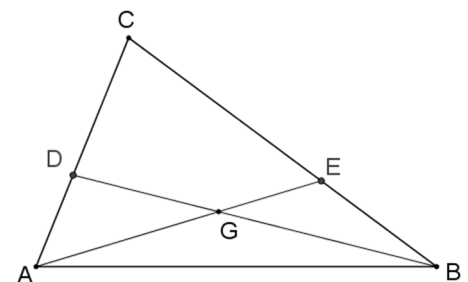
- a) Az ABCD paralelogramma AB oldala 12 cm. Az AB oldal B ponton túli meghosszabbítására illeszkedő E pontra: $BE = 4$ cm. Milyen arányban osztja ED egyenes a BC oldalt?



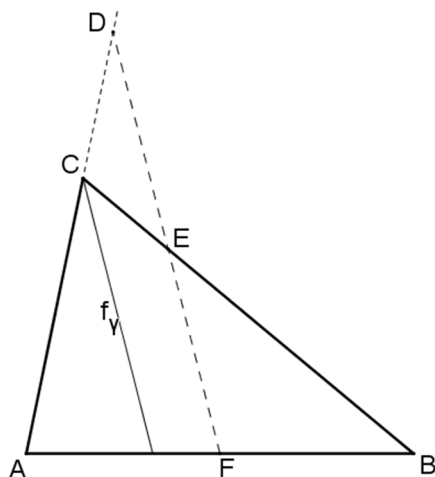
D az AB-t A-hoz közelebb 2 : 5 arányban osztja.
E a CD-t C-hez közelebb 3 : 4 arányban osztja.
Milyen arányban osztja BD-t a G?



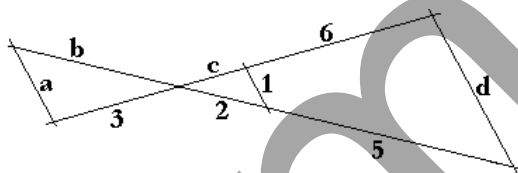
$$CE : EB = 5 : 3 \quad AG : GE = 16 : 9 \quad AD : DC = ?$$



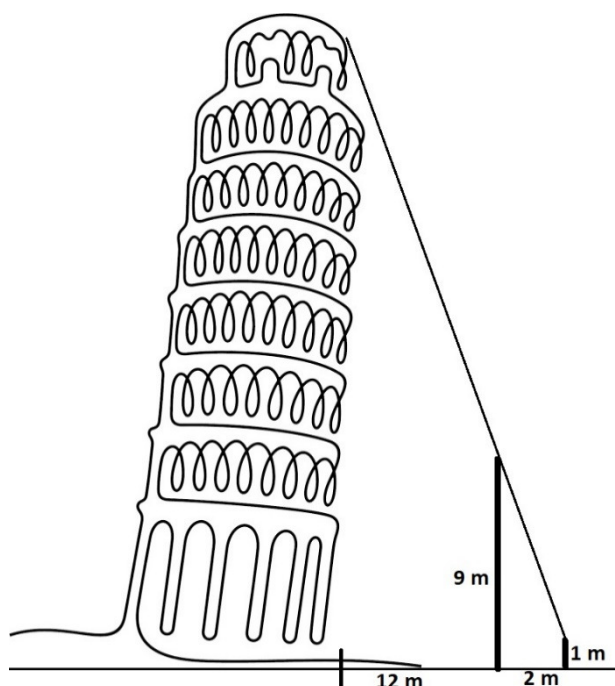
- b) Egy $ABC\triangle$ oldalai a, b, c . Az AB oldalának F felezőpontjából párhuzamost húzok f_y -val. Ez a másik két oldalegyenest E -ben és D -ben metszi. Mekkora AD és BE szakasz a háromszög oldalaiból kifejezve?



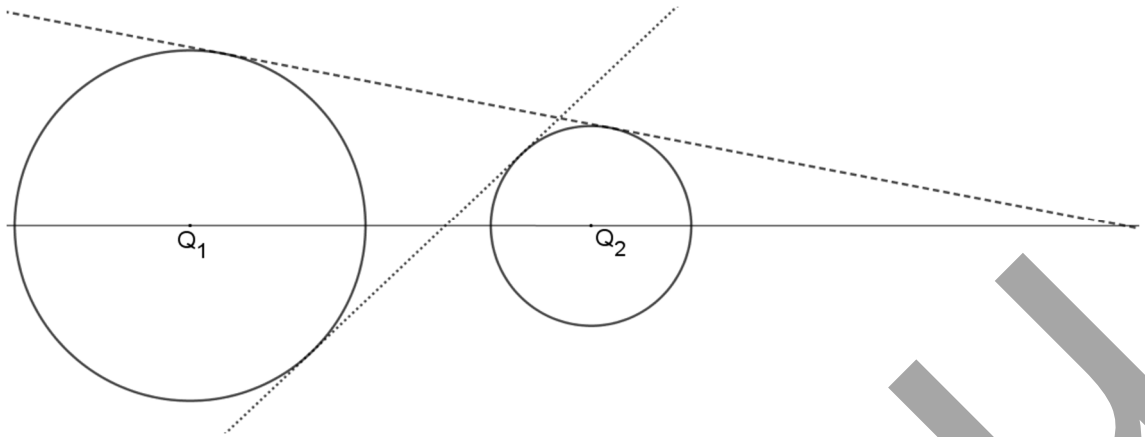
Számold ki a hiányzó adatokat. (Jobbra az ábra) (Ami párhuzamosnak látszik, az az is.)



- c) Egy torony magasságát úgy határozzuk meg, hogy a toronytól egy irányban két karót szúrunk le, hogy a karók és a torony csúcsai egy egyenesbe essenek. Mekkora a torony? (Ha jól számolsz, valós értéket kapsz!)



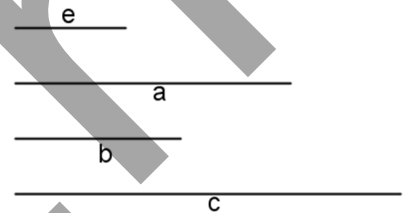
- d) Adott két kör: $r_1=7$, $r_2=4$ $d(Q_1;Q_2)=16$ Hol metszi a közös külső és a közös belső érintő a centrális?



3) „Számítható” szakaszok szerkesztése

Adott az egység, és három szakasz: a, b, c . Szerkeszd meg:

- $\frac{a \cdot c}{b}$ szakaszt

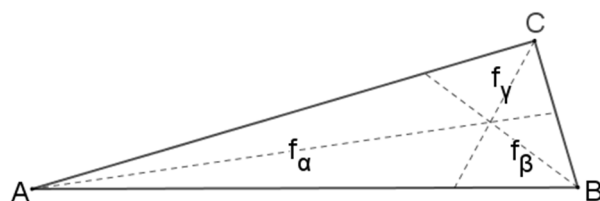


- $b \cdot c$ szakaszt

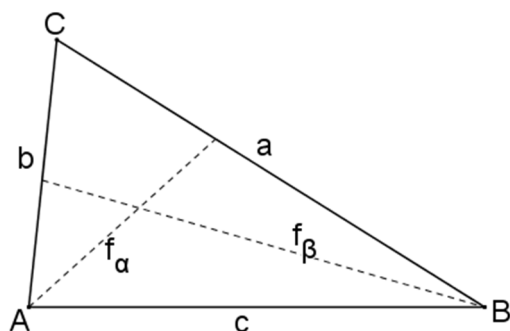
III. A szögfelező és egyéb feladatok

1) A Szögfelező tétel

- a) Adott egy 7; 24; 25 egység oldalú $\triangle$. Mekkora szakaszokra osztják az oldalakat a szögfelezők?

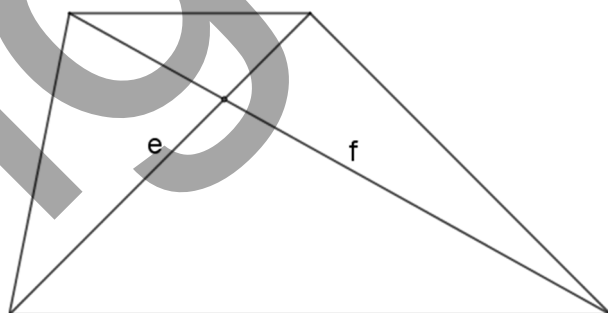


b) Egy $\triangle$ -ben milyen arányban osztja egymást f_α és f_β a három oldalból kifejezve?

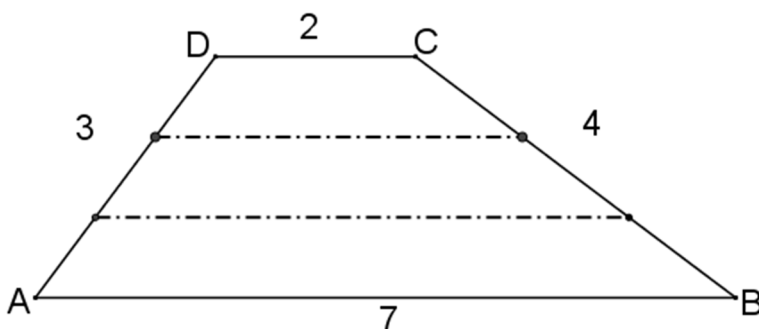


2) Gyakorló példák

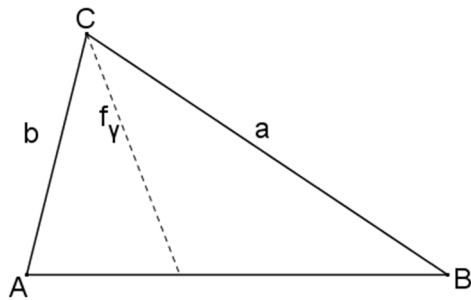
- Egy trapéz $f=10$ cm-es átlója a másik átlót 5 és 2 cm-re osztja föl. Mekkora szakaszokra osztja e az f átlót?



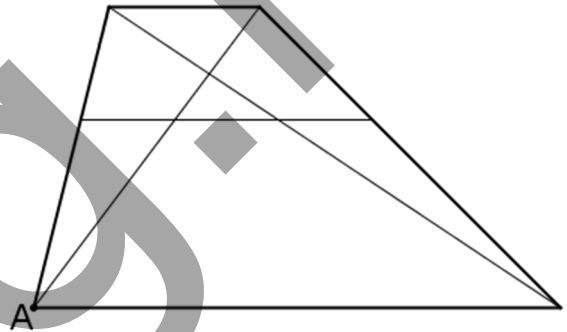
- Egy trapéz két párhuzamos oldal 12 és 18 cm. Szárai: 3 és 4 cm. Számítsuk ki azoknak a szakaszoknak a hosszát, melyek párhuzamosak az alapokkal és a szárat 3-3 egyenlő részre osztják.



