

Matematika
Trigonometria
Munkatankönyv

v2.0

Szent Margit Gimnázium

szmg.hu
2022

Matematika

Trigonometria Munkatankönyv

v2.0

Szent Margit Gimnázium

szmg.hu
2022

szmg.hu

Szerkesztette: Vízhányó Zsolt Sch.P. ©

Tartalomjegyzék

Tartalomjegyzék.....	3
Trigonometria – A: Alapok, Trigonometria a derékszögű háromszögekben	7
I) A szögek mérése - (τρίγωνος + μέτρον = háromszög+ mérés)	7
I.1) Szög – mértékegysége: fok	7
I.2) Ívmérték – mértékegysége nincs, ez egy arány: a radián	8
II) A hegyesszögek szögfüggvényei és elemi összefüggéseik	11
II.1) Definíciók: figyelem, egyelőre csak hegyesszögekre dolgozunk!	11
II.2) Használatuk a mindennapi életben	12
II.3) Gyakorlás	16
II.4) Egyéb példák	17
III) Nevezetes szögek, általános szögek	18
III.1) Nevezetes szögek szögfüggvényértékei.....	18
III.2) Most csak méréssel, később pontosan számítható szögfüggvényértékek.....	19
III.3) Gyakorlás egymáshoz illesztett derékszögű háromszögekben.....	19
III.4) Szögfüggvényértékből szög – az „inverz” trigonometrikus függvények, az „arkusz” függvények.....	20
III.5) Gyakorlópéldák	21
IV) Összefüggések a hegyesszögek szögfüggvényeik között	22
IV.1) A két alaptétel: A Pitagorasz tétel, és a szögfelezőtétel – ismételjük át	22
IV.2) Pótszögek szögfüggvényértékei közti összefüggés.....	23
IV.3) Szög szinusza és koszinusza közti összefüggés – avagy egyik számíthatósága a másiktól.....	23
IV.4) Szögfüggvényértékek kifejezése egymásból.....	24
IV.5) Szög felének szögfüggvényei - bevezetése	25
V) Az ismert nevezetes háromszögek szögeinek szögfüggvényei – újra + számolás háromszögekkel	25
V.1) Nevezetes háromszögek	25
V.2) (Hegyeszögű) háromszög területe	27
VI) Gyakorlás, illetve trigonometria az eddig tanult geometriában.....	27
VI.1) Hozd egyszerűbb alakra - szögfüggvények belső összefüggései.....	27
VI.2) Béirt kör sugara.....	27
VI.3) Trapéz	28
VI.4) Szabályos sokszög	28
VI.5) A 15°-os derékszögű háromszög.....	28
VI.6) Két kör közös érintője	28
VI.7) Paralelogramma.....	29
VI.8) Téglalap.....	29
VI.9) Trapéz	29
VI.10) Trapéz kiegészítő háromszöge.....	29
VI.11) Szögfelező	30
VI.12) Érintőtrapéz	30
VI.13) Szabályos sokszög	30

VI.14)	Osztópont.....	31
VI.15)	Rácsháromszög	31
VI.16)	Két kör közös külső érintője.....	31
VI.17)	Rózsabla	32
VI.18)	Trapéz	32
VI.19)	Kerületi szögek - 1.....	32
VI.20)	Kerületi szögek - 2.....	33
VI.21)	Húrnégyszög.....	33
VI.22)	Derékszögű háromszögre vonatkozó tételek	33
VI.23)	Körhöz húzott szelőszakaszok.....	34
VI.24)	Hasonlóság – 2	34
Trigonometria – B: Vektorok		35
I)	Definíciók és alpműveletek – ahogy azt már 7. osztályban vettük.....	35
I.1)	Definíciók + elnevezések + 0	35
I.2)	Vektorok egyenlősége	35
I.3)	Összeg	35
I.4)	Különbség.....	36
I.5)	Vektor skalárszorosa (valós számmal történő szorzása)	36
I.6)	Gyakorlásuk.....	37
I.7)	Vektorok forgatása	38
II)	A lineáris kombináció.....	39
II.1)	Bevezető-példák	39
II.2)	Vektorok felbontása összetevőkre: szerkesztéssel, számítással.	40
II.3)	A lineáris kombináció fogalma:.....	42
II.4)	A lineáris függőség és lineáris függetlenség	42
II.5)	Az egyértelmű előállítás bázisból.....	43
II.6)	Generátor-rendszer és bázis	44
II.7)	Gyakorlás	45
III)	A koordináta-rendszer	46
III.1)	Vektorok az ortonormált jobbrendszer alkotó i és j bázis által generált vektortérben	46
III.2)	Namost akkor mi a koordináta-rendszerben egy pont koordinátája?.....	47
IV)	A koordinátával adott vektorok tulajdonságai, műveletek koordinátákkal adott vektorokkal.....	48
IV.1)	Tulajdonságok, műveletek	48
IV.2)	Gyakorlás	49
V)	A súlypont.....	51
V.1)	1. állítás: az egyértelműn létező Súlypont	51
V.2)	2. állítás: Súlypontból a pontrendszer pontjaiba mutató vektorok összege 0	51
V.3)	3. állítás: alpontrendszer saját súlypontjába helyezése	52
V.4)	4. állítás: pontrendszer két diszjunkt pontrendszerre bontása	52
V.5)	Pontrendszer súlyvonalának általános definíciói.....	52
VI)	Gimnáziumi súlyvonal - súlypont.....	53
VI.1)	Szakasz	53

VI.2)	Háromszög	54
VI.3)	Tetraéder súlypontja hivatalosan	54
VI.4)	Négyszög	55
VI.5)	Euler egyenes vektorokkal	55
Trigonometria – C: Szögfüggvények általános értelmezése		56
I)	Definíciók	56
I.1)	Forgásszögek	56
I.2)	Definíciók (permanencia elv!)	56
I.3)	Szemléletessé tehető a szög tangense és kotangense is	57
I.4)	Permanencia elv	58
I.5)	Figyelem: periodikus ismétlődés – nézzük meg a Geogebra-ban	58
I.6)	Előjelek	58
I.7)	A negatív forgásszög	59
II)	A szögfüggvényértékek meghatározása	60
II.1)	Ismerkedés az új definíciókkal	60
II.2)	A lényeges tartomány: $[0^\circ; 90^\circ]$	62
II.3)	Táblázat	64
II.4)	Gyakorlás	64
II.5)	Terület	65
II.6)	Trigonometrikus alapegyenletek – amikre mindent visszavezetünk	66
III)	Trigonometriai függvények: milliméterpapír!	67
III.1)	Függvényelemzés az eddigi szinten: (táblázatban, mellette, rajz)	67
III.2)	A szinusz függvény	70
III.3)	A $\cos()$ fv.	71
III.4)	A tangens fv.	72
III.5)	A cotangens fv.	73
IV)	Trigonometrikus függvénye transzformációja	74
IV.1)	Függvénytranszformációk - elméletük (ismétlése)	74
IV.2)	Trigonometrikus fv-ek transzformációja	75
V)	Szögfüggvények közti összefüggések	76
V.1)	Alap összefüggések	76
V.2)	Gyakorlás	77
V.3)	Egyéb összefüggések:	78
V.4)	Gyakorlás	79
V.5)	Addíciós (összegzési) képlet bizonyítása elemi úton	80

szmg.hu

Trigonometria – A: Alapok, Trigonometria a derékszögű háromszögekben

I) A szögek mérése - (τρίγωνος + μέτρον = háromszög+ mérés)

I.1) Szög – mértékegysége: fok

a) Definíció + jelölések

Egyenlő szögeknek egyenlő legyen a mértéke és a derékszög legyen 90°. (Be kellene látni, hogy független a mértékegységtől, additív stb. de nem tesszük.)

A változó neve általában: görög betű: $\alpha; \beta; \gamma \dots$

Mértékegysége: fok, Jele: ()° Az egység: 1°:=A derékszög 1/90-e.

A derékszög: 90°

$\Rightarrow$ egyenes szög: 180°

teljes szög: 360°

nullaszög: 0°

1°= A derékszög 1/90-e; belőle 90 db.: derékszög.

(szög)perc, (szög)másodperc:

1°=60'; 1'=60" $\Rightarrow$ 1°=3600"

$\Rightarrow$ 0,1°=6', 0,01°=36"

Számítások: általában tizedestörtben fogunk dolgozni.

<https://www.geogebra.org/m/vhgphjtz>

23,42°=

$$0,42^\circ: \left(\frac{42}{100}\right)^\circ = x' \cdot \left(\frac{1}{60}\right)^\circ \text{ (mert: } 1' = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ \Rightarrow x=25,2' \left(\frac{2}{10}\right)' = x'' \cdot \left(\frac{1}{60}\right)^\circ \Rightarrow x=12'$$

23°25'12"=?

$$23^\circ 25' 12'' = 23 + 25 \cdot \frac{1}{60} + 12 \cdot \frac{1}{3600} = 23,42$$

Számold át tizedestörtbe

23°11'51"

Számold át fok-perc-másodpercbe

22,43°

Vegyük észre: az $\frac{x}{10^n} = \frac{y}{60^k}$ egyenlethez – ha x és n $\in \mathbf{N}$ adott – mindig létezik olyan k $\in \mathbf{N}$, melyre y egész. Vagyis tizedestörtből véges lesz a fok, perc, másodperc, stb., vagyis a 60-as számrendszerbe történő átszámítása a véges tizedestöröknek mindig véges 60-as tört lesz.

I.2) Ívmérték – mértékegysége nincs, ez egy arány: a radián

a) Bevezetés

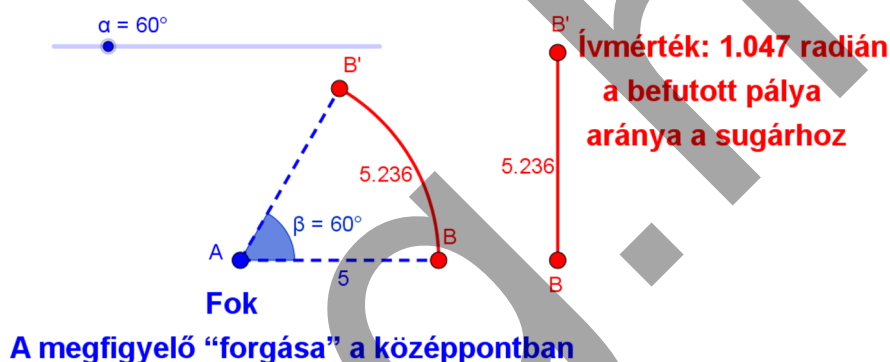
Ha egy egységsugarú kör kerületére felfeszítünk egy s hosszúságú madzagot, akkor a középpontból tekintve azt látjuk, hogy mekkora szögben tudunk elfordulni a kezdőponttól. A madzag **egység sugár esetén** s , de ha a sugarat a -val szorzom, akkor a madzag hossza $a \cdot s$ lesz, vagyis a

$\frac{\text{madzag hossz}}{\text{sugár}}$ arány állandó: ezt az arányt hívjuk a fokhoz tartozó „radiánnak”.

Például 5 egység sugárnál 60° -hoz kb. 5,236 hosszú ív tartozik, 1 egység sugárnál kb.

1,047 hosszú ív tartozik, de az arány ugyanaz: $\frac{5,236}{5} = \frac{1,047}{1} = 1,047$

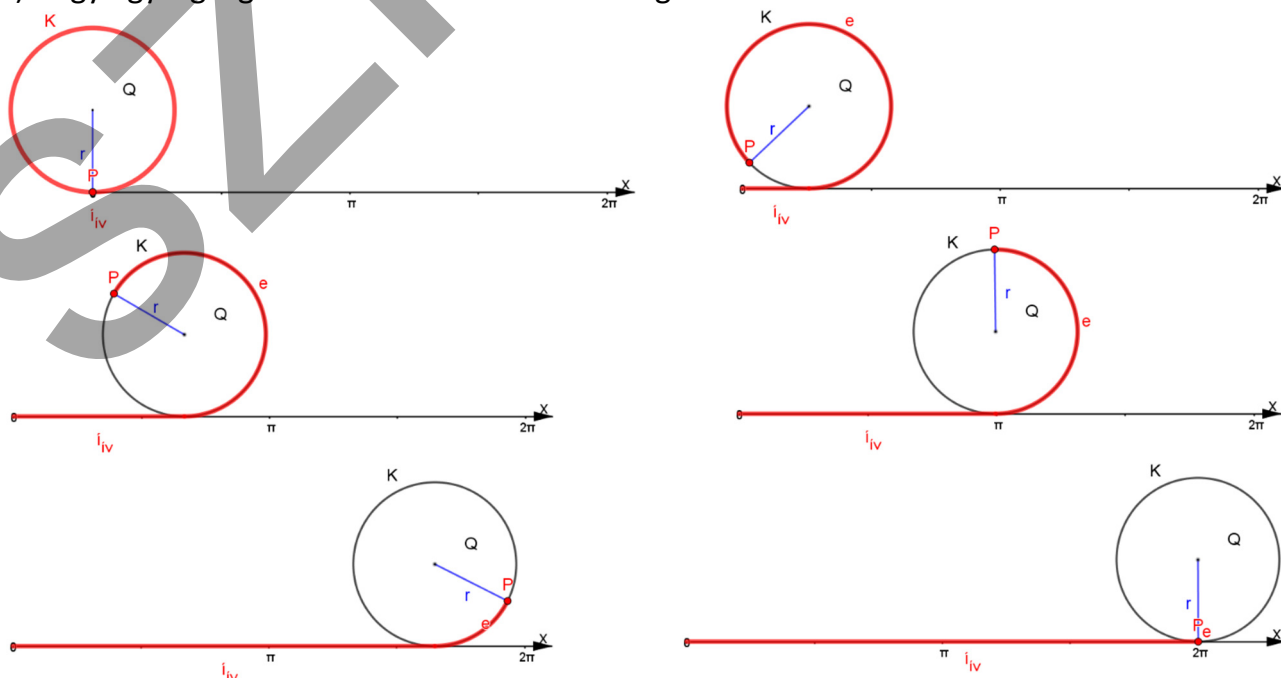
Nagyon fontos átváltás ez: mértékegységből racionális számba, hisz ennek segítségével számolható kör kerülete, területe, derékszögű háromszögnél átfogóból befogók.