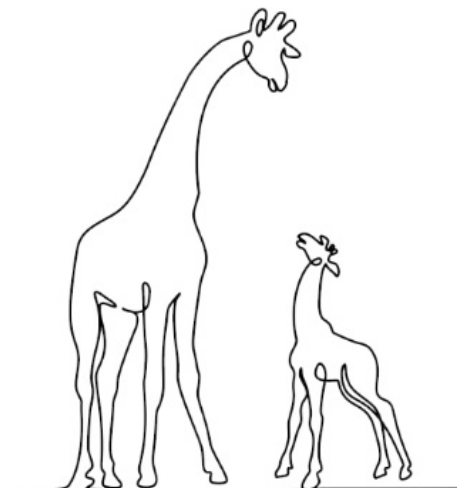
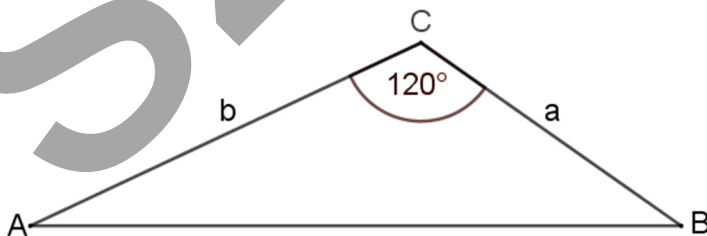
- Adott egy háromszögből: a , b , f_γ . Szerkesztendő a $\triangle$. (Elv, diszk.)



- Igazoljuk, hogy ha egy trapéz belsejében akárhol húzunk is a párhuzamos oldalakkal párhuzamos egyenest, ennek az egyenesnek az a két darabja, amely az átló és az oldal között van, egyenlő.



- Adott $\triangle$ -ből: a ; b és $\gamma = 120^\circ$ Mekkora f_γ ?

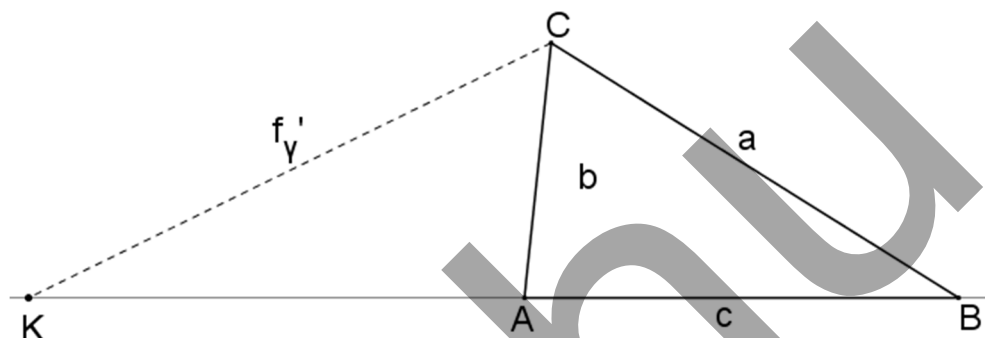


Hasonlóság

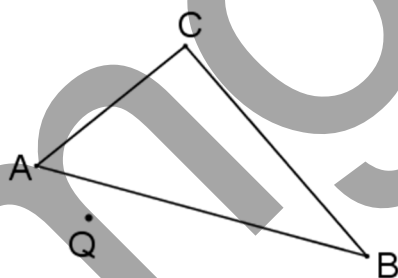
I. A középpontos hasonlósági trafó

1) Szemléltetés

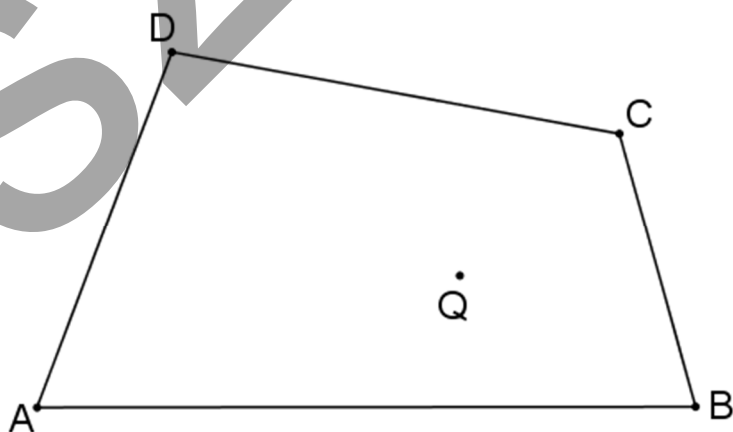
- a) Az ABC_{Δ} -nek meghúztuk az f'_Y külső szögfelezőjét. Mutasd meg, hogy $\frac{KA}{KB} = \frac{CA}{CB}$.



- b) Szerkeszd meg: $Q^{\lambda=2}(ABC)$



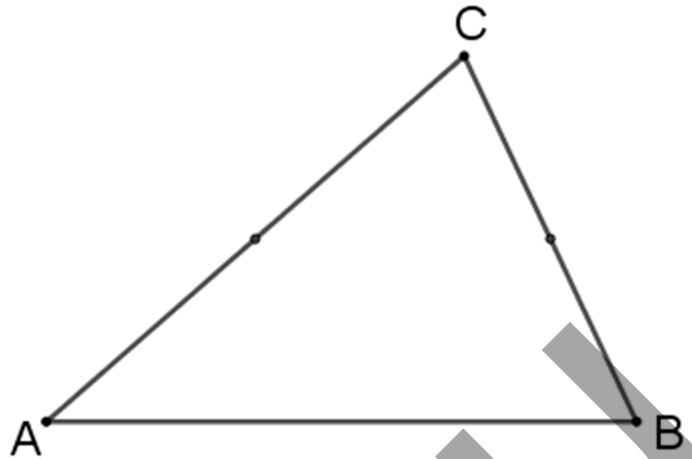
Szerkeszd meg: $Q^{\lambda=\frac{1}{\sqrt{2}}}(ABCD)$ (Emlékeztető: a négyzet átlójának és oldalának az aránya...)



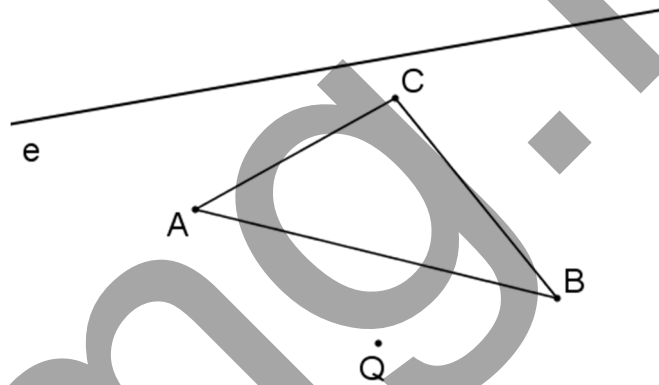
2) Tulajdonságok

- a) Szerkeszd meg a $\triangle S$ súlypontját!.

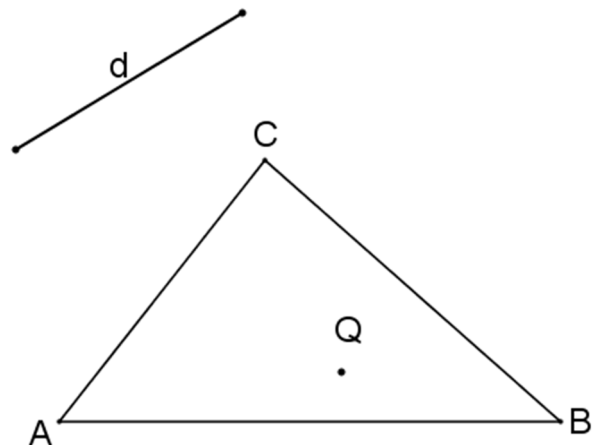
Szerkeszd meg: $S^{\lambda = -\frac{1}{2}}$ Mit tapasztalsz?



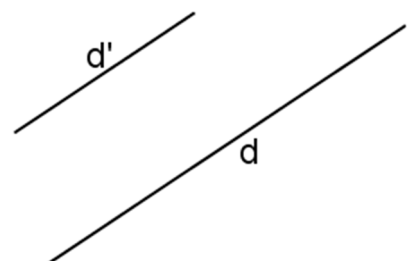
- b) Q-ból szerkeszd meg a $\triangle$ középpontosan hasonló képét úgy, hogy az A' csúcs az e egyenesre essék.



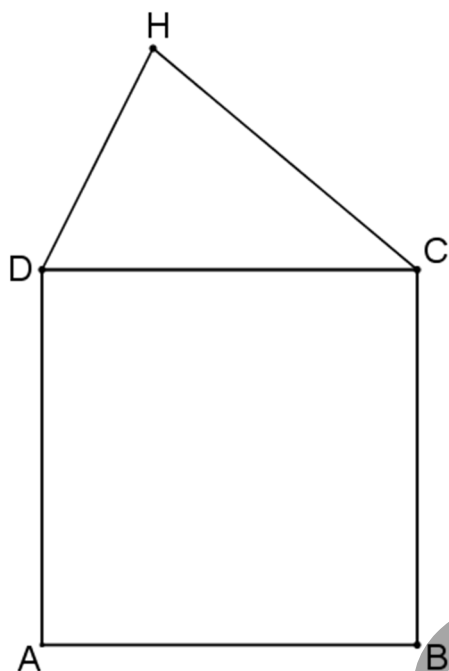
- c) Q-ból szerkeszd meg a $\triangle$ középpontosan hasonló képét úgy, hogy a c' oldal d -vel legyen egyenlő, és a hasonlóság aránya negatív legyen (nagyobb ábrát rajzolj!)



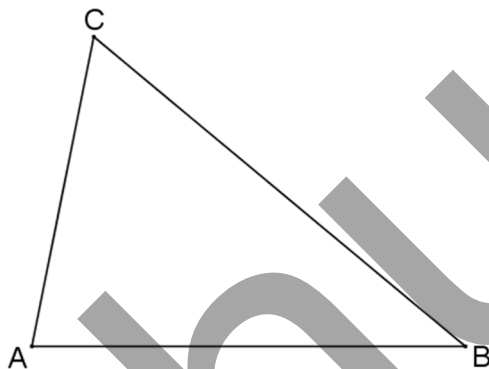
- d) Adott egy szakasz, és egy vele párhuzamos. Szerkeszd meg azt a két pontot, melyből kp-os hasonlósággal az egyik a másikba transzformálható.



- e) Egy ABCD négyzet CD oldalára kifelé szerkessz egy DCH hegyesszögű $\triangle$ -et. A H-ból szerkeszd meg a négyzet középpontosan hasonló képét úgy, hogy $A'B'$ a háromszög DC oldalára essék! A négyzet D és C csúcsa min „mozog” és hová kerül?



- f) Szerkessz az ABC háromszögbe egy olyan téglalapot, mely DE oldala a háromszög c oldalán van, F csúcsa az a -n, G csúcsa a b -n és oldalai aránya: $DE : EF = 3 : 2$ Az előző példa gondolatmenete hasznos...



II. A hasonlósági transzformáció

1) Definíció, tulajdonságok

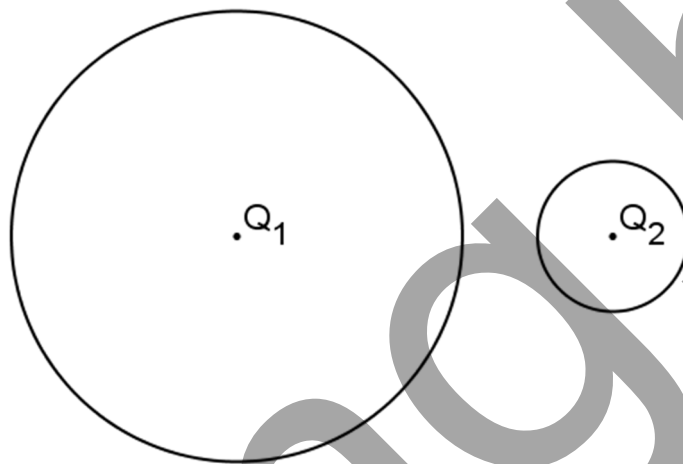
- a) Lehet-e egy $\lambda \neq 1$ arányú hasonlósági transzformációnak két fixpontja? Miért?

- b) *Adott $Q_1^{\lambda=3}$, $Q_2^{\alpha=+60^\circ}$. egymástól 4 cm-re. Szerkeszd meg a $Q_2^{\alpha=+60^\circ}(Q_1^{\lambda=3}(\))$ trafó fixpontját.

2) Hasonló alakzatok

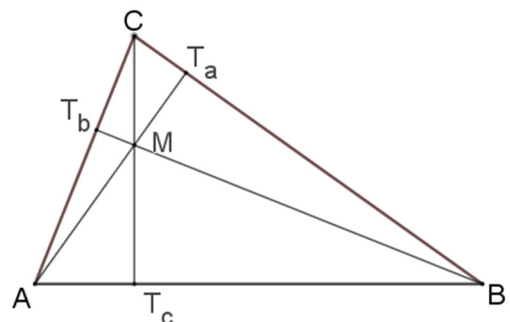
- a) Két hasonló általános ötszög legrövidebb oldala 18 és 45 cm. A kerületük közti különbség 150 cm. Mekkora kerületűek?

- b) Szerkeszd meg azt a két pontot, amelyekből kp-os hasonlósággal az egyik kör a másikba vihető!



- c) Egy derékszögű háromszög két befogója 2 és 5 egység. A hozzá hasonló $\triangle$ területe 45 egység. Mekkora a hasonló $\triangle$ oldalai? (Vigyázz, becsapós, ellenőrizd az eredményed!) (Segítség: az új háromszög két befogója: $2x$ és $5x$...)

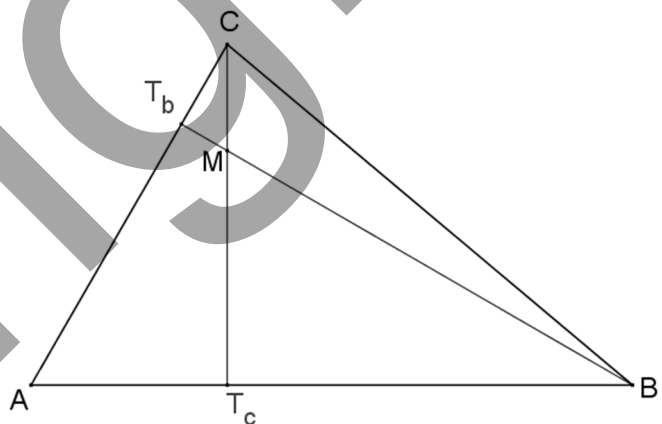
Rajzold meg egy $ABC_{\triangle}$ három magasságát. Keletkezik M , T_a , T_b , T_c , így jónéhány $\triangle$ -et meg tudsz nevezni. (Pl.: AMT_b stb.) Írd föl a hasonló háromszögeket!



Döntsd el: Igaz/Hamis (alatta rajzolhatsz)

- bármely két szabályos Δ hasonló
- két kör hasonló
- ha két egyenlőszárú Δ -ben egy-egy szög megegyezik, akkor hasonló
- két egyenlőszárú Δ hasonló, ha a száraik által bezárt szög megegyezik.
- ha két téglalapban az átlók ugyanakkor szöget zárnak be, akkor a két téglalap hasonló.
- két rombusz hasonló, ha átlóik aránya megegyezik.
- két négyszög hasonló, ha megfelelő szögeik megegyeznek.
- két n -oldalú szab. sokszög hasonló.

Δ -ből adott: $MT_b=2$, $MC=4$, $AT_c=5$ Kell AT_b . (M a magasságpont, T_b T_c talppontok)



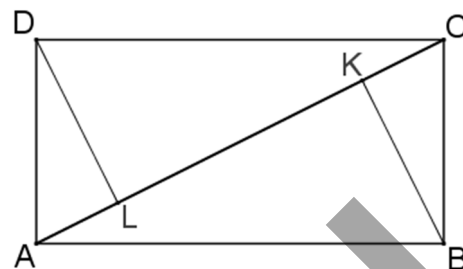
d) Hasonlók-e a Δ -ek?

- $a=1$, $b=1,5$ $c=2$; $a'=10$ $b'=15$ $c'=20$
- $a=1$, $b=2$ $c=15$; $a'=12$ $b'=8$ $c'=16$
- $a=20$ $b=25$ $c=30$ $a'=4$; $b'=5$; $c'=7$

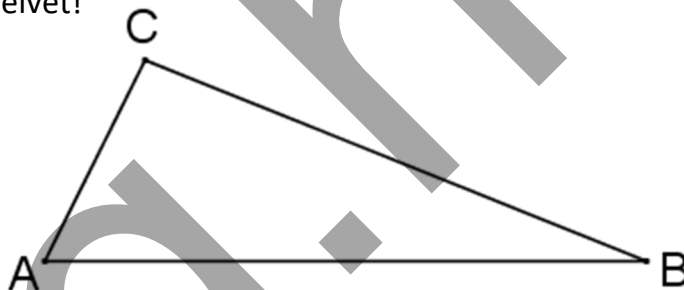
Egészítsd ki úgy, hogy a Δ -ek hasonló legyenek (meg kell találd az arányt!)

- $a=6$, $b=9$ $c=12$; $a'=9$ $b'=$ $c'=$
- $a=10$, $b=35$ $c=40$; $a'=$ $b'=25$ $c'=$

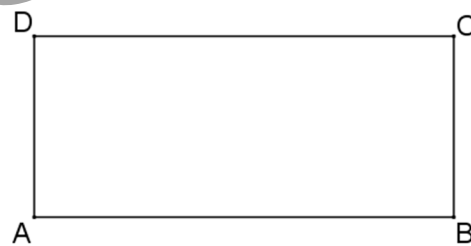
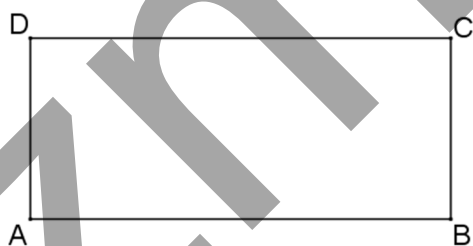
- e) Az ABCD téglalapban megrajzoltuk az AC átlót. Erre az átlóra merőlegest állítottunk a B és a D csúcsból. A merőlegesek talppontja K, illetve L pont lett. Igazoljuk, hogy az így kapott rajzon valamennyi háromszög hasonló! Ha $AL=4$ és $DL=5$, akkor mekkora AD, AB és AC?



- f) A háromszögből egy, a C csúcson át haladó egyenessel vágj le az eredetihez hasonló háromszöget! Írd le az elvét!



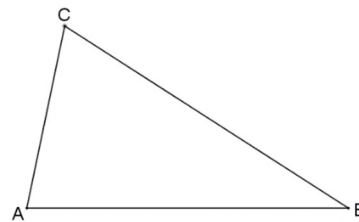
- g) A téglalapról vágj le egy egyenessel egy – az eredetihez hasonló – téglalapot! Írd le az elvét!



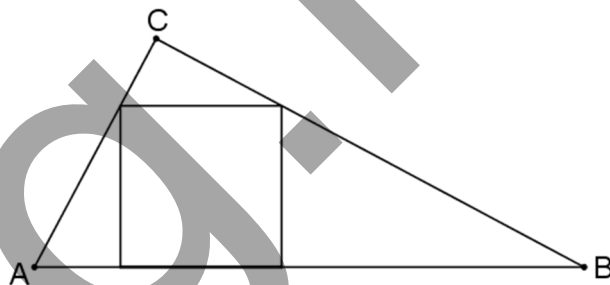
III. Gyakorlás

1) Alap

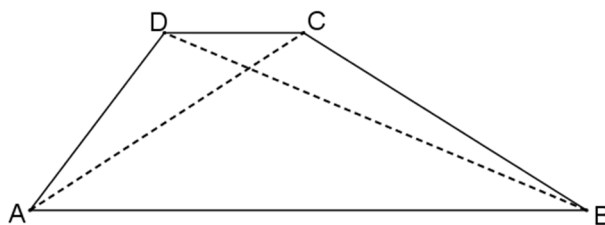
- a) Szerkessz egy $\triangle$ -be egy olyan téglalapot, mely két oldalának aránya: 2:5.



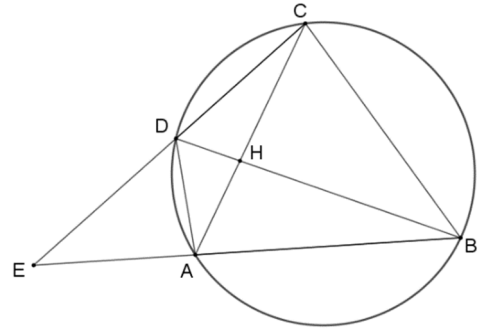
- b) Mekkora annak a négyzetnek az oldala, melyet egy $a=15$ $b=8$ $c=17$ oldalhosszú (Pitagorasz-tétele...) $\triangle$ -be szerkesztünk úgy, hogy az egyik oldala az átfogón nyugszik. Segítség: pl. kiszámolod m_c -t, mert ismered a $\triangle$ területét ($a \cdot b / 2$)...