Ha egy sugárnyi madzagot mérünk fel, az körülbelül $57,3^\circ$ elfordulást jelent. Ha egység hosszú sugár esetén kb. 3,14159 egység hosszú madzagot tekerünk a körre, az lesz 180° , vagyis fél körív. Ez a 3,141592653589793238462643383 (és még végtelenségig folytathatnánk) szám jele, hogy könnyen írhatjuk: π .

Olyan ez, mintha már unnánk mondani, hogy 314,159 Ft, így azt mondanánk, hogy 1€. Könnyebb azt mondani, hogy 2€, mint azt, hogy 628,308 Ft, vagy, $2/3$ € ami 209,439 Ft

b) Egy egységsugarú körrel letekeredő madzag -

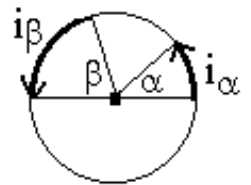


c) Az ívmérték definíciója

Egy körben egy α szöghöz egy adott hosszúságú ív tartozik.

Bizonyítható, hogy: $\frac{i_\alpha}{i_\beta} = \frac{\alpha}{\beta}$

Vagyis pl.: $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{i_\alpha}{i_\beta} = \frac{1}{2}$



Az ív tehát jó lenne egy körben a szög mérésére, de körönként más és más az ívhossz ugyanarra a szögre.

De egy α szöghöz tartozó ív és sugár aránya azonban már állandó:

Vagyis pl: a 30° -hoz tartozó ív körönként más és más, de az

$\frac{\text{ívhossz}}{\text{sugár}}$ már minden körnél ugyanannyi.



Tehát ez az arány (racionális szám) már jó szögméréshez: a neve legyen radián.

Így megvan az 1 (1 radián):

$i=r \Rightarrow \frac{i}{r}=1$ mértékegység nélküli arányszám!!!

Tehát a szög ívmértéke az a szám, ahányszor a sugarat fel tudom mérni a szög által kijelölt ívre, másképp: $\frac{\text{ívhossz}}{\text{sugár}}$.

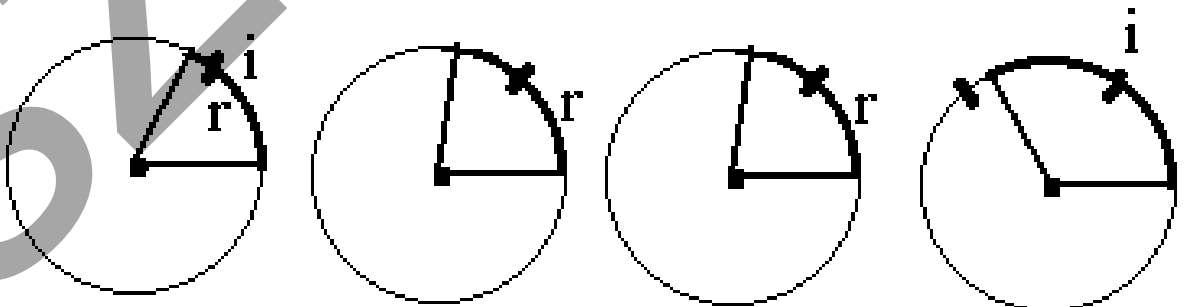
Ez pl.: 90° -nál: $\approx 1,57079632679$ radián; illetve $\approx 57,29578^\circ$ -nál ≈ 1 radián

Azért is jó, mert egység sugárnál a kerület mérőszáma a 360° hoz tartozó ívmérték,

hiszen: $360^\circ \Leftrightarrow \frac{\text{kerület}}{1} \approx 6,283185307179586476925286766559$

d) Szemléltetés

Ívmérték	→	Fok
1	→	$\approx 57,29578^\circ$
2	→	$\approx 114,59156^\circ$
0,5	→	$\approx 28,64789^\circ$
5	→	$\approx 286,4789^\circ$

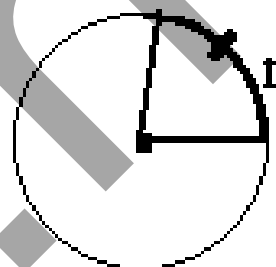
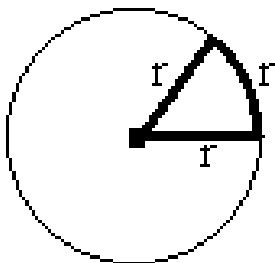


Visszafelé: $\approx 3,141592653589793 = 180^\circ$

Vagyis ha a sugarat a kerületre $\approx 3,14159$ -szer mérjük fel, akkor az 180° -os elfordulást jelent.

Ezt a számot nem lehet leírni, úgy, ahogy a $\sqrt{2}$ -t sem: helyette itt is egy jelet használunk: π .

Ívmérték	←	Fok
$\pi \approx 3,141592653589793$	←	180°
$\frac{\pi}{2} \approx 1,5707963$	←	90°
$\frac{\pi}{180} \approx 0,01745329$	←	1°
$324 \cdot \frac{\pi}{180} \approx 5,65487$	←	324°
1 rad		



e) Számítások

$$1,5 \text{ rad} \leftrightarrow ? \text{ fok: } \frac{1,5 \text{ rad}}{\pi} \cdot 180^\circ = x \text{ fok}$$

$$108 \text{ fok} \leftrightarrow ? \text{ rad: } \frac{108^\circ}{180^\circ} \cdot \pi = x \text{ rad}$$

$$\frac{3\pi}{5} = x \approx 1,88495 \Rightarrow \frac{x}{r} \approx 1,88495$$

$$0,8 \text{ rad} \leftrightarrow ? \text{ fok}$$

$$2,3 \pi \leftrightarrow ? \text{ fok}$$

$$60^\circ \leftrightarrow ? \text{ rad}$$

$$\frac{3\pi}{4} \leftrightarrow ? \text{ fok}$$

II) A hegyesszögek szögfüggvényei és elemi összefüggéseik

II.1) Definíciók: figyelem, egyelőre csak hegyesszögekre dolgozunk!

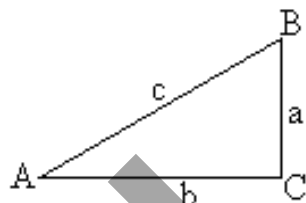
a) Szinusz

Derékszögű háromszögben az α hegyesszöggel szemközti befogónak és az átfogónak az arányát az α szög szinuszának nevezzük.

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{szöggel szemközti befogó}}{\text{átfogó}}$$

Azonban sokszor úgy dolgozunk és ezt érdemes szintén megjegyezni: **$\sin(\text{szög}) \cdot \text{átfogó} = \text{szöggel szemközti befogó}$**

A fenti ábrán: $\sin(\alpha) =$



b) Koszinusz

Derékszögű háromszögben az α hegyesszög melletti befogónak és az átfogónak az arányát az α szög koszinuszának nevezzük.

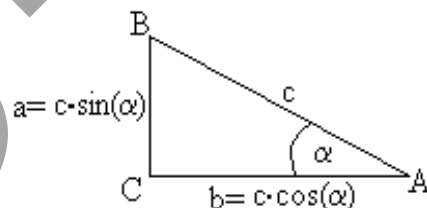
$$\cos(\alpha) = \frac{\text{szög melletti befogó}}{\text{átfogó}}$$

Azonban sokszor úgy dolgozunk és ezt érdemes szintén megjegyezni:

$\cos(\text{szög}) \cdot \text{átfogó} = \text{szög melletti befogó}$

A fenti ábrán: $\cos(\alpha) =$

Összefoglaló ábra:



c) Tangens – kotangens

Derékszögű háromszögben az α hegyesszöggel szemközti és a szög melletti befogók arányát az α szög tangensének nevezzük.

$$\text{tg}(\alpha) = \frac{\text{szöggel szemközti befogó}}{\text{szög melletti befogó}}$$

A fenti ábrán:

d) Kotangens

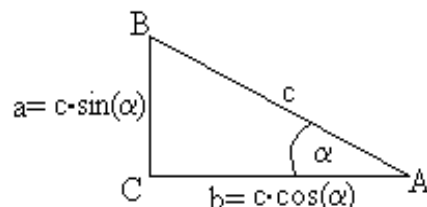
Derékszögű háromszögben az α hegyesszög melletti és a szöggel szemközti befogók arányát az α szög kotangensének nevezzük.

$$\text{ctg}(\alpha) = \frac{\text{szög melletti befogó}}{\text{szöggel szemközti befogó}}$$

A fenti ábrán:

Észrevehető, hogy hegyesszögekre: $\text{tg}(\alpha) = \frac{1}{\text{ctg}(\alpha)}$ és

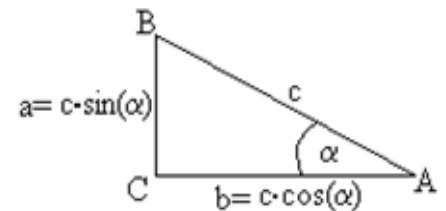
$$\text{ctg}(\alpha) = \frac{1}{\text{tg}(\alpha)}$$



Vegyük észre:

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{a}{b} = \frac{c \cdot \sin(\alpha)}{c \cdot \cos(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

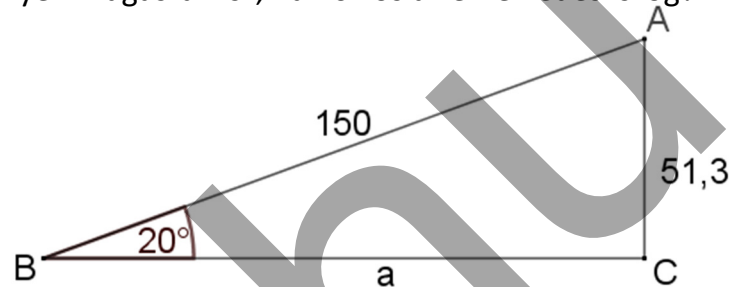
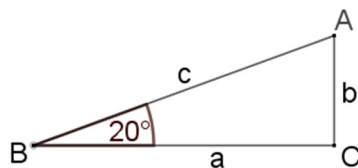
$$\operatorname{ctg}(\alpha) = \frac{b}{a} = \frac{c \cdot \cos(\alpha)}{c \cdot \sin(\alpha)} = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$$



II.2) Használatuk a mindennapi életben

a) Szinusz

- Egy emelkedő hossza 150 m. Milyen magasra visz, ha 20°-os az emelkedési szög?



Nem tudunk 150 métert rajzolni – csak hasonló $\beta=20^\circ$ -os derékszögű háromszöget.

Ekkor a mérések után kiszámítva $\frac{b}{c} \approx 0,432$ ami valójában 20° szinusza:

$$\sin(20^\circ) \approx 0,342$$

$$b = c \cdot \frac{b}{c} \Rightarrow b = c \cdot \sin(20^\circ) = 150 \cdot \sin(20^\circ) \approx 150 \cdot 0,342 \approx 51,3$$

Tehát az emelkedő kb. 51,3 m magasra visz.

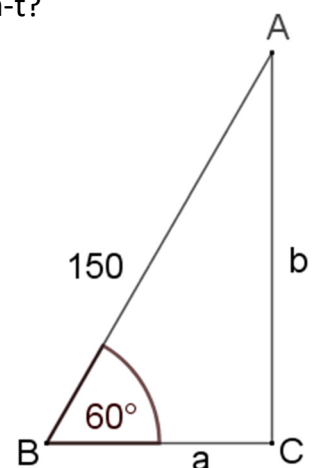
Mi van akkor, ha az emelkedő 2000 m?

$$\text{Semmi gond: } b = c \cdot \frac{b}{c} \Rightarrow b = c \cdot \sin(20^\circ) = 2000 \cdot \sin(20^\circ) \approx 2000 \cdot 0,342 \approx 684,04$$

- Milyen magasra jut a rakéta, ha 60°-os szögben repül 150 km-t?

Figyelem ezt az arányt pontosan is ki tudjuk számolni:

$$\text{Vagyis } \sin(60^\circ) =$$



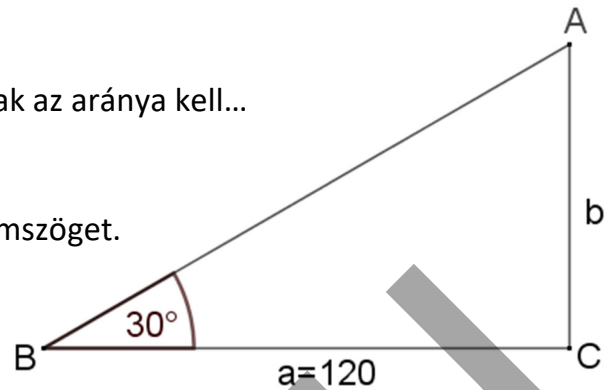
Azt a – szöghöz tartozó - szorzószámot hívjuk a szög SZINUSZÁNAK, amellyel az átfogót kell megszorozni, hogy a vele szemközti befogó hosszát megkapjuk.

b) Tangens

- Egy torony 120 m-re van. A földre helyezett (nem lábakon álló) műszer a torony csúcsát 30° -os látószögben látja (jelen esetben ez „emelkedési” szög). Milyen magasra a torony?

Most a derékszögű háromszög befogóinak az aránya kell...

Nem tudunk 120 métert rajzolni – csak hasonló $\beta=30^\circ$ -os derékszögű háromszöget.



Ekkor a mérések után kiszámítva $\frac{b}{a} \approx 0,432$ ami valójában a 30° tangense:

$$\operatorname{tg}(30^\circ) \approx 0,57735$$

$$b = a \cdot \frac{b}{a} \Rightarrow b = c \cdot \operatorname{tg}(30^\circ) = 120 \cdot \operatorname{tg}(30^\circ) \approx 120 \cdot 0,57735 \approx 69,282$$

Tehát a torony magassága kb. 69,28 m

Mi van akkor, ha 1434 méter távolságból látjuk 30° alatt a Burdzs Kalifa felhőkarcolót Dubajban? Hány méteres a felhőkarcoló?

$$\text{Semmi gond: } b = a \cdot \frac{b}{a} \Rightarrow b = a \cdot \operatorname{tg}(30^\circ) = 1434 \cdot \operatorname{tg}(30^\circ) \approx 1434 \cdot 0,57735 \approx 828 \text{ m.}$$

Nyilván, a 30° tangensét pontosan is ki tudjuk számolni:

- Milyen magasan van Júlia erkélyének a széle, ha a térdelve 140-es szemmagasságú Rómeó 75° -os emelkedési szögben látja azt az ház falától 3 m-re, de az erkély 70 cm széles.