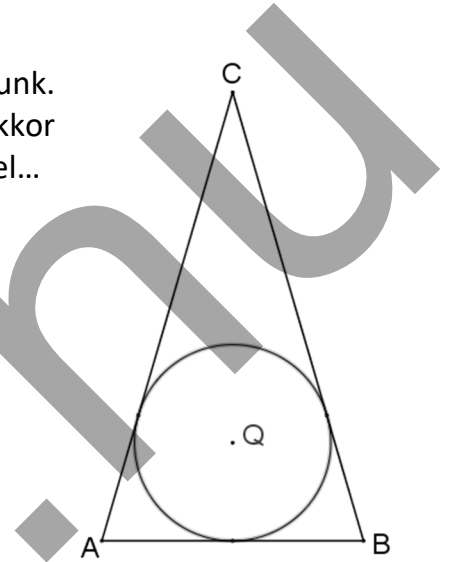
- c) Milyen arányban osztják egymást a trapéz átlói, ha a két alapja 5 és 20 cm? Számítsd ki az átlók metszéspontján áthaladó, a trapéz alapjaival párhuzamos szakasz hosszát.



- d) Húzd meg egy húrnégyszög nem párhuzamos szemközti oldalát úgy, hogy azok messék egymást, illetve húzd be a két átlóját. Keress hasonló $\triangle$ -párokat az ábrán! (Nyilván írd ide őket... ☺)



- e) Egy 14, 25, 25 cm oldalú egyenlő szárú $\triangle$ -be kört írunk. Mekkora a sugara? (Ha meghúzod m_c -t, akkor Pitagorasz...) Találsz hasonló háromszöget, ha keresel...

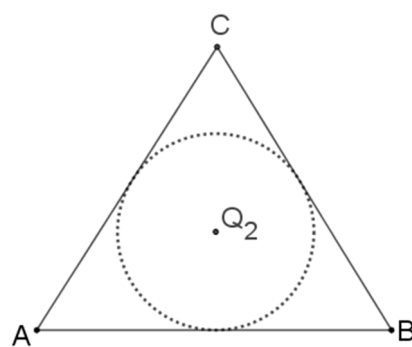
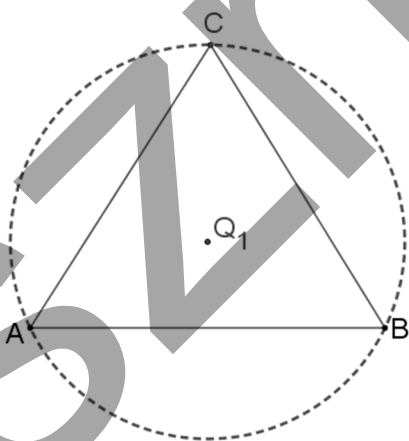
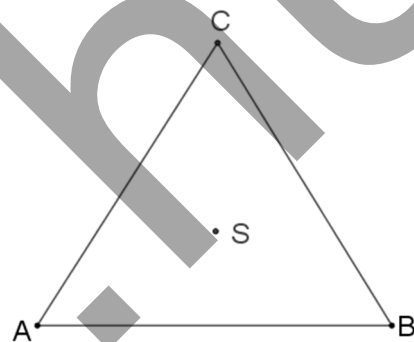
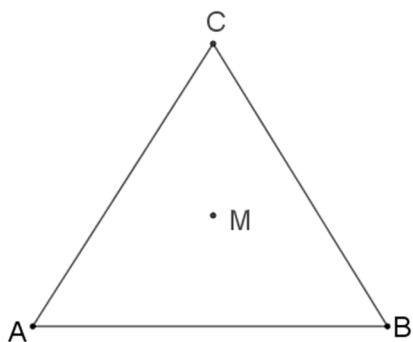


- f) Szerkesztendő derékszögű háromszög, ha adott: $b+c$ és β .

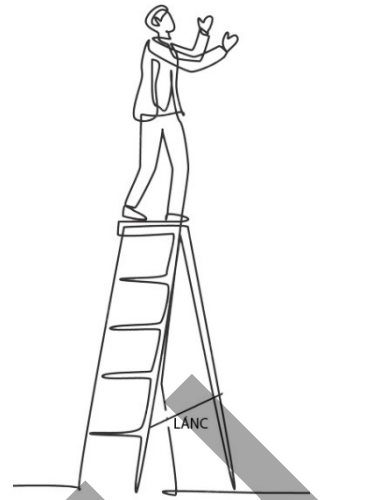
- g) Egy $a=7$ $b=5$ $c=8$ oldalú háromszögből egy, az C csúcson áthaladó egyenessel az eredetihez hasonló $\triangle$ -et vágok le. a) Hogyan kell levágni b) Mekkora lesznek az oldalai?

h) Egy $\triangle$ -ből adott: α , β és $a-b$. Szerkesztendő a $\triangle$.

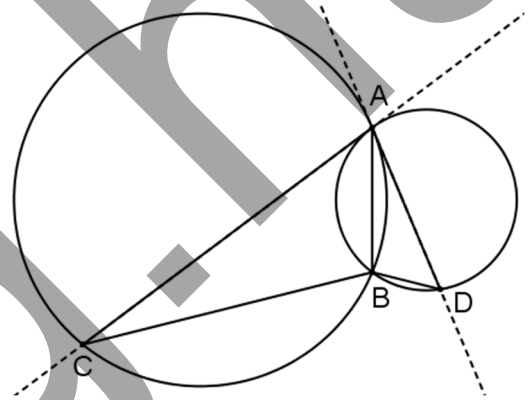
j) Egy egyenlőszárú $\triangle$ alapja 56 cm, szárai 53 cm hosszúak. Milyen távol van az M, az S, a beírt (Q_1), a köré írt kör középpontja (Q_2), alap egyenesétől?



- k) Egy létra szétnyitva 1,5 méteres „terpeszben” áll. A két fele 2,8 m magasan találkozik (ahol az ember áll). Biztosítékként lánc fogja össze a földtől 50 cm magasan a létra két lábát. Milyen hosszú a lánc, ha feszes?



- l) Adott két egymást A és B pontokban metsző kör. Az A pontban a két körhöz húzott 1-1 érintő a körökből az AC és az AD húrokat metszi. Igazoljuk, hogy $AC^2 \cdot BD = AD^2 \cdot BC$

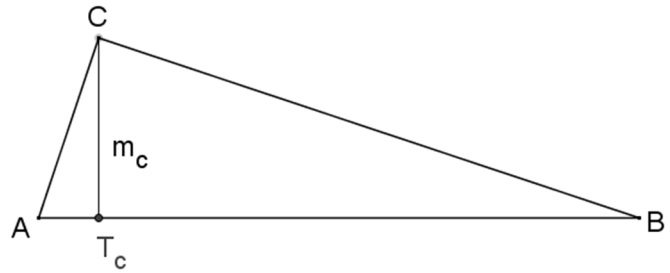


- m) Az ABCD paralelogramma két szomszédos oldala: $AB=15$ és $BC=6$ cm. Az AB meghosszabbítására B-n túl mérjük fel 5 cm-re az E pontot. A DE egyenes a BC oldalt P-ben metszi. Mekkora a PC?

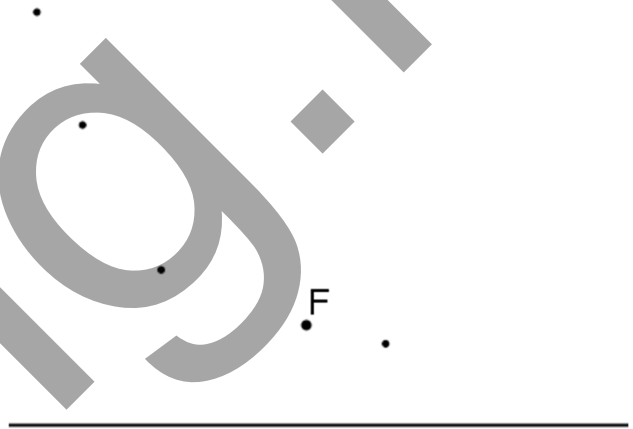
2) Hasonlósággal (is) bizonyítható ismeretek

- a) Adott egy 8 cm oldalú négyzet, és egy Q pont rajta kívül. Felnagyítom a négyzetet a kétszeresére, a képet újból és így tovább. Mekkora lesz az első 3 négyzet területösszege? * És mennyi az első 20 db-é?

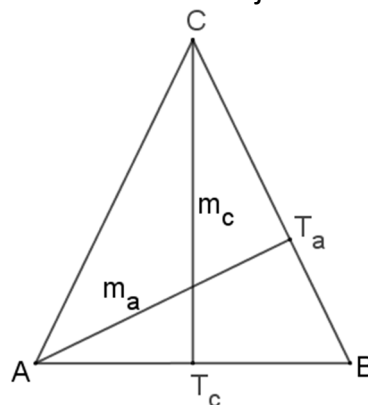
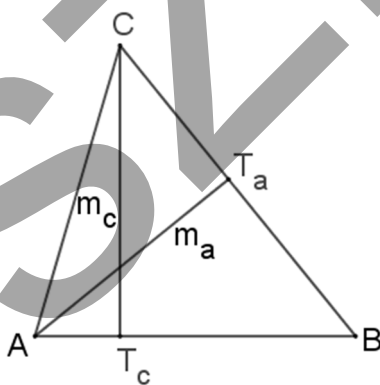
- b) Egy derékszögű háromszögben meghúzzom m_c -t. $AT_c=2$ $m_c=6$ egység. $T_cB=?$



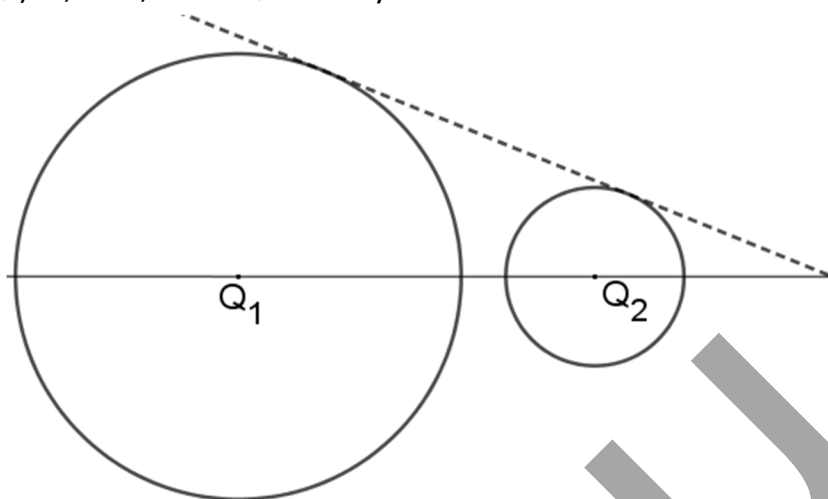
- c) Egy parabolának meg van adva a vezéregyenese, fókuszpontja. Megrajzoltuk néhány pontját.
Rajzold meg a tengelyét, csúcspontját, mérd le a paraméterét; halványan rajzold meg a parabolát, illetve egy ponthoz húzd meg a vezérsugarakat.