Mo.:

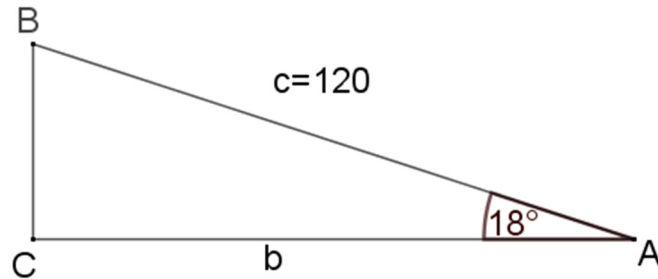
Figyelem ezt az arányt pontosan is ki fogjuk tudjuk számolni!

Tehát derékszögű háromszögben úgy kapjuk meg a szöggel szemközti befogót, ha a szög melletti befogót szorozzuk a szög tangensével.



c) Koszinusz

- Egy mérnök szánkópályát épít a fiának. Milyen messze kell a tartóállványt felállítania, ha azt szeretné, hogy 120 m-es legyen a pálya és 18° -os depressziószögben (lehajlási szög) legyen.



Nem tudunk 120 métert rajzolni – csak hasonló $\alpha=18^\circ$ -os derékszögű háromszöget.

Ekkor a mérések után kiszámítva $\frac{b}{c} \approx 0,951$ ami valójában 18° koszinusza:

$$\cos(18^\circ) \approx 0,9510565$$

$$b = c \cdot \frac{b}{c} \Rightarrow b = c \cdot \cos(18^\circ) = 120 \cdot \cos(18^\circ) \approx 120 \cdot 0,951 \approx 114,1$$

Tehát az állványt 114,1 m-re kell elhelyezni a beérkezési ponttól.

Egy tanár csak 20 m-es pályát tud készíteni. Milyen messze legyen az állvány?

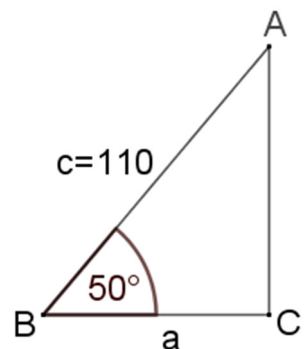
$$\text{Semmi gond: } b = c \cdot \frac{b}{c} \Rightarrow b = c \cdot \cos(18^\circ) = 20 \cdot \cos(18^\circ) \approx 20 \cdot 0,951 \approx 19,02 \text{ m.}$$

Figyelem ezt az arányt pontosan is ki fogjuk tudjuk számolni!

Tehát derékszögű háromszögben úgy kapjuk meg a szög melletti (átfogó alatti) befogót, ha az átfogót szorozzuk a szög koszinuszával.

- Egy tévétorony csúcsát 110m-es pányva köti a földhöz, melynek az emelkedési szöge 50° Milyen távol van a pányva rögzítése a TV torony aljától?

Mo.:

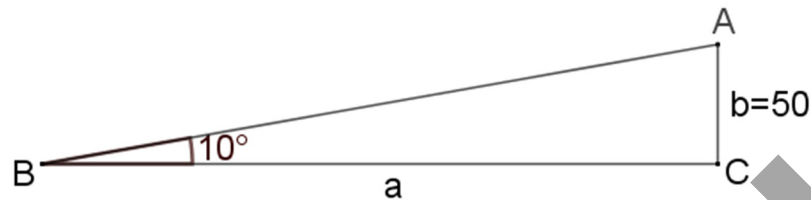


d) Kotangens

- A Champs-Élysées (Sa(n)zelizé) sugárúton sétálunk. A Diadalív magasságát tudjuk: 50 m. Mennyit kell még sétálnunk, hogyha 10-fokos emelkedési szögben látjuk azt?

Most a derékszögű háromszög befogóinak az aránya kell...

Nem tudunk 50 métert rajzolni –
csak hasonló $\beta=10^\circ$ -os derékszögű háromszöget.



Ekkor a mérések után kiszámítva $\frac{a}{b} \approx 5,671$ ami valójában a 10° kotangense:

$$\text{ctg}(10^\circ) \approx 5,671$$

$$a = b \cdot \frac{a}{b} \Rightarrow a = b \cdot \text{tg}(10^\circ) = 50 \cdot \text{tg}(10^\circ) \approx 50 \cdot 5,671 \approx 283,6$$

Tehát még a 283,6 métert kell gyalogolni.

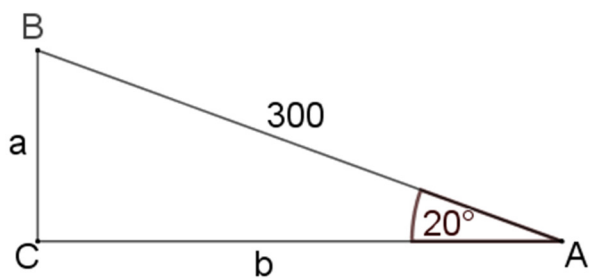
- A 100 m magas Megyeri híd tetejét a Dunáról 8° -os emelkedési szögben látjuk. Mennyit kell még evezni a pillérig.
Mo.:

Tehát derékszögű háromszögben úgy kapjuk meg a szög melletti befogót a szöggel szemközti hosszából, ha a szöggel szemközti befogót szorozzuk a szög kotangensével.

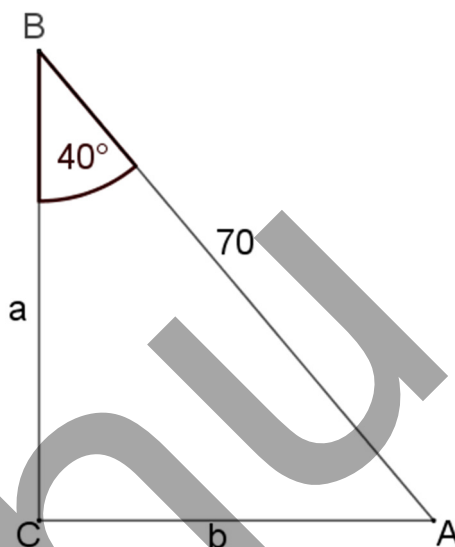
II.3) Gyakorlás

SZÁMOLÓGÉP HASZNÁLATA!

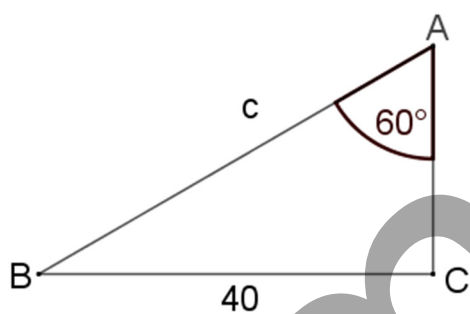
Kell „a” és „b”



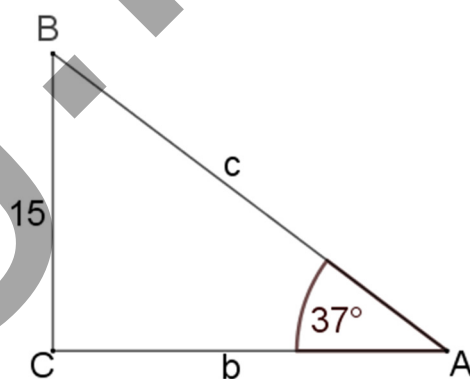
Kell „a” és „b”



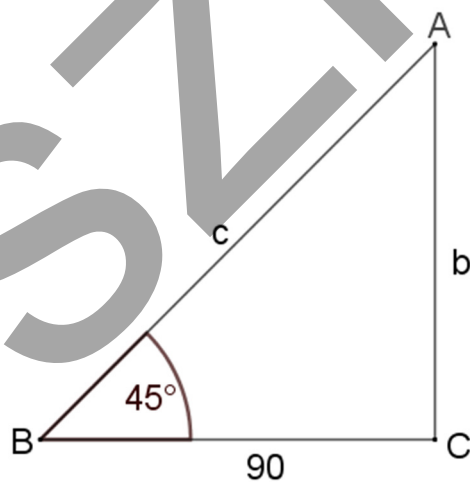
Kell „c” és „b”



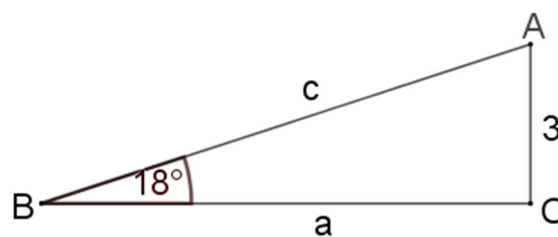
Kell „b” és „c”



Kell „b” és „c”

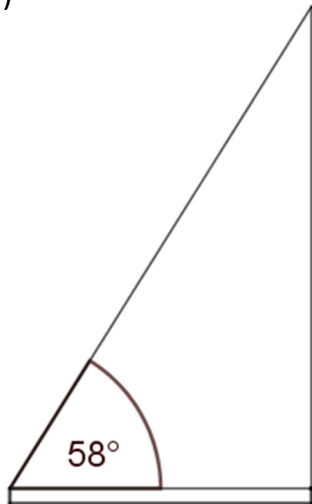


Kell „a” és „c”

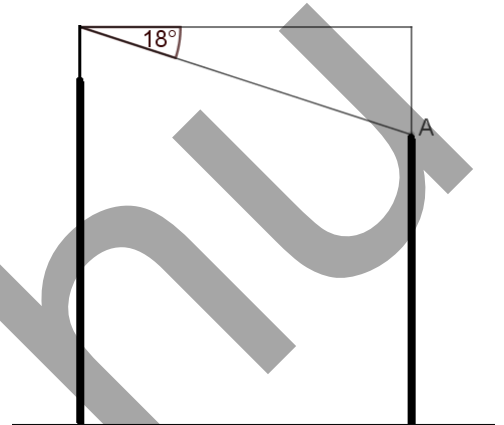


II.4) Egyéb példák

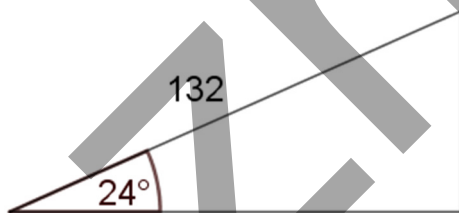
- a) Vízszintes, sík talajon álló kémény tetejét, a tőle 48 m távolságban lévő 1,5 m magas állványon álló *teodolittal* 58° -os emelkedési szögben látjuk. Milyen magas a kémény? (Nézz utána a neten, hogy mi a **teodolit**!)



- b) Egy toronyból 18° -os depressziós szögben látjuk a szomszéd ház ablakát (a párkányt). A torony tetején a padló 30 m magasan van, a szemmagasságunk 1,7 m-en van. Milyen magasan van a párkány, ha a torony és épület közti távolság az utcán 15 m.



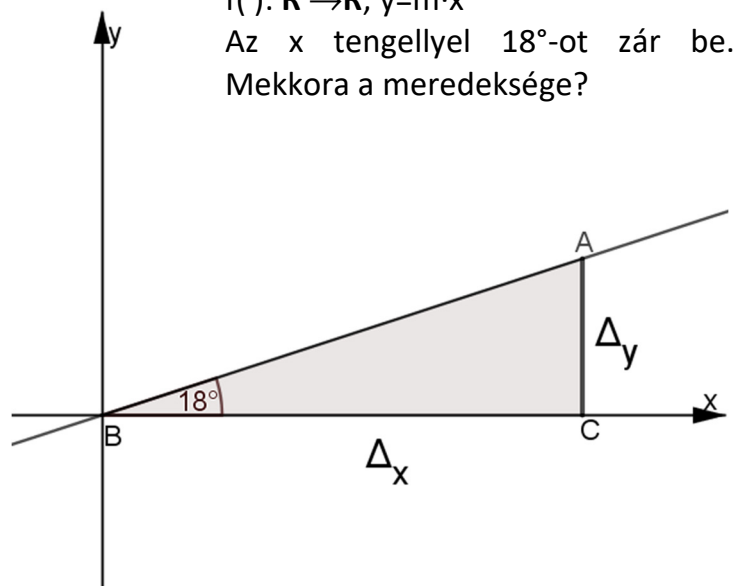
- c) Hegyoldalban egyenes vonalú felvonópálya hossza 132 m. Emelkedési szöge 24° . Milyen magasra visz, és mekkora a pályának a vízszintes síkon lévő merőleges vetülete?



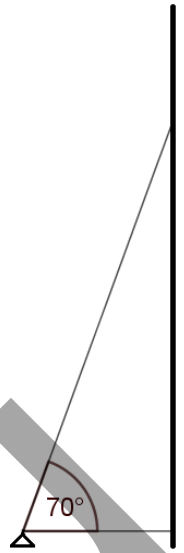
- d) Adott egy lineáris függvényünk (valójában egy „egyenese-arányosság”). Mivel az origón halad át, ezért a definíciója:

$$f(): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y = m \cdot x$$

Az x tengellyel 18° -ot zár be. Mekkora a meredeksége?



- e) Egy TV-torony magassága 90 m. A pányvázáshoz használt drótkötelet egy 1 m magas betondomb tetején rögzítik, és a torony csúcsától 10 m-re kötik a toronyhoz. A rögzítés helyét a betondomb tetejétől 70° -ban látni. Milyen hosszú drótkötél kell?