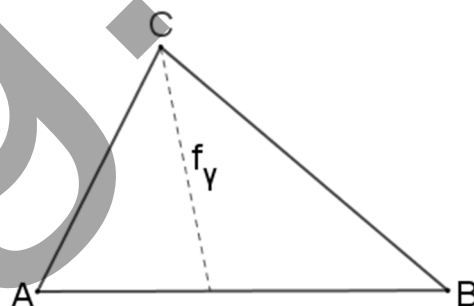
- d) Az ABC hegyesszögű $\triangle$ -ben meghúzzuk az m_c és az m_a magasságokat. Talppontjai T_c és T_a . a) Mutasd meg, hogy $BCT_{c\triangle} \approx ABT_{a\triangle}$. b) Ha $ABC_{\triangle}$ egyenlőszárú, $c=14$ cm alap és $m_a=13$, akkor az T_a mekkora részekre osztja a BC oldalt?



- e) Adott két kör: $d(Q_1; Q_2)=8$, $r_1=5$, $r_2=2$. Q_2 -től milyen távol metszi a külső érintő a centrális?



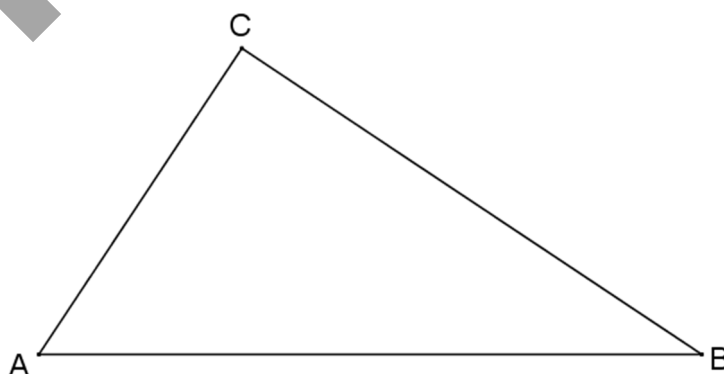
- f) Adott egy háromszög: $a=11$, $b=8$, $c=12$.
Mekkora részekre vágja f_y a c oldalt?



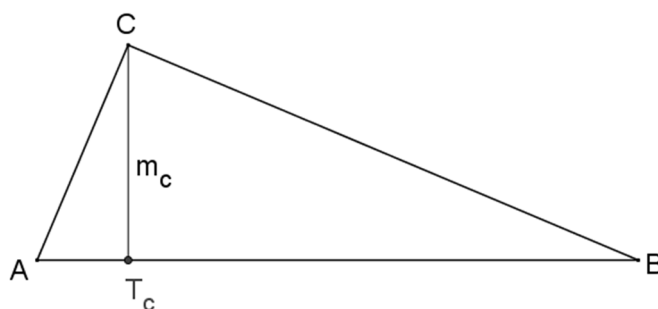
IV. Derékszögű háromszögek

- 1) Hasonló háromszögek a derékszögű háromszögnél

Egy derékszögű háromszöget szakaszokkal darabolj fel 5 db. hasonló háromszögre!



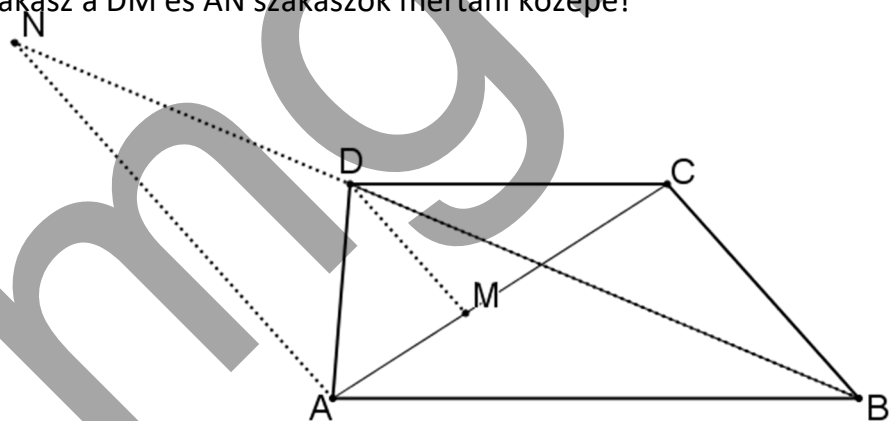
- 2) A magasságtétel
a) Bizonyítsd be a magasságtételt!



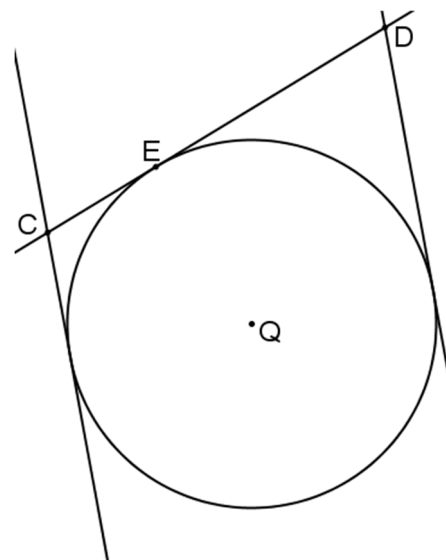
b) Egy derékszögű háromszög átfogójához tartozó magasság azt 4 és 12 cm szakaszra osztja. Mekkora a magasság és a befogók?

c) Írd föl és egyenlőtlenséget megoldva bizonyítsd be a számtani és mértani közép köti összefüggést!

* Az ABCD trapéz párhuzamos oldalai AB és CD. A D csúcson át a BC szárral húzott párhuzamos az AC átló egyenesét az M pontban, az A ponton át ugyancsak az BC szárral húzott párhuzamos az BD átló egyenesét N pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy az BC szakasz a DM és AN szakaszok mértani közepe!

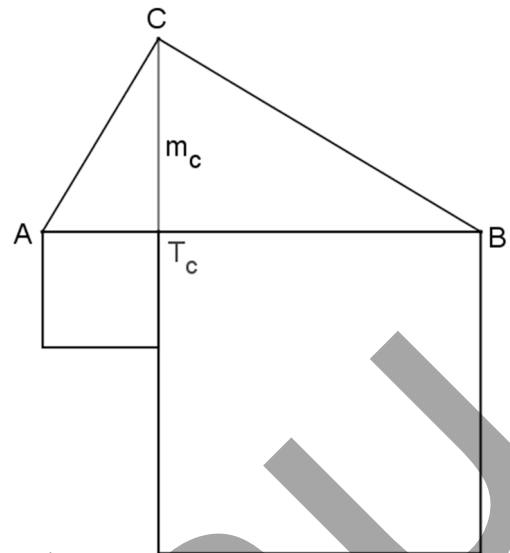


d) Egy körhöz két párhuzamos érintőt, majd egy E pontjában szintén érintőt húzok. Mutasd meg, hogy a kör sugara mértani közepe a CE és DE szakaszoknak!
(Először vizsgáld meg a $CQD_{\triangle}$ -et...)



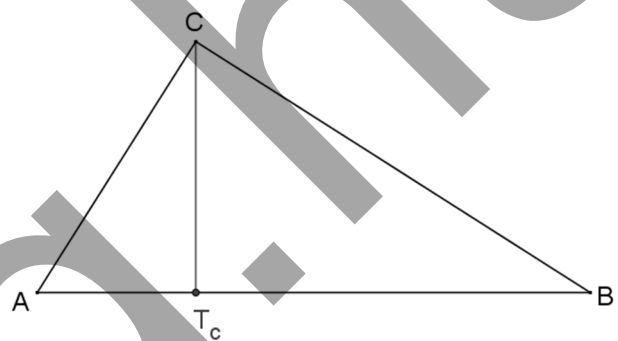
3) Befogó-tétel

Egy derékszögű $\triangle$ befogóinak aránya 5:3.
Mekkora az átfogóra eső vetületeikre emelt
négyzetek területének aránya?



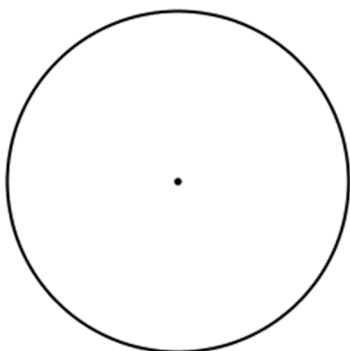
4) Gyakorló példák

- a) Egy derékszögű $\triangle$ befogóinak aránya 3:2. Az átfogónak a hozzá tartozó magasságvonal által levágott szeletei közül az egyik 2 cm-rel hosszabb a másiknál. Mekkora az átfogó?



* Adott a következő fv.: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; y = 3x^2 + \frac{27}{x^2}$ Add meg a minimumhelyeit és értékeit!

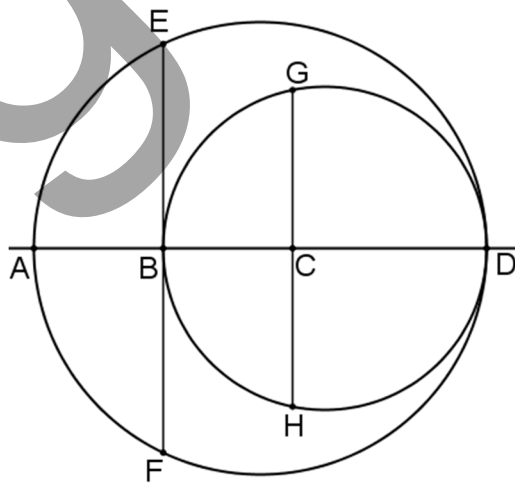
- b) Egy kör A pontjából induló átmérője AC, egy húra AB. Mutasd meg, hogy AB mértani közepe az AC-nek és az AB húr AC átmérőre vetett merőleges vetületének.



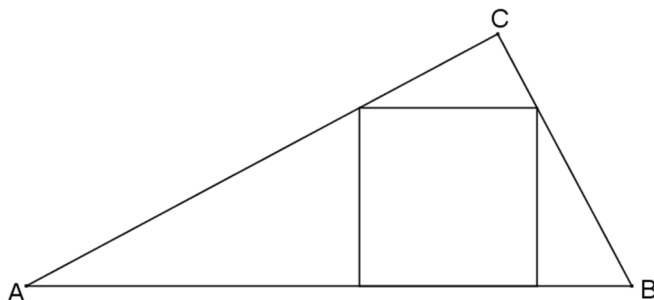
c) Egy derékszögű háromszög két befogója 33 cm és 56 cm. Az átfogóhoz tartozó magasság mekkora darabokra vágja azt?

d) Derékszögű $\triangle$ -ől: $b=5$ cm, $m_c=3$ cm. Mekkora a másik két oldal?