III) Nevezetes szögek, általános szögek

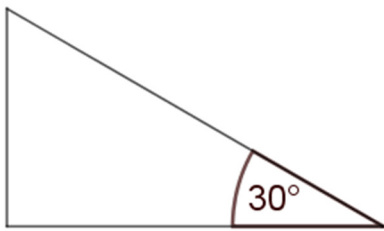
III.1) Nevezetes szögek szögfüggvényértékei

Számítsuk át a szögeket radiánba, a radiánt szögekbe. Tudjuk is fejből ezeket az átszámításokat!

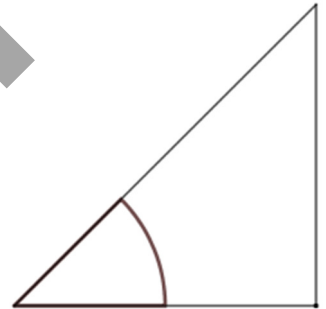
Számítsuk ki vonalzóval történő mérés és számológép segítségével a közelítő szögfüggvényértékeiket. Utána számítsuk ki a pontos értékeket – Pitagorasz tétellel

Tudjuk fejből a $\pi/3$, $\pi/4$, $\pi/6$ összes pontos szögfüggvényértékét!

$30^\circ \leftrightarrow$ radián



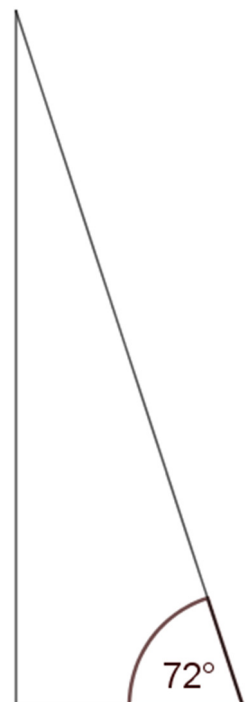
$\pi/4 \leftrightarrow$ fok



$60^\circ \leftrightarrow$ radián



$\frac{2\pi}{5} \leftrightarrow$ fok

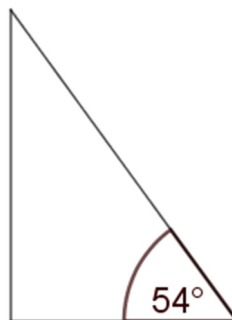
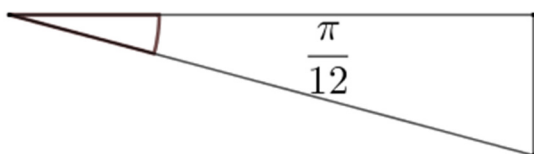


III.2) Most csak méréssel, később pontosan számítható szögfüggvényértékek

„Ami körző-vonalzóval szerkeszthető, az pontosan számítható; ami másodfokú egyenlettel számítható, az szerkeszthető.”

$$\frac{\pi}{12} \leftrightarrow \text{fok}$$

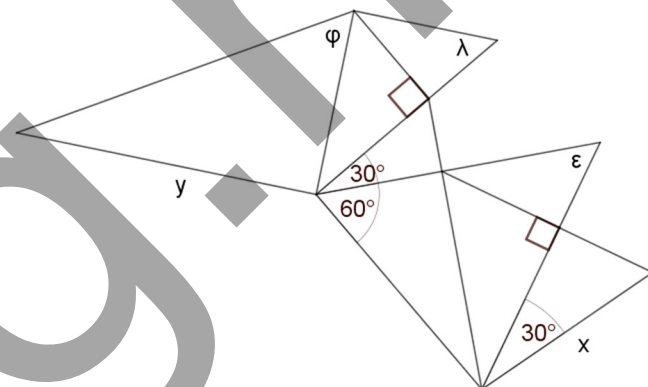
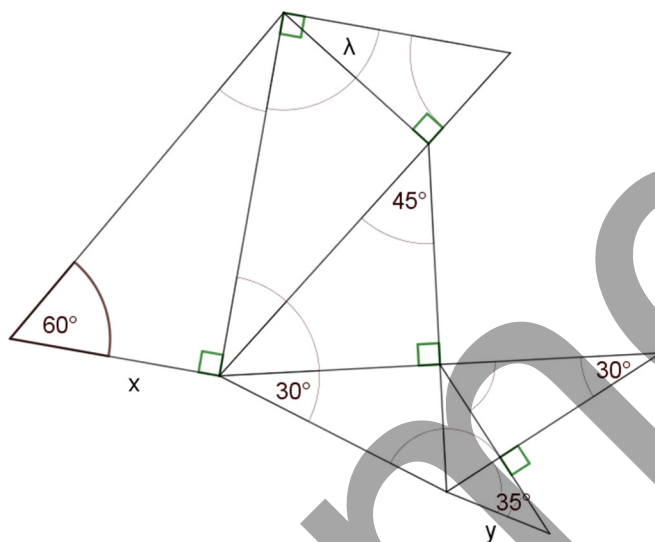
$$54^\circ \leftrightarrow \text{radián}$$



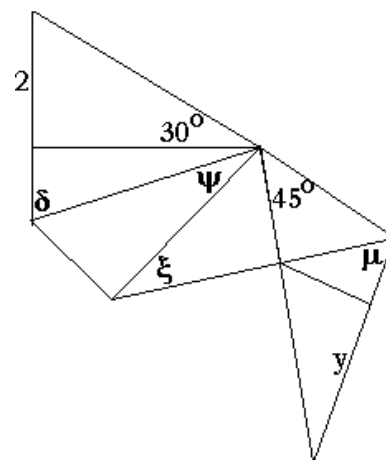
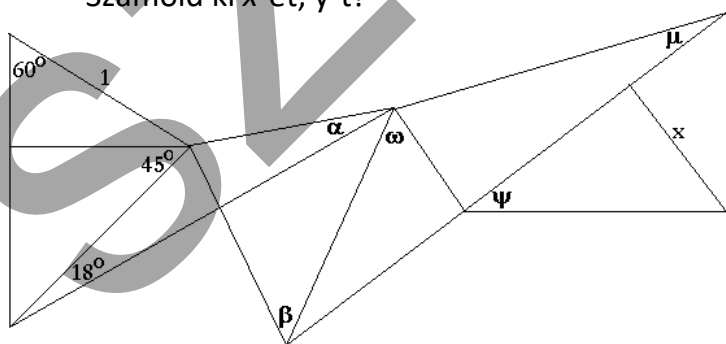
III.3) Gyakorlás egymáshoz illesztett derékszögű háromszögekben

Fejezd ki x-ből y-t.

Fejezd ki x-ből y-t.



Számold ki x-et, y-t!



III.4) Szögfüggvényértékből szög – az „inverz” trigonometrikus függvények, az „arkusz” függvények

$\arcsin() - \sin^{-1}()$; $\arccos() - \cos^{-1}()$; $\operatorname{arctg}()$ v. $\arctan() - \operatorname{tg}^{-1}()$; $\operatorname{arcctg}()$ v. $\operatorname{arccot}() - \operatorname{tg}^{-1}()$;

Keresd vissza a következő hegyesszögek mértékét a szögfüggvényértékből! (Amit nem ismerünk, azt számológéppel). Ahol görög betű, ott szög, ahol latin abc, ott ívmérték kell!

$$\sin(x) = 0,7 \quad x =$$

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \alpha =$$

$$\operatorname{tg}(y) = 1 \quad y =$$

$$\sin(\beta) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \beta =$$

$$\operatorname{ctg}(w) = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad w =$$

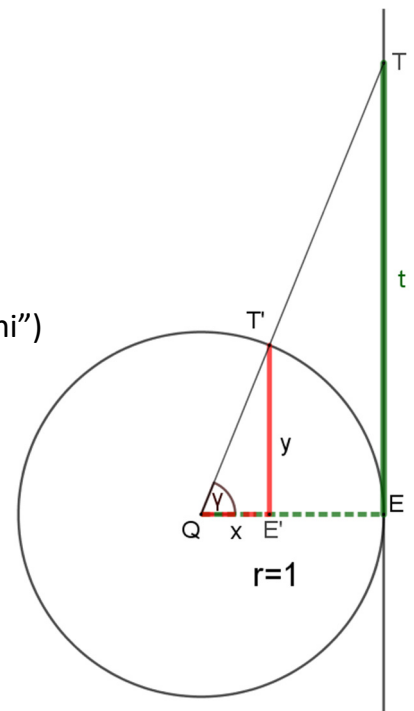
$$\operatorname{tg}(\varphi) = 15 \quad \varphi =$$

Függvényértékből szög szerkesztése

$\cos(\xi) = 0,4$ Szerkeszd meg ξ -t!

$\operatorname{ctg}(\mu) = 3,5$ Szerkeszd meg μ -t!

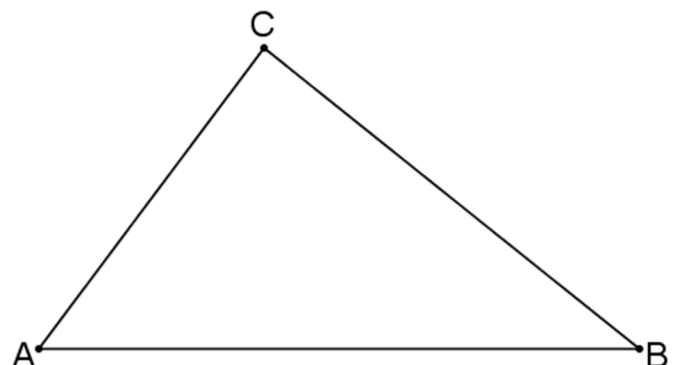
A tangens szemléltetése (tango tangere tetigi tactus = „érinteni”)



Egy háromszög két oldala $b=5$, $c=8$ egység.

A területe 16 egységnégyzet.

Mekkora α ?

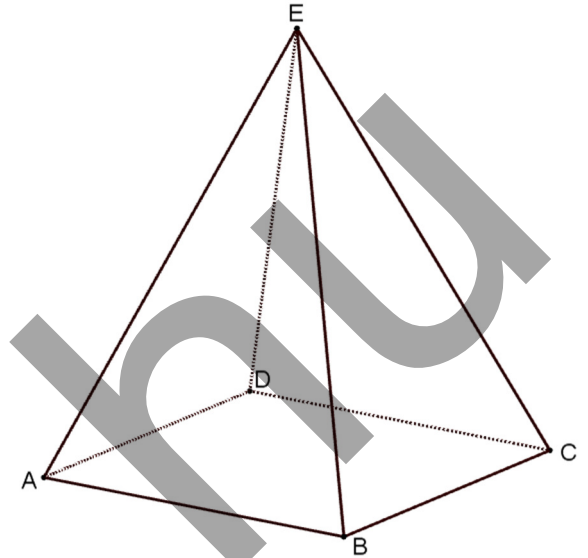


III.5) Gyakorló példák

a) Szabályos gúla

Egy szabályos gúla minden alapéle 8 cm hosszú, oldallapjainak és alapsíkjának hajlásszöge $68,198^\circ$. Számítsuk ki a gúla magasságát, oldaléleinek hosszát és az oldalélek alapsíkkal bezárt szögét.

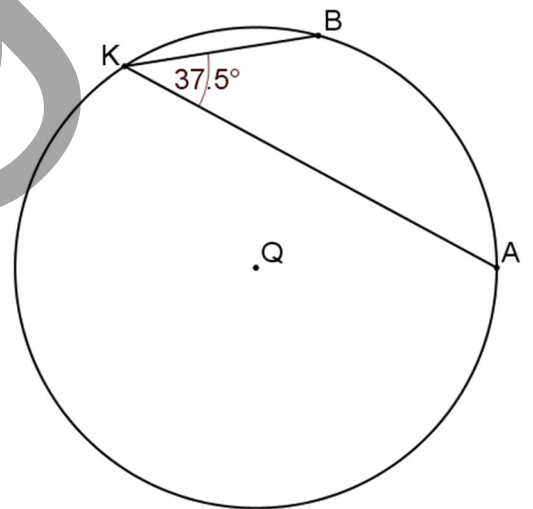
(n oldalú gúla szabályos, ha alaplapja szabályos n -szög, magasságának talppontja az alaplap középpontja)



b) Kör szeletelés

Egy 8 cm sugarú kört egy $37,5^\circ$ -os kerületi szöghöz tartozó húrral két körszeletre vágunk szét. Számítsuk ki a körszeletek területét!

Mo.:



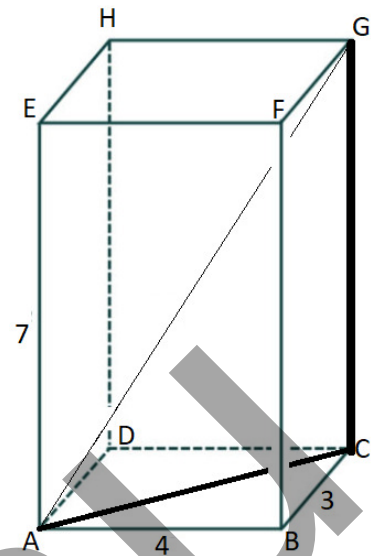
c) Egyenlet területtel

Egy egyenlőszárú háromszög alapja c , két szára a és b . $T=108$, $c+m_c=30$. Mekkora a szögei?

Mo.:

d) Hasáb testátlója

Egy téglalap alapú hasáb élei 4, 3, 7. Mekkora szöget zár be az AG testátló az AC lapátlóval? (Ez egyben az AG és az alaplap szöge is, mert az AG merőleges vetülete az alaplapon az AC)



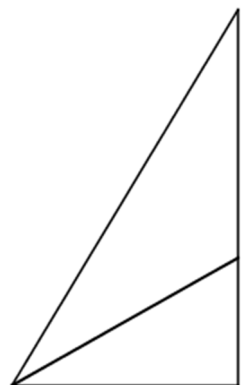
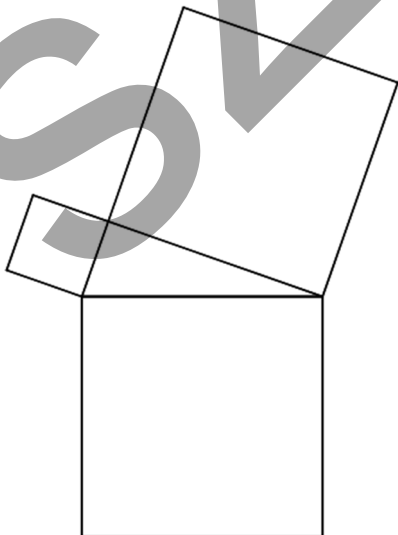
e) Sík dőlésszöge

Egy kombi autóba be szeretnének rakni egy $55 \times 120 \times 130$ -as dobozt. A hátsó ajtó merőlegesen zár ugyan, de a hátsó ülések dőlésszöge a csomagtartó aljához képest 70° -os. A csomagtartó szélessége 140 cm, magassága 80 cm, az alja a hátsó ajtótól előre a hátsó ülések aljáig 140 cm. Befér-e a csomagtartóba a doboz?