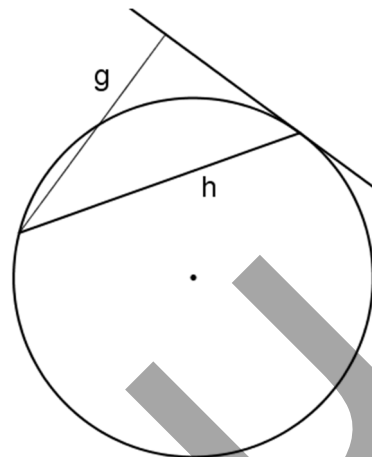
e) Az A, B, C és D pontok kollineárisak. $AB = BC$. Az AD átmérőjű kört az AD-re B-ben merőleges egyenes az E és F pontban metszi. A BD átmérőjű kört a BD-re C-ben állított merőleges egyenes a G és H pontban. Bizonyítsd be, hogy az FHGE köré írt körének B a középpontja! (Elég belátni, hogy pl. $BE=BG$, vagyishogy a négyzetük... ☺)



f) Egy derékszögű háromszögbe az átfogóra állított négyzetet írunk (két csúcsa az átfogón, egy-egy a két befogón). Mutasd meg hogy az átfogón létrejött 3 szelet közül a négyzet oldala mértani közepe a másik két szakasznak!



- g) Egy kör h húrjának egyik végpontjában érintőt húzunk, a másik végpontjából merőlegest állítunk az érintőre – g hosszúságú. Mutasd meg, hogy h mértani közepe a g-nek és az átmérőnek!



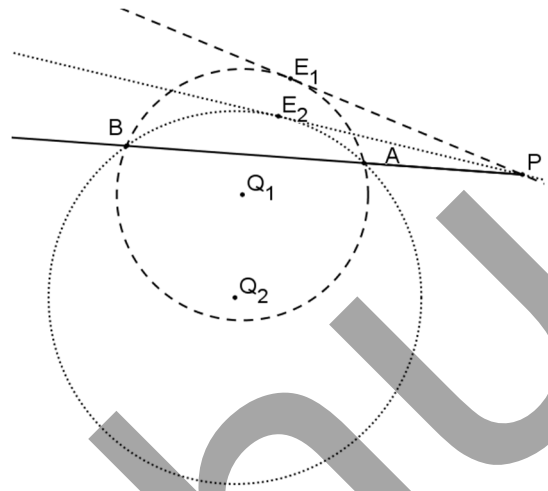
* Az ABCD parallelogramma AB oldalának P felezőpontjában merőlegest emelünk az AB oldalra. Ez a merőleges a BD átlót M-ben és az AC átlót N-ben metszi. Az átlók Q metszéspontjának merőleges vetülete AB-re a Q_1 pont. Bizonyítsuk be, hogy $\frac{1}{PM} + \frac{1}{PN} = \frac{2}{QQ_1}$

Az ABC derékszögű háromszög C derékszögű csúcsából az $AB=c$ átfogóra bocsátott magasság legyen m_c . Ennek a T_c talppontjából a befogókra bocsátott merőlegesek pedig legyenek p illetve q. Bizonyítsd be, hogy $m^3=c \cdot p \cdot q$.

V. Pont körre vonatkozó hatványának bevezetése

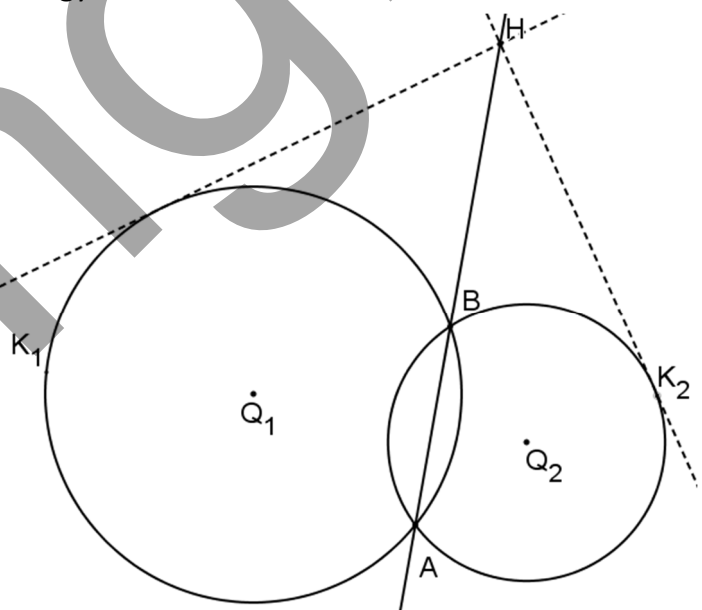
1) Külső pontból körhöz húzott érintő- és szelőszakaszok tétele

- a) Egy körhöz egy külső P pontból egy olyan szelő húzok, mely két szelőszakaszának aránya $PA:PB = 2:5$, hosszuk különbsége pedig 6 cm. Mekkora érintő húzható a körhöz P-ből?



Vedd észre, hogy mindegy, hogy mekkora a kör sugara, a PA és a PB mértani közepe az érintőszakasz. Vagyis ez azt is jelenti, hogy az AB-n áthaladó összes körhöz P-ből ugyanakkora érintő húzható!

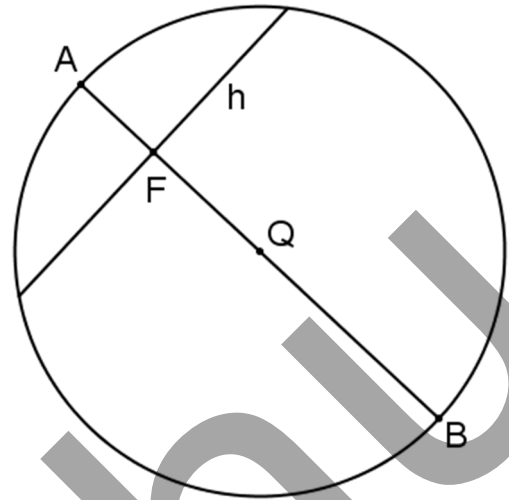
- b) Mutasd meg, hogy két metsző kör metszéspontjai által meghatározott h egyenes bármely H pontjából a két körhöz ugyanakkora érintő húzható!



Mutasd meg, hogyha két kört (K_1 és K_2) egy harmadikkal elmetszek, akkor a keletkezett két húrra illesztett két egyenes közös H pontjából azonos hosszú érintőket tudok húzni K_1 és K_2 -höz

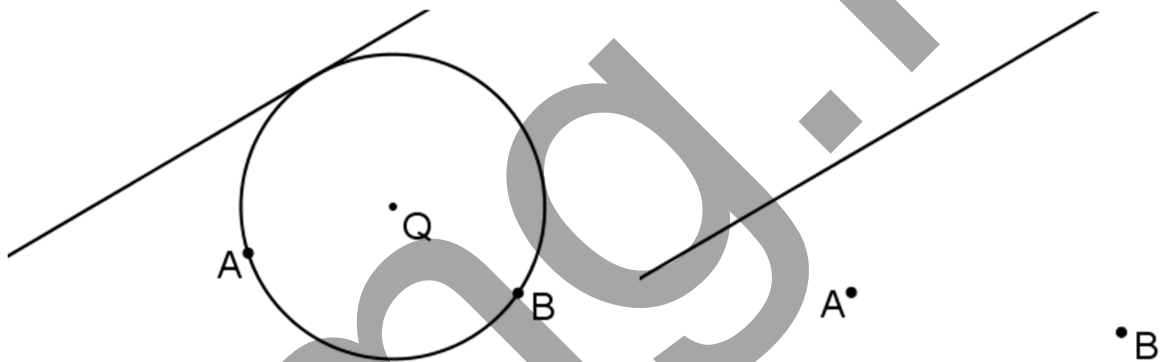
2) Belső pont – Húrtétel

Egy kör h húrjának F felezőpontján keresztül meghúzom az AB átmérőt. Igazoljuk, hogy a h -ra emelt négyzet területe négyszer akkora, mint az AF és FB oldalú téglalap területe.



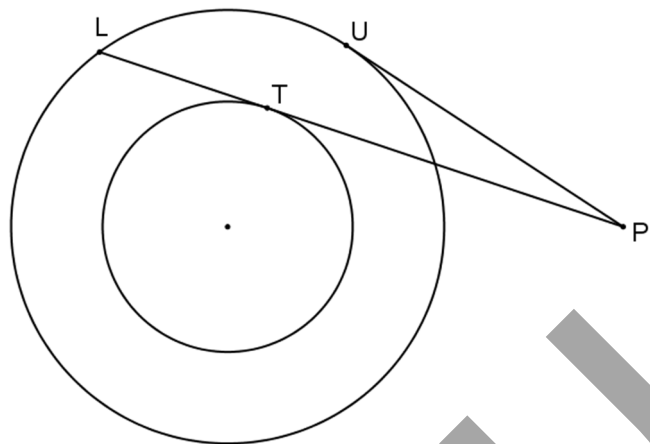
3) Példák

a) Alappélda: adott A, B , és e . Kell $k \rightarrow |e \cap k| = 1$ és $A, B \in k$

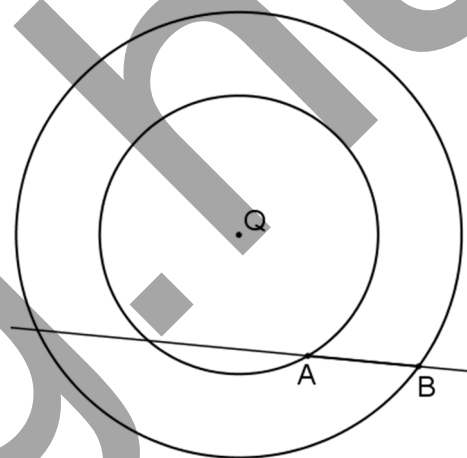


b) Egy pontból egy körhöz 12 cm sugarú érintőt tudok húzni. Ha a pontból egy szelőt húzok a körhöz, akkor a körig terjedő szakasz 9 cm. Mekkora a szelőnek a körbe eső szakasza?

- c) Adott két koncentrikus kör. Bizonyítsd be, hogy $PT^2 - PU^2 = TL^2$. PU és PT érintők!

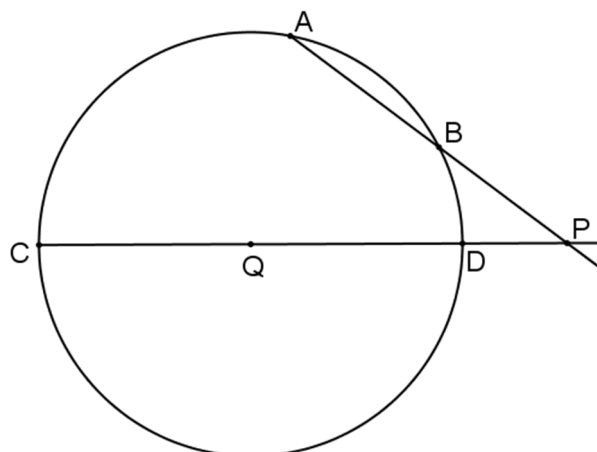


Két koncentrikus kör sugara 5 és 8 cm. Egy szelőnek a két kör közé eső AB szakasza 4 cm. Milyen távol van a szelő a középponttól?