IV) Összefüggések a hegyesszögek szögfüggvényeik között

Figyelem, minden összefüggés – előjelekkel kiegészítve – igaz lesz a szögfüggvények általános értelmezése után is!

IV.1) A két alaptétel: A Pitagorasz tétel, és a szögfelezőtétel – ismételjük át



IV.2) Pótszögek szögfüggvényértékei közti összefüggés

- a) Elv: $\alpha + \beta = 90^\circ$ Ekkor:

$$\frac{b}{c} = \sin(\beta) = \cos(\alpha)$$

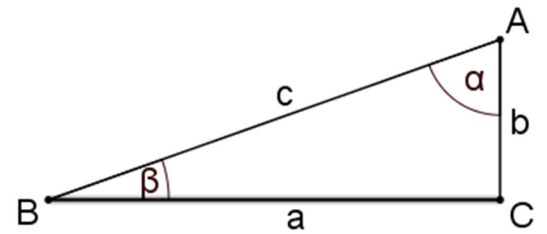
Így:

$$\cos(\kappa) = \sin(90^\circ - \kappa)$$

$$\sin(\kappa) = \cos(90^\circ - \kappa)$$

$$\operatorname{tg}(\kappa) = \operatorname{ctg}(90^\circ - \kappa)$$

$$\operatorname{ctg}(\kappa) = \operatorname{tg}(90^\circ - \kappa)$$



Vagyis hegyesszög szinusa megegyezik pótszögének koszinuszával (vice versa), illetve hegyesszög tangense megegyezik pótszögének kotangensével (vice versa).

- b) Gyakorlás:

$$\sin(37^\circ) = \cos(\quad)$$

$$\operatorname{tg}(19^\circ) = \operatorname{ctg}(\quad)$$

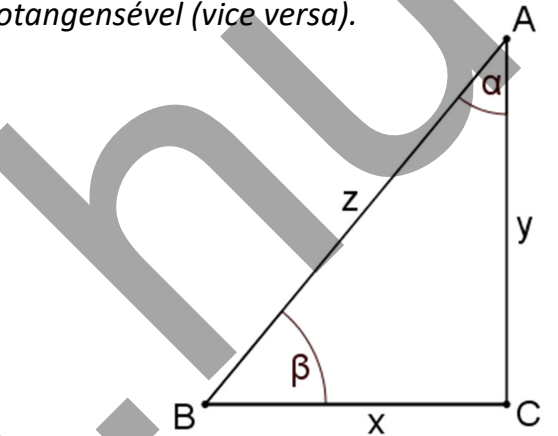
$$\cos(61^\circ 20') = \sin(\quad)$$

Mindent $90^\circ - \alpha$ -val!

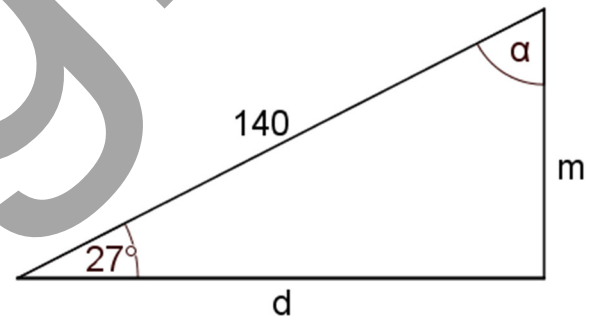
$$\frac{x}{y} =$$

$$\frac{y}{z} =$$

$$\frac{z}{x} =$$



Fejezd ki m -t $\cos$ -szal, d -t $\sin$ -szal!



Számítsuk ki a hegyesszög nagyságát, ha: $\sin(2\alpha + 12^\circ) = \cos(\alpha - 20^\circ)$

IV.3) Szög szinusa és koszinusa közti összefüggés – avagy egyik számíthatósága a másiktól

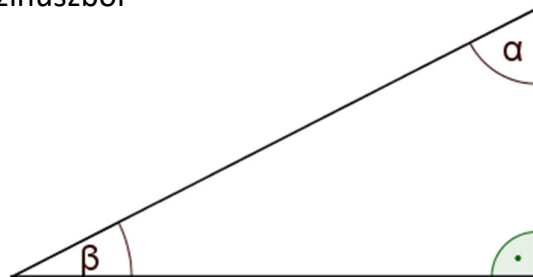
$$\text{Áll.: } \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

$$\Rightarrow \sin(\alpha) =$$

$$\cos(\alpha) =$$

IV.4) Szögfüggvényértékek kifejezése egymásból

a) A tangens és kotangens számítása szinusz és koszinusból



Mutasd meg hogy $(\sin(40^\circ) + \cos(40^\circ))^2 = 1 + 2 \cdot \sin(50^\circ) \cdot \cos(50^\circ)$

b) Táblázat

	sin-szal	cos-szal	tg-el	ctg-el
$\sin(\alpha) =$	–	$\sqrt{1 - \cos^2(\alpha)}$	$\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$	HF
$\cos(\alpha) =$	HF	–	HF	HF
$\operatorname{tg}(\alpha) =$	$\frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{1 - \sin^2(\alpha)}}$	HF	–	HF
$\operatorname{ctg}(\alpha) =$	HF	HF	HF	–

Segédszámolás: $\sin(\alpha)$ kifejezése $\operatorname{tg}()$ -ból:

1. módszer – fejezzük ki $\sin(\alpha)$ -ból $\operatorname{tg}(\alpha)$ -t: a sin-cos összefüggés felhasználásával, algebrai átalakításokkal!

2. módszer – javasolt!

c) Gyakorlása

$$\operatorname{tg}(\beta)=10$$

$$\operatorname{ctg}(\beta)=$$

$$\sin(\beta)=$$

$$\cos(\beta)=$$

$$\sin(40^\circ) \cdot \operatorname{tg}(50^\circ) \cdot \sin(50^\circ) + \sin^2(40^\circ) =$$

$$\sin^2(18^\circ) + \sin^2(72^\circ) =$$

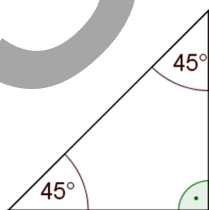
IV.5) Szög felének szögfüggvényei - bevezetése

$\sin(\alpha) = 0,6$. Számold ki: $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ és $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ értékét!

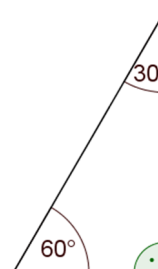
V) Az ismert nevezetes háromszögek szögeinek szögfüggvényei – újra + számolás háromszögekkel

V.1) Nevezetes háromszögek

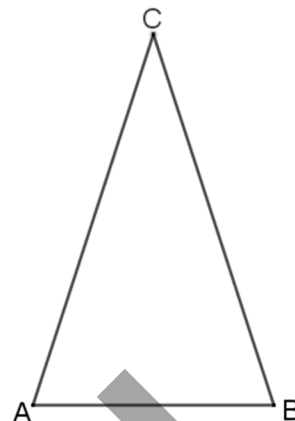
a) Egyenlőszárú-derékszögű $\triangle$: 45°



b) Fél szabályos $\triangle$:
 60° és 30°



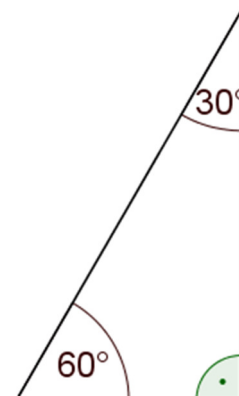
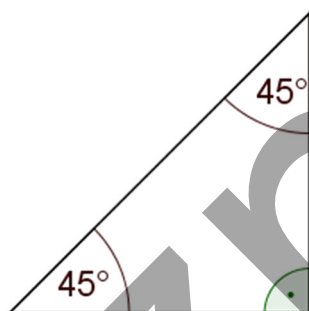
c) Az aranymetszés háromszöge: 72° és 18°



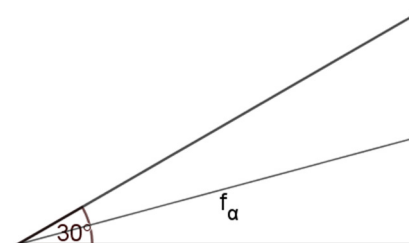
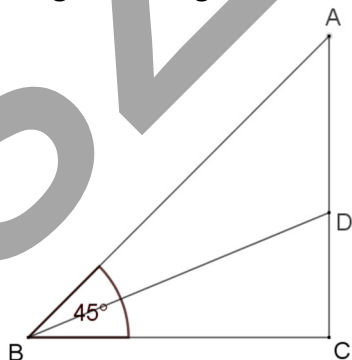
d) Táblázat

	$\sin()$	$\cos()$	$\operatorname{tg}()$	$\operatorname{ctg}()$
18°		----	----	----
30°				
45°				
60°				
72°	----		----	----

Írd föl a háromszög adatait, ha az átfogó egységnyi:

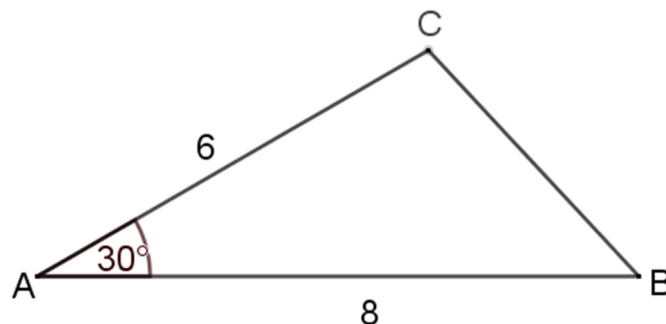


e) „Félszögek” – szögfelezés – szögfelező tétel használata $22,5^\circ$ és 15°

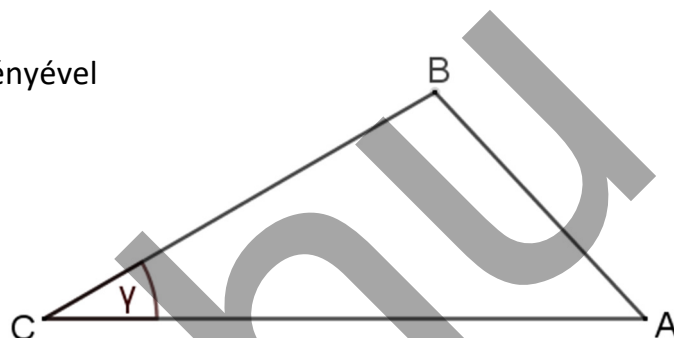


V.2) (Hegyszögű) háromszög területe

Konkrét példa: $c=8$, $b=6$ $\alpha=30^\circ$.



Háromszög területe hegyesszög szögfüggvényével



VI) Gyakorlás, illetve trigonometria az eddig tanult geometriában

VI.1) Hozd egyszerűbb alakra - szögfüggvények belső összefüggései

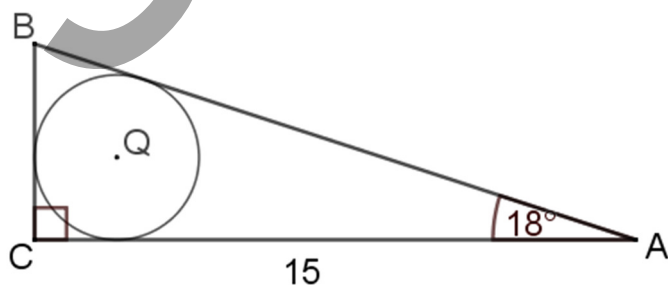
$$\frac{\sin(\alpha)}{\operatorname{tg}(\alpha)} =$$

$$\frac{1 - 2 \cdot \cos^2(\alpha)}{\sin(\alpha) - \cos(\alpha)} =$$

$$\sin^6(\alpha) + \cos^6(\alpha) + 3 \cdot \sin^2(\alpha) \cos^2(\alpha) = ?$$

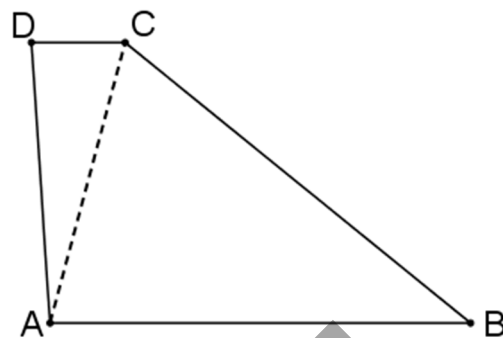
VI.2) Beírt kör sugara

Egy derékszögű háromszögben: $\alpha=18^\circ$, $b=15$ cm. Mekkora az oldalak, az oldalak, illetve a beírt kör sugara?



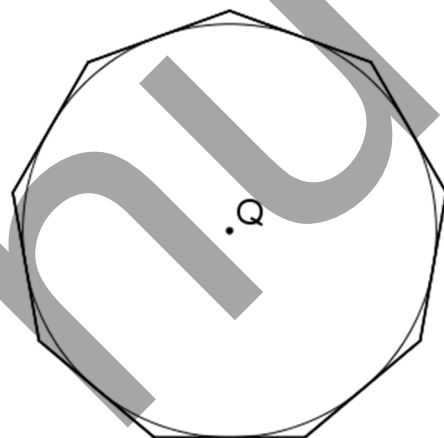
VI.3) Trapéz

Egy trapéz két alapja 9 és 2 cm. A területe 33 cm². Az AC átló 75°-ot zár be az „a” oldallal. Mekkora ez az átló?



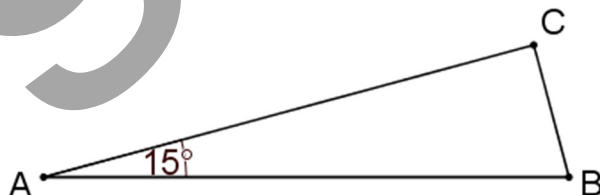
VI.4) Szabályos sokszög

Egy szabályos 9-szög beírt körének sugara 5 cm. Mekkora a területe?



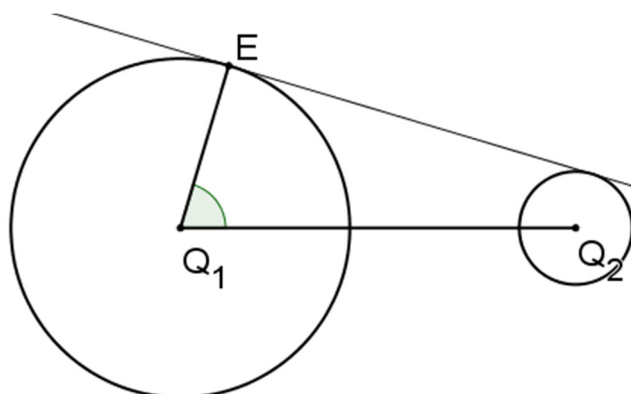
VI.5) A 15°-os derékszögű háromszög

Mutasd meg, hogy a 15°-os derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága negyede az átfogónak, majd számold ki pontosan a 15° egyik – ebből – könnyen kiszámolható szögfüggvényét!



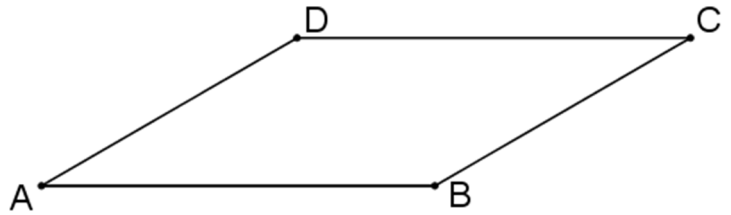
VI.6) Két kör közös érintője

Egy 3 és egy 1 cm sugarú kör közös külső érintőjéhez meghúzzuk a nagyobb kör középpontjából az érintési pontba a sugarat. Ez 73,5°-ot zár be a centrálissal. Milyen távol van egymástól a két kör középpontja (milyen hosszú a centrális szakasz)?



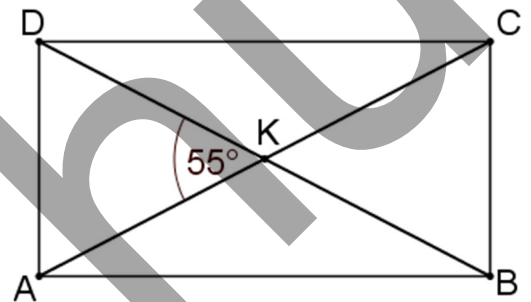
VI.7) Paralelogramma

Egy paralelogramma hegyesszöge 30° . A területe 600 e^2 , a kerülete 140 e . Mekkora az oldalai?



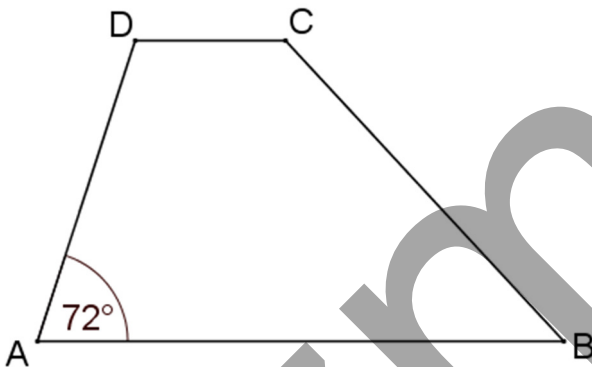
VI.8) Téglalap

Egy téglalap területe 80 egységnégyzet. A két átló 55° -os szöget zár be. Mekkora a két oldal?



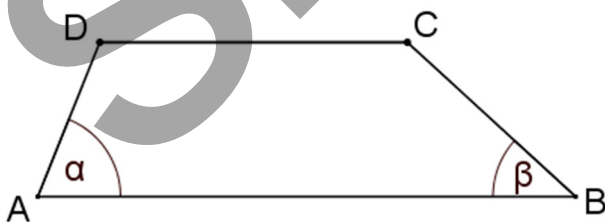
VI.9) Trapéz

Egy trapéz „a” alapja 7 cm , a másik: $c=2$. A magassága 4 cm , és $\alpha = 72^\circ$. Mekkora a területe, kerülete?



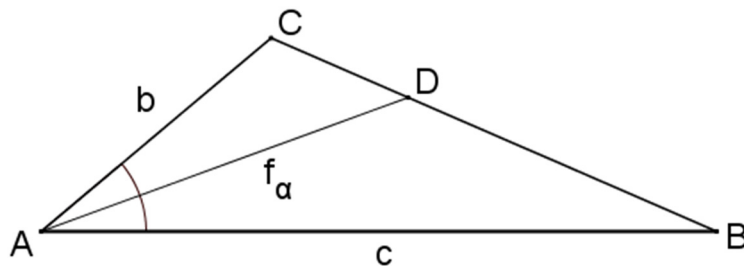
VI.10) Trapéz kiegészítő háromszöge

Egy trapéz kiegészítő háromszögének az alappal szemkötti szöge 70° , ezt a szöget a háromszögben egy $4,1$ és egy $5,7 \text{ cm}$ hosszú oldal zárja be. A trapéz területe $\sim 15 \text{ cm}^2$. Mekkora a szárjai?



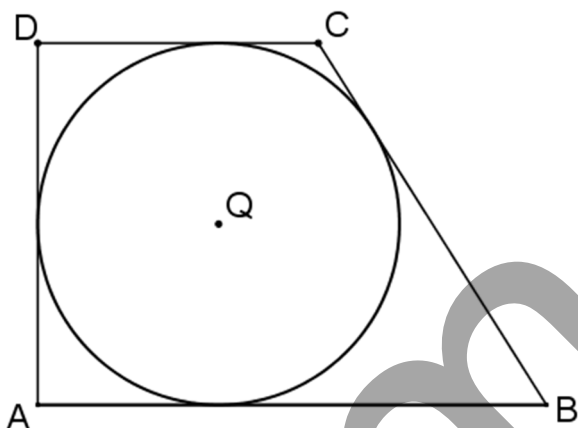
VI.11) Szögfelező

Egy háromszög α szöge 40° . A közrezáró oldalak: $c=9$ $b=4$. Mekkora f_α ?



VI.12) Érintőtrapéz

Egy derékszögű érintőtrapéz két alapja 9 és 5 cm. Mekkora a beírt kör sugara? Mekkora szöget zár be a nem merőleges szár az alapokkal?

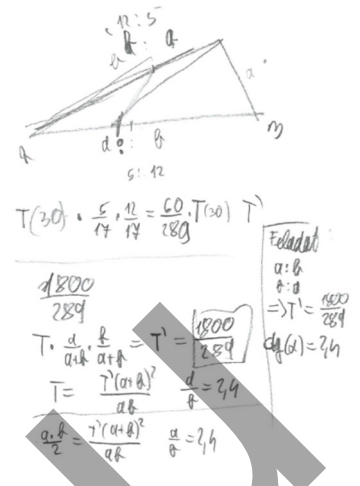


VI.13) Szabályos sokszög

Egy szabályos sokszög átlóinak száma 170. Oldalának hossza 5 cm. Mekkora szögben látszódik a körülírt kör középpontjából egy oldal? Mekkora a beírt kör sugara?

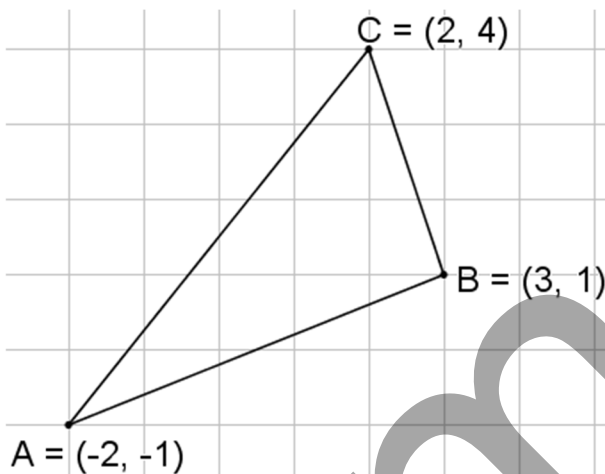
VI.14) Osztópont

Egy derékszögű háromszög c oldalát $AP:PB=a:b$ arányban osztom, b oldalát pedig $AR:RC=b:a$ arányban. A levágott APR terület $\frac{1800}{289} \text{ cm}^2$. Az α szög: $\text{ctg}(\alpha)=2,4$. Mekkora az oldalak?



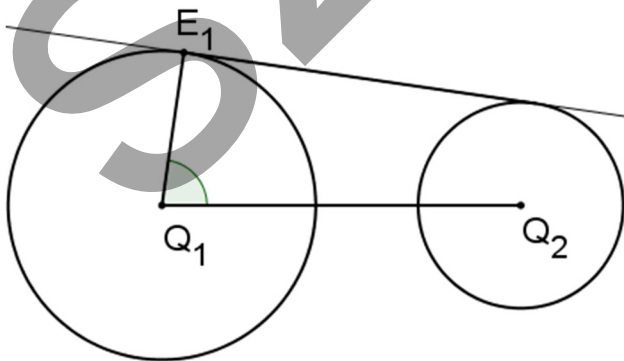
VI.15) Rácsháromszög

Egy rácsháromszög csúcsának koordinátái: $A(-2;1)$ $B(3;1)$ $C(2;4)$ Mekkora β és a területe?



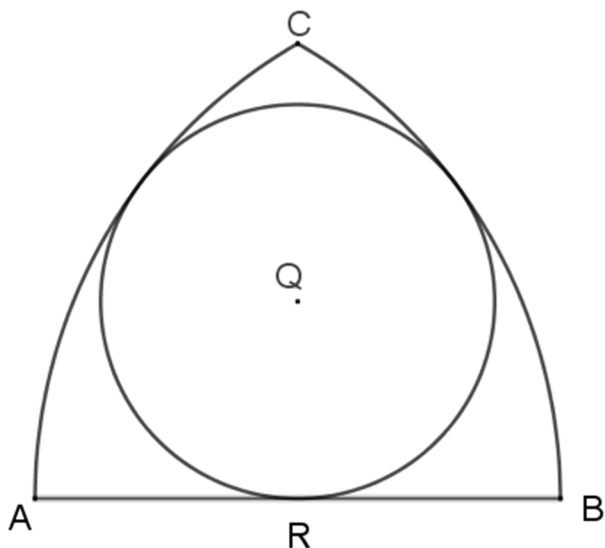
VI.16) Két kör közös külső érintője

Két kör sugarának aránya $r_1:r_2 = 3:2$. A közös külső érintőszakasz hossza 6,928 cm. A nagyobbik kör érintési pontba húzott sugara $81,79^\circ$ -ot zár be a centrálissal. milyen távol van egymástól a két középpont? Mekkora a sugarak?



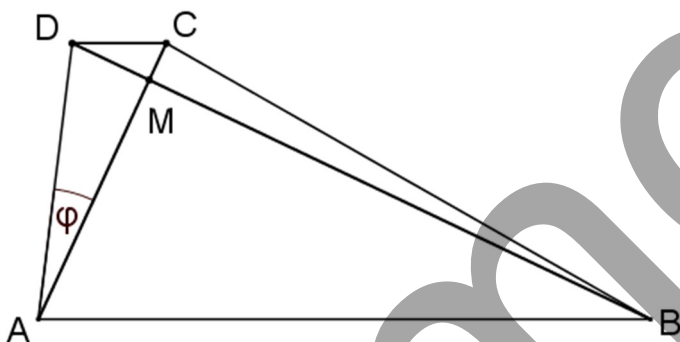
VI.17) Rózsablak

Rózsablak. Hány fokos szögben látom a beírt kör középpontjából az alapot?



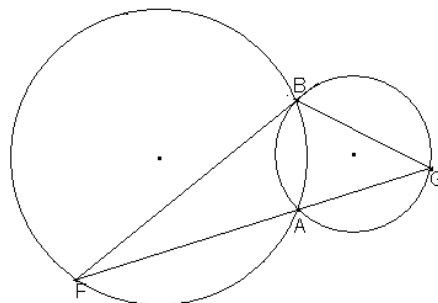
VI.18) Trapéz

Egy trapéz két átlója derékszöget zár be egymással. A MCD_{Δ} területe 2 egységnégyzet, az ABM_{Δ} területe 72 egységnégyzet. A φ szögre: $\operatorname{tg}(\varphi)=0,323$. Mekkora a két átló és mekkorák a trapéz szögei?



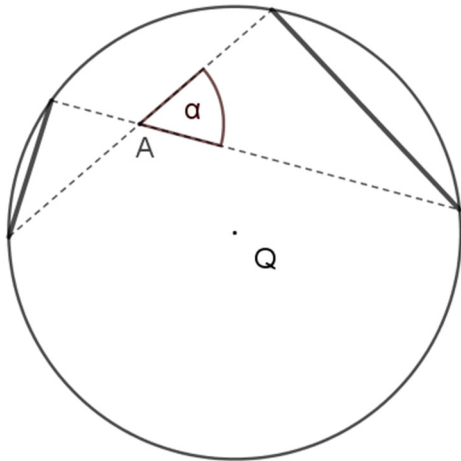
VI.19) Kerületi szögek - 1

Adott két kör. Közepük távolsága 25 cm. Sugaruk 20 és 10 cm. Az egyik metszéspontjukon keresztül közös szelőt húzok. Mekkora szögben látszódik FG a B-ből? (Mit feltételez ez a feladat?...)