Egy kör AB és CD húrja P pontban metszik egymást. $AB=12$ cm, $DP=4$ cm, $PC=5$ cm. Határozzuk meg a) BC és AD húrok arányát; b) AP és PB szakaszok hosszát.

Egy Q középpontú kör AB húrjára és CD átmérőjére illeszkedő egyenesek a körön kívül, P pontban metszik egymást. Mekkora a kör sugara, ha $QP = 10$ cm, $AB = 5$ cm és $BP = 4$ cm?

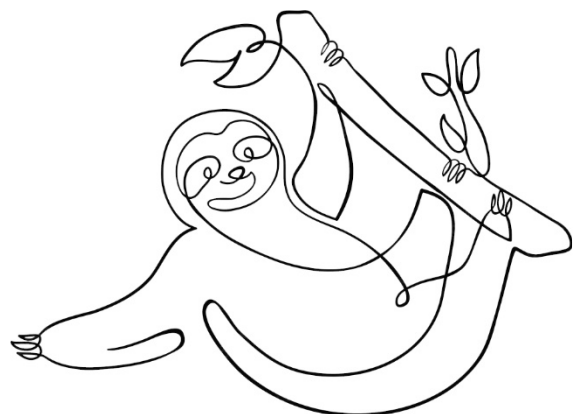


4) Tétel – háromszög szögfelezőjének hossza: $f_\gamma^2 = a \cdot b - c_1 \cdot c_2$.

a) Egy derékszögű $\triangle$ -ből adott az a két szakasz, amelyre f_γ vágja az átfogót. Szerkesztendő a $\triangle$.

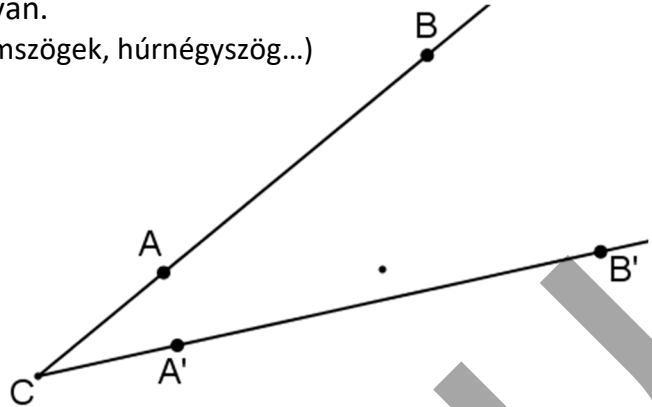
b) Egy derékszögű háromszög átfogója 10 cm, a derékszög szögfelezője pedig $\frac{27\sqrt{2}}{7}$ cm hosszú. Mekkora a befogók?

c) $\triangle$ -ből adott: $a=5$, $b=7$, $f_\gamma=4,8$. Mekkora c ?

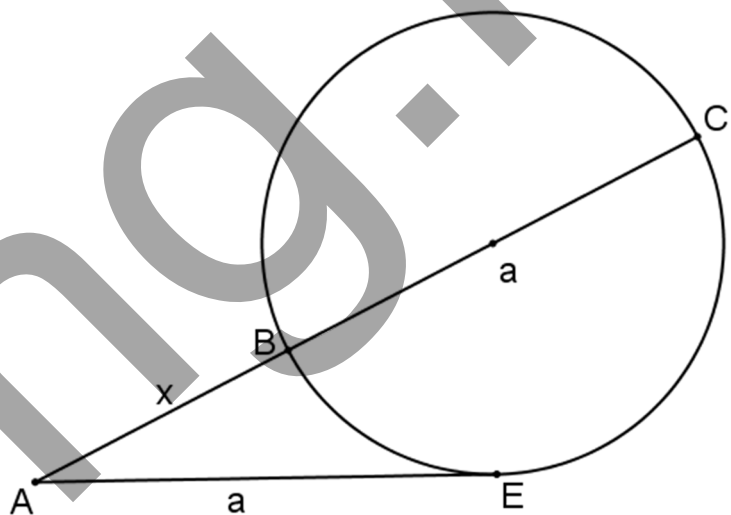


5) Pont körre vonatkozó hatványa, körhatvány

- a) Egy szög két szárán felvesszünk négy pontot úgy, hogy $PA \cdot PB = PA' \cdot PB'$. Mutasd meg, hogy a négy pont egy körön van.
(Ötlet: keresztülosztás, hasonló háromszögek, húrnégyszög...)



- b) Mutasd meg, hogy az „a” szakaszt „aranymetszéssel”: $a-x, x, a$ szakaszokra a következő módszerrel is fel lehet osztani: egy „a” átmérőjű kör, egy EA érintő, és A-ból középponton áthaladó félegyenes...



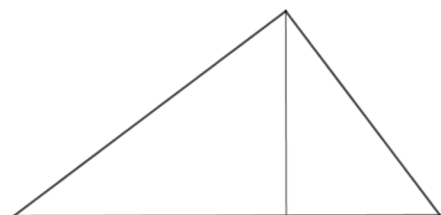
VI. Hasonló alakzatok területe, térfogata

1) Tételek

- a) Hasonló alakzatok területe

Egy háromszög oldalai 21, 28 és 35 cm. (Érdemes utánajárni: hátha Pitagorasz...)

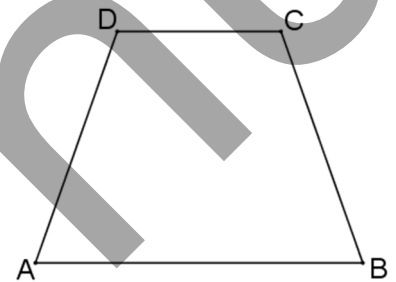
- a) Mutasd meg, hogy a leghosszabb oldalhoz tartozó magassága két hasonló háromszögre bontja. b) Mennyi a hasonlóság aránya? c) Számold ki a területüket, és számold ki a területek arányát!



- b) Hányszorosa lesz egy négyzet területe, ha
i) oldalait 4-szeresére vesszük
ii) harmadára vesszük?

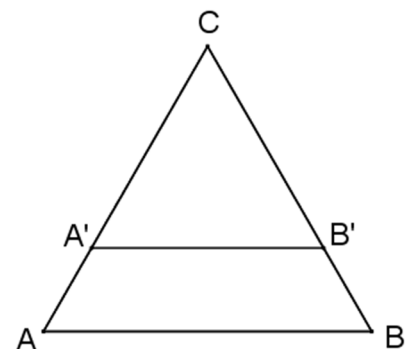
Egy háromszöget felnagyítok, és a területe a háromszorosa lett. Mekkora a nagyítás aránya?

Egy húrtrapéz párhuzamos oldalai 8 és 4 cm. A szárak hossza 6. Mekkora a kiegészítő háromszög területe (a „kalapja”)?



- c) Adott egy c oldalú négyzet, és egy $d > c$ szakasz. Erre a d szakaszra szerkesszünk két négyzetet egymás mellé úgy, hogy a területük összege egyenlő legyen a c oldalú négyzet területével! (Segítség: gondolj a Pitagorasz-tételre...)

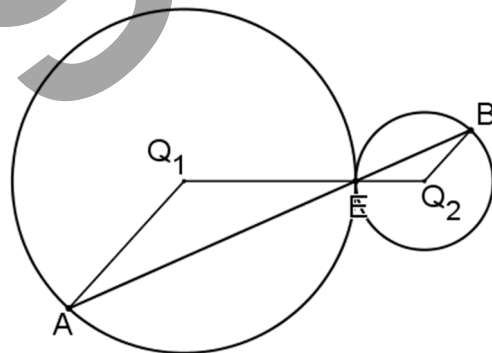
- d) Egy szabályos $\triangle$ oldala 12 cm. Az AB oldallal párhuzamos egyenes egy háromszögre és egy húrtrapézra bontja úgy, hogy a háromszög területe fele a trapézénak. a) Milyen távol fut a párhuzamos az alaptól? b) Mekkora a területek? (Segítség: gondolj bele, hogyan kell kicsinyíteni C -ből a $\triangle$ -et!)



- e) Egy $ABC\triangle$ AB oldalának belső egy belső P pontján keresztül párhuzamost húzunk a BC és az AC oldalakkal. Két háromszöget és egy paralelogrammát kapok. A kisebb háromszög területe 9, a nagyobbiké 25 egység. Mekkora az eredeti $\triangle$ területe?

* Hogyan szerkesztenél egy háromszöggel egyenlő területű négyzetet? Mutass egy eljárást!

Két kör egymást kívülről E-ben érinti. $d(Q_1; Q_2) = 40$ cm. E-n keresztül húzunk két közös szelőt, mely az két kört még A és B pontokban metszi. A két háromszög (AEQ_1 és BEQ_2) területének aránya: $T_1:T_2 = 25:4$. Mekkora a két sugár?



2) Bevezető példák

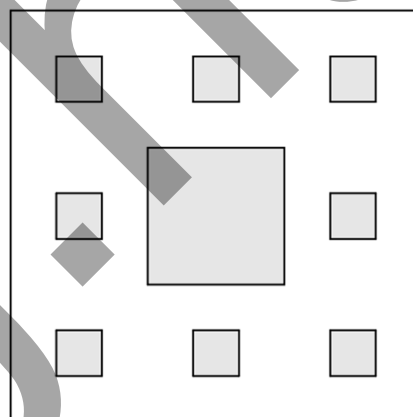
a) Alapok

Számold ki egy 12 cm oldalú négyzet területét. a) Mekkora a $\lambda=2/3$ arányú kicsinyített képének a területe? b) Mekkora a $\lambda=10$ arányú képének a területe?

Egy háromszöget a háromnegyedére kicsinyítettem ($\lambda=3/4$), így a területe 21 egységgel csökkent. Mekkora volt az eredeti terület?

b) Gyakorló példák

Sierpinski-szőnyeg. Egy T területű négyzetből kivágok egy harmad akkora oldalút középen. Majd még körben nyolc darabot, mind harmad akkora oldalú, mint az előző kivágott. Mennyi a maradék szőnyeg által letakart terület?



Három kör sugarának összege 40 cm. Mekkora a sugarak, ha a területeik aránya: 1 : 16 : 25.

Két négyszög hasonló. A kisebbik területe 30 cm^2 . Területösszegük 120 cm^2 . Kerületük különbsége 45 cm. Mekkora a kisebbik kerülete?