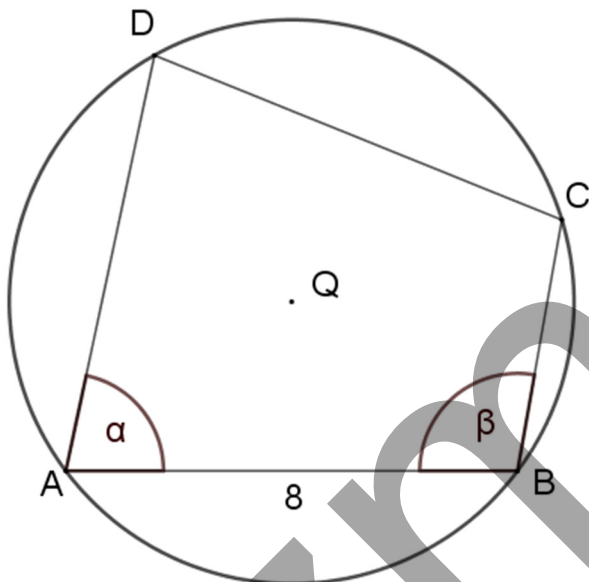
VI.20) Kerületi szögek - 2

Egy 8 cm sugarú körben egy 3 és egy 6 cm hosszú húr végpontjait összekötöm az ábrán látható módon. Mekkora α ?



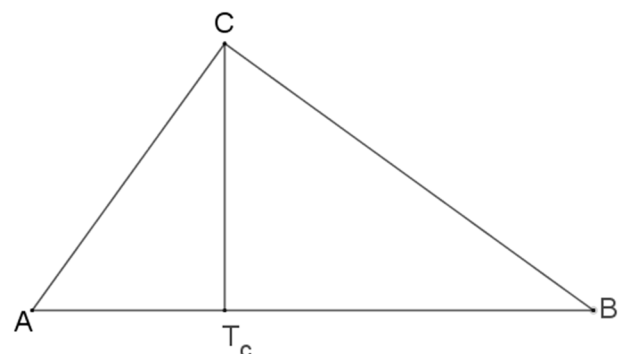
VI.21) Húrnégyszög

Egy húrnégyszög köré írt kör sugara 5 cm. $\alpha=78^\circ$, $\beta=100^\circ$, $AB=8$. Mekkora a többi oldala?



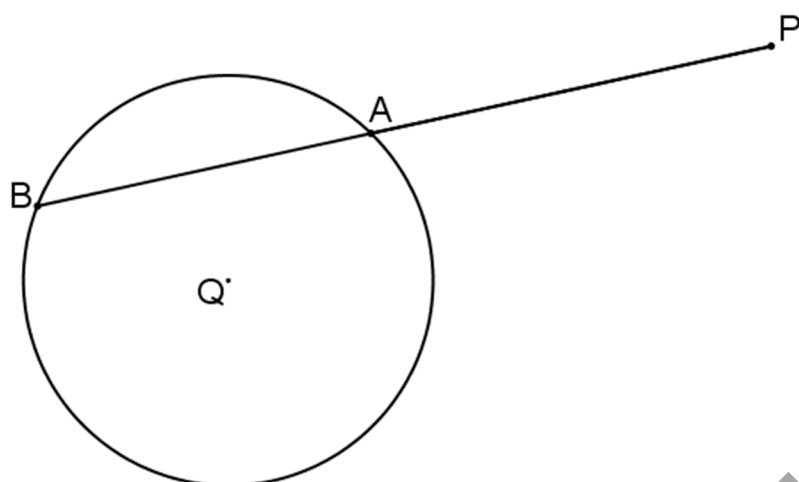
VI.22) Derékszögű háromszögre vonatkozó tételek

Egy derékszögű háromszög átfogóját a hozzá tartozó magasság talppontja 2,4 és 4,6 cm szakaszokra vágja. Mekkora a szögei? Mekkora a beírt kör sugara?



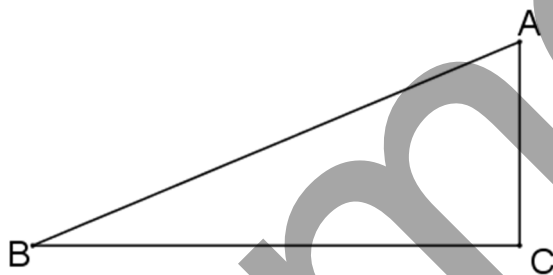
VI.23) Körhöz húzott szelőszakaszok

Egy 3 cm sugarú körhöz egy rajta kívül eső P pontból húzok egy szelőt. A két szelőszakasz hossza 6 és 11 cm. Mekkora szögben látom a P pontból a kört?



VI.24) Hasonlóság – 2

Egy ABC derékszögű háromszögben $\beta < \alpha < \gamma$. Az A csúcsban az AC-re felmérem β -t, és a szögcsár D-ben metszi az „a” oldalt. $CD=25/12$ és $a=12$. Mekkorák a szögek?



Trigonometria – B: Vektorok

I) Definíciók és alpműveletek – ahogy azt már 7. osztályban vettük

I.1) Definíciók + elnevezések + $\mathbf{0}$

- a) Def: Az irányított szakaszokat vektoroknak hívjuk.
- b) Elnevezések

Vektor hossza, „abszolút értéke”

Íránya: állása és irányítása együtt

Állása:

Írányítása

- c) A $\mathbf{0}$ vektor: állása, irányítása (vagyis iránya) tetszőleges, hossza 0.
- d) Ellentett vektor: A $\underline{v}$ vektorral egyenlő hosszú de ellentétes irányú vektort v ellentettjének mondjuk, és $\underline{v}$ -vel jelöljük.

I.2) Vektorok egyenlősége

Definíció: Két vektort azonosnak tekintünk és egyenlőnek mondunk, ha hosszuk és irányuk (állásuk és irányításuk) egyező.

A vektorok egyenlősége két vektor közötti reláció:

reflexív: $\vec{AB} = \vec{AB}$

szimmetrikus: $\vec{AB} = \vec{CD} \Rightarrow \vec{CD} = \vec{AB}$

transzitiv: $\vec{AB} = \vec{CD}$ és $\vec{CD} = \vec{EF} \Rightarrow \vec{AB} = \vec{EF}$

Így a vektoroknak belőlük álló vektortérben osztályaik vannak: egy egy vektor csak képviselője az ő osztályának.

I.3) Összeg

a) Definíció

Def.: Adott $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektor. Ekkor $\underline{a} + \underline{b} = \underline{c} \Rightarrow \underline{c}$ = az a vektor, amit úgy kapok meg, hogy $\underline{a}$ végpontjából fölmérem $\underline{b}$ -t, és az összegvektor az a kezdőpontjából a b végpontjába mutasson.

Az összeget eredőnek, az összeg tagjait összetevőknek nevezzük.

A paralelogramma-szabály: Két nem párhuzamos vektor összege az általuk kifeszített paralelogramma közös pontból indított átlóvektora.

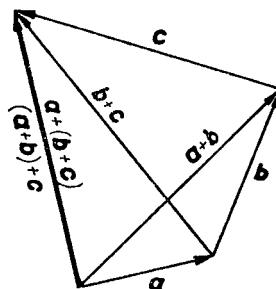
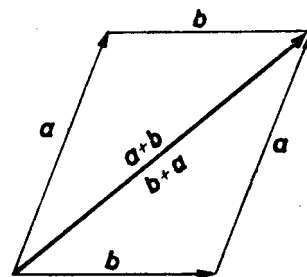
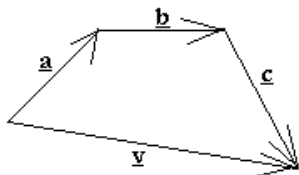
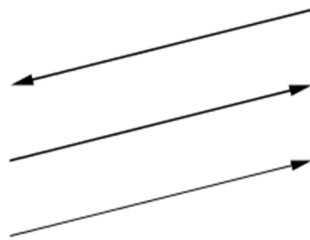
Láncszabály:

b) Tulajdonságok

kommutatív: $\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$ Biz.: paralelogramma módszer egyértelműsíti

asszociatív: $\underline{a} + (\underline{b} + \underline{c}) = (\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c}$, így írható így: $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c} = \underline{b} + \underline{c} + \underline{a}$ stb.

A két tulajdonság használatából látható, hogy vektorok összeadásánál sem a zárójelezés, sem a sorrend nem számít – ne felejtsük, pont úgy, mint számok összeadásánál!

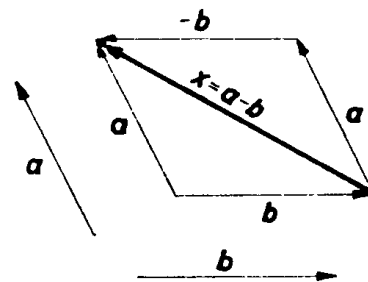


I.4) Különbség

- a) Definíció: $\underline{a}-\underline{b}:=$ az a vektor, amit $\underline{b}$ -hez adva $\underline{a}$ -t kapunk.

„Módszer két vektor különbségének létrehozásához”:

Egy pontból indítjuk a két vektort, és a különbségvektor a kivonandó végpontjából a kisebbítendő végpontjába mutat.



A paralelogramma szabály és az ellentett vektor alkalmazásával kiderül, hogy $\underline{a}-\underline{b}=\underline{a}+(-\underline{b})$ (lásd ábra)

- b) Gyakorlás (megadom az eredményvektor kezdőpontját)

A	B	C	D	E
F	G	H	I	J
K	L	M	N	O
P	Q	R	S	T
U	V	W	X	Y

A	B	C	D	E
F	G	H	I	J
K	L	M	N	O
P	Q	R	S	T
U	V	W	X	Y

$$\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{KM} = L$$

$$\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{LN} = P$$

$$\overrightarrow{QT} - \overrightarrow{QL} = G$$

$$\overrightarrow{UW} + \overrightarrow{UM} = U$$

$$\overrightarrow{HR} - \overrightarrow{LN} = D$$

$$\overrightarrow{SG} - \overrightarrow{QG} = X$$

$$\overrightarrow{QG} - \overrightarrow{QR} = S$$

$$\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{BD} = R$$

$$\overrightarrow{VR} + \overrightarrow{YR} = N$$

$$\overrightarrow{BL} + \overrightarrow{WC} = X$$

$$\overrightarrow{MS} - \overrightarrow{NS} = H$$

$$\overrightarrow{DS} - \overrightarrow{NI} = C$$

$$\overrightarrow{GJ} - \overrightarrow{LN} = Q$$

$$\overrightarrow{WL} + \overrightarrow{LH} + \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AW} = T$$

$$\overrightarrow{SQ} - (\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OS}) = H$$

I.5) Vektor skalárszorosa (valós számmal történő szorzása)

- a) Definíció

$\lambda \in \mathbb{R}$. Ekkor:

$$\lambda = 0 \Rightarrow \lambda \cdot \underline{a} = \text{nullvektor}$$

$$\lambda \neq 0 \Rightarrow \lambda \cdot \underline{a} = \text{az a } \underline{v} \text{ vektor, mely}$$

$$\text{hossza: } |\underline{v}| = |\lambda| \cdot |\underline{a}|$$

$$\text{állása: } \underline{v} \parallel \underline{a}$$

irányítása:

$$\lambda > 0 \Rightarrow \underline{a} \text{-val megegyező}$$

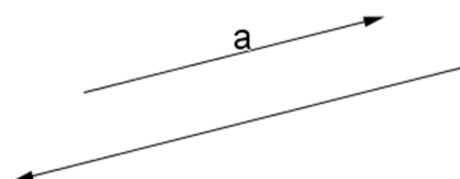
$$\lambda < 0 \Rightarrow \underline{a} \text{-val ellentett}$$

Például a $-1,5 \cdot \underline{a}$ vektor

Hossza:

Állása:

Irányítása:



b) Tulajdonságai

$$\alpha \cdot \underline{a} + \beta \cdot \underline{a} = (\alpha + \beta) \underline{a}$$

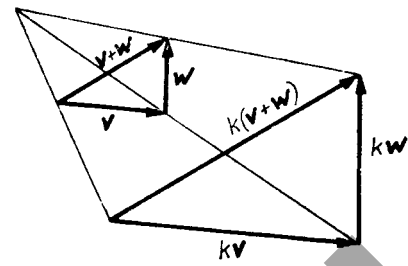
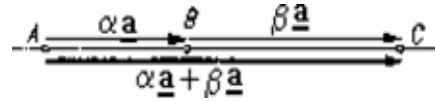
$$\alpha \cdot (\underline{a} + \underline{b}) = \alpha \underline{a} + \alpha \underline{b}$$

$$\alpha \cdot (\beta \cdot \underline{a}) = (\alpha \cdot \beta) \underline{a}$$

Az első kettő a disztributivitás szabályai.