3) Alakzatok darabolása – és háromszög darabolás

- a) Egy 5 cm sugarú körbe egy vele koncentrikus, r sugarú kört rajzolunk. A kapott kisebb kör és a körsáv területe megegyezik. Mekkora r ?

Egy egyenlőszárú háromszög alapja 14 cm, a két szára 25 cm. a) Mekkora a magassága? b) Milyen magasan kell párhuzamosan elvágni az alaptól, hogy a levágott háromszög a harmada területű legyen?

Egy $m_c=10$ cm magasságú háromszöget az AB alappal úgy vágom el párhuzamosokkal, hogy az m_c -n keletkezett szakaszok az alaptól indulva: 6 cm; 3 cm és 1 cm legyenek. Mekkora a keletkezett területek arányai?

$\triangle$: $c=30$ cm. Vele párhuzamosan úgy vágom el, hogy a levágott trapéz területe $5/9$ -e legyen az eredeti háromszög területének. Mekkora trapéz rövidebb alapja?

Egy $\triangle$ -et az egyik oldallal párhuzamosan két egyenessel 3 egyforma területű részre vágok. Mekkora szakaszokra esik szét az oldalhoz tartozó magasság?

4) Felület - térfogat

a) Röviden a köbgyökről

Ha van pontos érték, akkor add meg, ha nincs, akkor emelj ki a gyök elé, amit lehet:

$$\sqrt[3]{5000} =$$

$$\sqrt[3]{343} =$$

$$\sqrt[3]{80} =$$

$$\sqrt[3]{250} =$$

$$\sqrt[3]{0,001} =$$

$$\sqrt[3]{343} =$$

$$\sqrt[3]{\frac{64}{81}} =$$

$$\sqrt[3]{128} =$$

b) Testek térfogata

Számold ki a 10 cm sugarú gömb térfogatát.

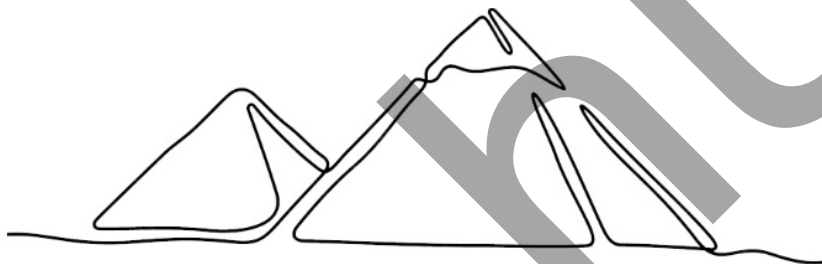
Egy téglatest térfogata 240 m^3 . Egyik éle 4 m, a másik 5. Mekkora a harmadik él?

c) Hogyan változtatja meg egy test felületét és térfogatát egy a) $\lambda=3$ b) $\lambda=2/3$ arányú hasonlóság?

d) Egy 5 cm élű kocka éleit 3-szorosára növelem. a) Hányszorosa lesz a felülete? b) Hányszorosa lesz a térfogata? c) Mennyivel változtak ezek az adatok?

e) Egy kocka térfogata 56 dm^3 -rel kisebb, mint a kétszer akkora élű kockáé. Mekkora az éle?

f) Egy piramis (négyzet alapú gúla) térfogata $60\,000 \text{ m}^3$. A magassága 50 méter. Mekkora az alapéle?



5) Gyakorlás

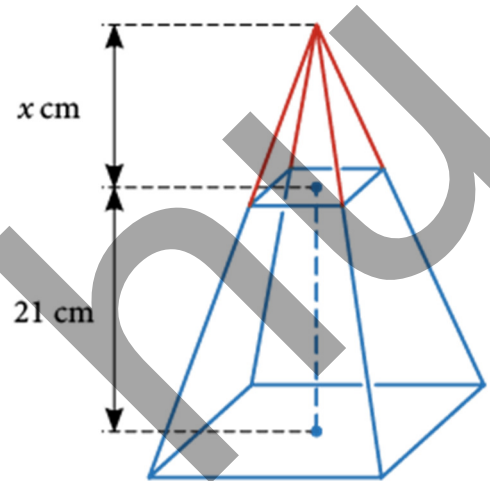
a) Hányszorosa lesz kp-os hasonlóság után a kocka térfogata, ha felülete a kilencede lett?

b) Emlékezz: Gömb térfogata: $\frac{4r^3\pi}{3}$

Egy gömböt a harmadára kicsinyíték a középpontjából, és ezt a kisebb gömböt kivágom belőle. A maradék térfogata 500 cm^3 . Mekkora az eredeti gömb sugara?

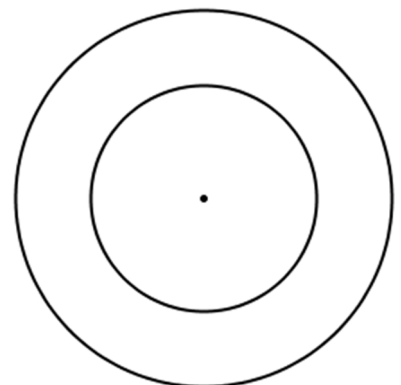
c) Egy négyzet alapú egyenes csonkagúla alapterülete 400 cm^2 (az alsó négyzet területe); fedőlapjának a területe 64 cm^2 (a felső négyzet területe), magassága 21 cm . A csonkagúlát kiegészítjük gúlává.

- Mekkora annak a középpontos nagyításnak az arányszáma, amely a kiegészítő kis gúlát a teljes gúlába viszi át?
- Számítsd ki a kiegészítő gúla magasságát!
- Mekkora a nagy gúla és a kiegészítő kis gúla térfogatának különbsége?
- Hányszorosa a csonkagúla térfogata a kiegészítő gúla térfogatának?

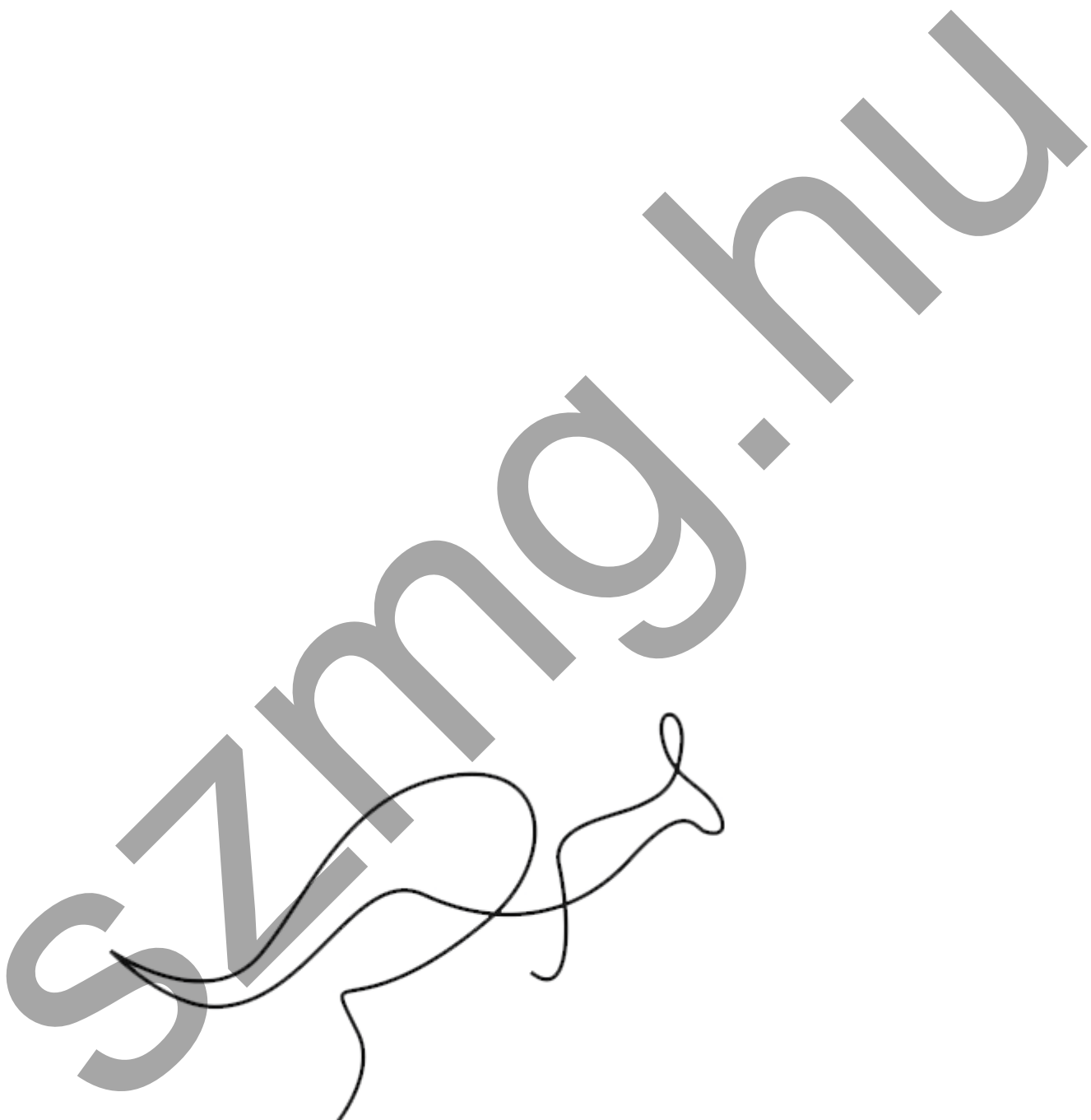


d) Egy 5 cm sugarú körből kivágok egy 3 cm sugarú koncentrikus kört – maradt egy körgyűrű.

- Mekkora a területe?
- Számold ki, hogy mekkora annak a körgyűrűnek a két sugara, amely hasonlít hozzá, és a kisebb sugár 15 cm .
- Mekkora ez utóbbinak a területe?



- e) Két kocka felületének aránya $25 : 16$. A nagyobb 2646 cm^3 -bel nagyobb térfogatú. Mekkora az éleik?
- f) Egy derékszögű háromszög két befogója: 5 és 12 cm hosszú. A hosszabbik befogóval párhuzamost húzok a beírt kör középpontján keresztül. Mekkora lesz a elvágott háromszög területe? (Érdemes emlékezni arra a tételre, hogy háromszögekben: $a+b-2p=c$)
- g) Egy üdítőitalt 34 cm magas 2 literes palackokban árusítanak. Milyen magasságúak a $0,5$ literes és az 1 literes palackok, ha a háromféle palack hasonló egymáshoz?
- h) Egy nagy vasgolyó anyagából egy millió darab kis egybevágó golyót készítünk. A kis gömbök felszínének összege hogyan viszonylik az eredeti nagy gömb felszínéhez?



Szerkesztette: Vízhányó Zsolt Sch.P. ©