Alapvetően ez azt jelenti, hogy a vektorok úgy működnek a valós számtest felett, mint a változók:

$$5(3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}) - \frac{2}{3}(2\mathbf{j} - \mathbf{i}) =$$



c) Vektor normálása, normáltja:

$$\underline{a}_e = \frac{1}{|\underline{a}|} \cdot \underline{a}. \text{ Vagyis a vektorral egyirányú, egység hosszú vektor.}$$

I.6) Gyakorlásuk

a) Fejezd ki $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorokból az alábbi vektorokat:

$$\vec{FC} =$$

$$\vec{QC} =$$

$$\vec{QA} =$$

$$\vec{BE} =$$

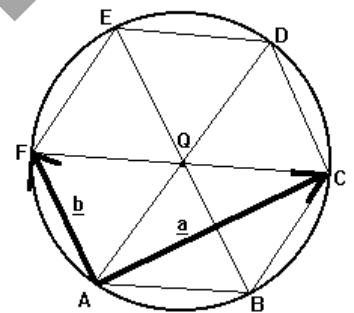
$$\vec{BF} =$$

$$\vec{BD} =$$

$$\vec{FD} =$$

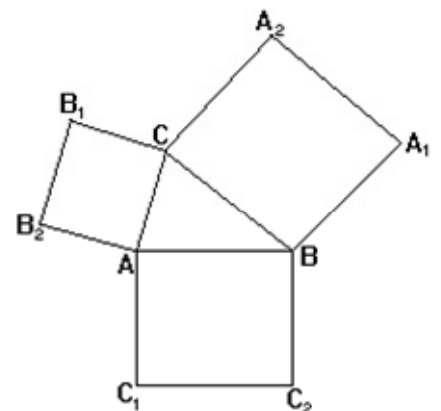
$$\vec{CA} =$$

vektorokat!



b) Háromszög oldalvektorai

Alap: Bizonyítsd be, hogy az $\vec{A_2B_1}$; $\vec{B_2C_1}$; $\vec{C_2A_1}$ vektorokból háromszög szerkeszthető (állítható össze). (A háromszögre négyzeteket emeltünk)

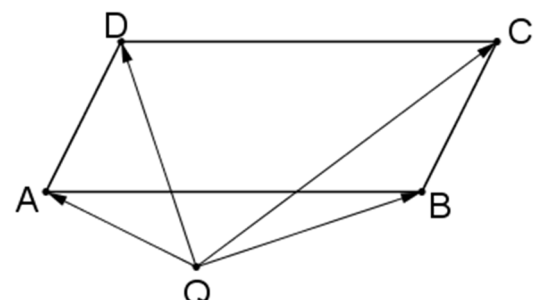


c) Paralelogramma

Alap: Adott ABCD paralelogramma és egy Q tetszőleges pont. Bizonyítsd be, hogy

$$\vec{QA} + \vec{QC} = \vec{QB} + \vec{QD}$$

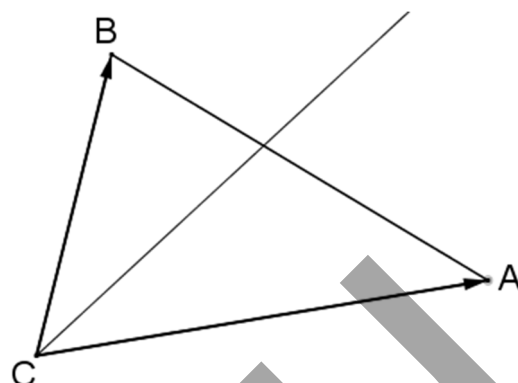
VAGYIS: Mi mutat szakasz felezőpontjába?



- d) Közös pontból indított vektorok szögfelezőjével párhuzamos vektor, vagyis háromszög szögfelezőjével párhuzamos vektor

Alap: Áll.:

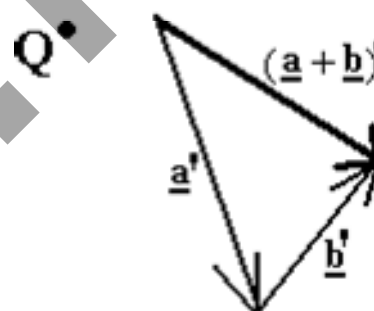
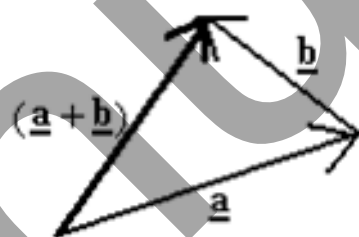
$\parallel$ a két vektor szögfelezőjével.



I.7) Vektorok forgatása

Áll.: $Q^\alpha(\underline{a} + \underline{b}) = Q^\alpha(\underline{a}) + Q^\alpha(\underline{b})$

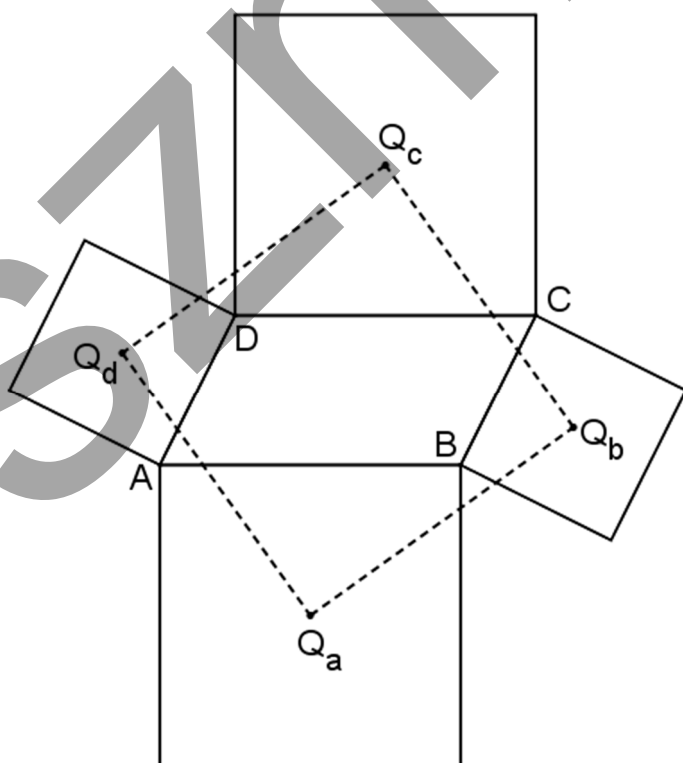
Biz: Visszavezetjük a háromszögek forgatására.



Áll: Egy paralelogramma oldalaira kifelé négyzeteket írunk.

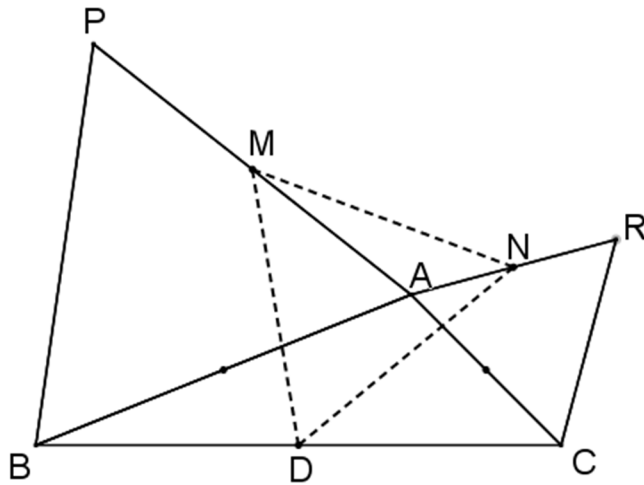
Igazoljuk, hogy ezek középpontjai egy négyzet csúcsai.

Biz.:



* Áll.: Az ABC háromszög AB és AC oldalaira kifelé rajzolt szabályos háromszögek legyenek ABP és ACR , az AP , AR és BC szakaszok felezőpontja pedig rendre M , N és D . Bizonyítsuk be, hogy az MND háromszög szabályos.

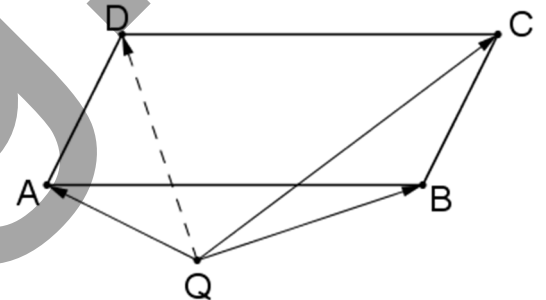
Biz: Lsd ábra: Vigyázat: DE forgatottja FN és EM forgatottja DF , vagyis itt más a sorrend is!



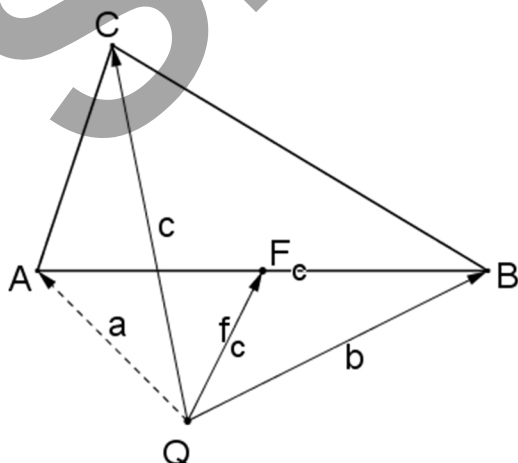
II) A lineáris kombináció

II.1) Bevezető-példák

- a) Az $ABCD$ paralelogramma A ; B ; C csúcsaihoz egy tetszőleges Q pontból rendre az $\underline{a}$; $\underline{b}$; $\underline{c}$ vektorok vezetnek. Állítsuk elő ezek segítségével az $\overrightarrow{QD} = \underline{d}$ vektort!



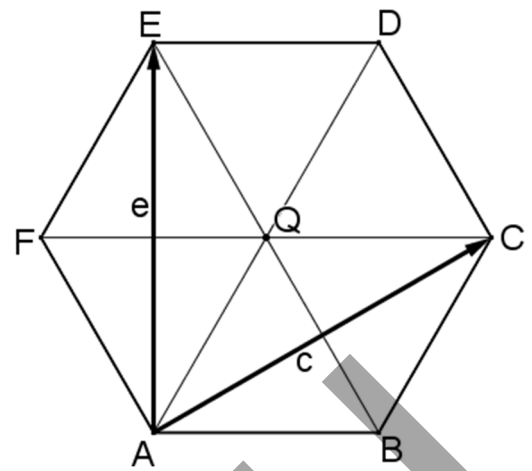
- b) Az ABC háromszög B és C csúcsához egy tetszőleges Q pontból rendre az $\underline{b}$; $\underline{c}$ vektorok vezetnek. A AB oldal F_c felezőpontjához pedig az $\underline{f_c}$ vektor vezet. Állítsuk elő az $\underline{b}$; $\underline{c}$; $\underline{f_c}$ segítségével az $\overrightarrow{QA}$ vektort!



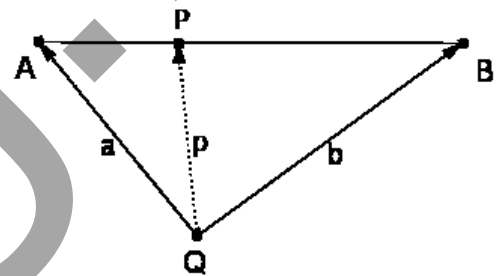
c) Fejezd ki a és b vektorokból:

a) $\vec{QC}$ b) $\vec{QA}$ c) $\vec{BE}$ d) $\vec{FC}$ e) $\vec{FE}$ vektorokat!

Alapötlet:



Állítás: egy Q pontból az AB szakaszt az A-hoz közelebbi, 2:5 arányban osztó P pontba az $\frac{5\vec{QA} + 2\vec{QB}}{7}$ vektor mutat.

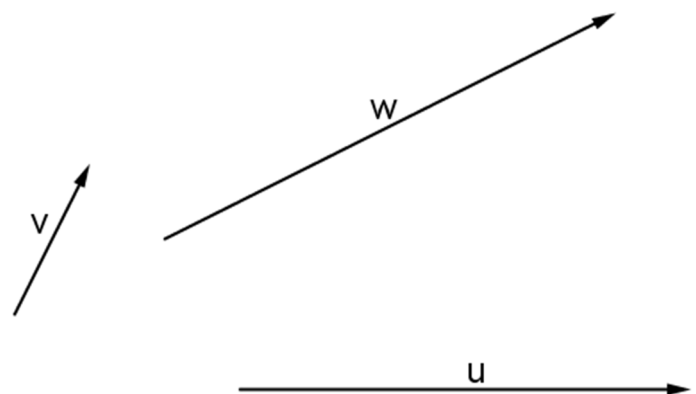
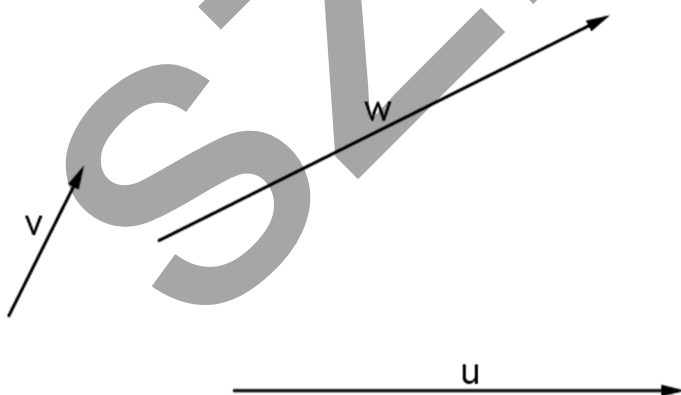


II.2) Vektorok felbontása összetevőkre: szerkesztéssel, számítással.

a) Szerkesztés: adott három, páronként nem párhuzamos vektor: u, v, w

Bontsd fel a w vektort u és v irányú összetevőkre (két olyan vektor összegére, melyek párhuzamosak u-val és v-vel.

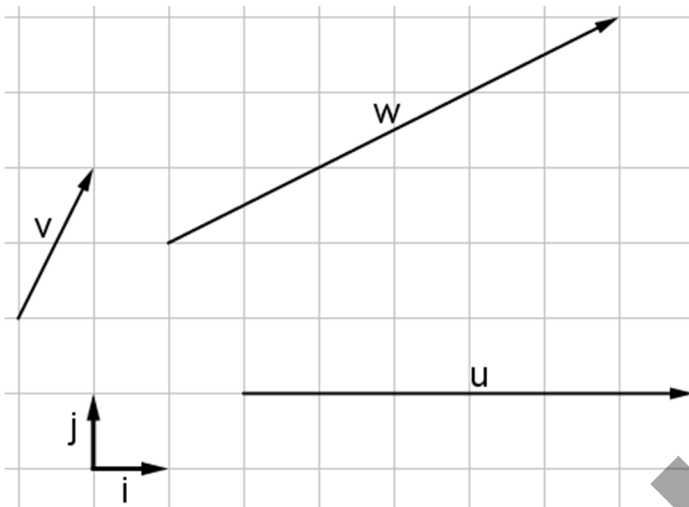
Utána v-t u és w irányú összetevőkre.



Vegyük észre: egyértelműn „feszítődik ki” a paralelogramma, tehát egyértelmű az előállítás: nem lehet kétféleképp a síkban két vektorból egy harmadikat előállítani.

b) Számolással

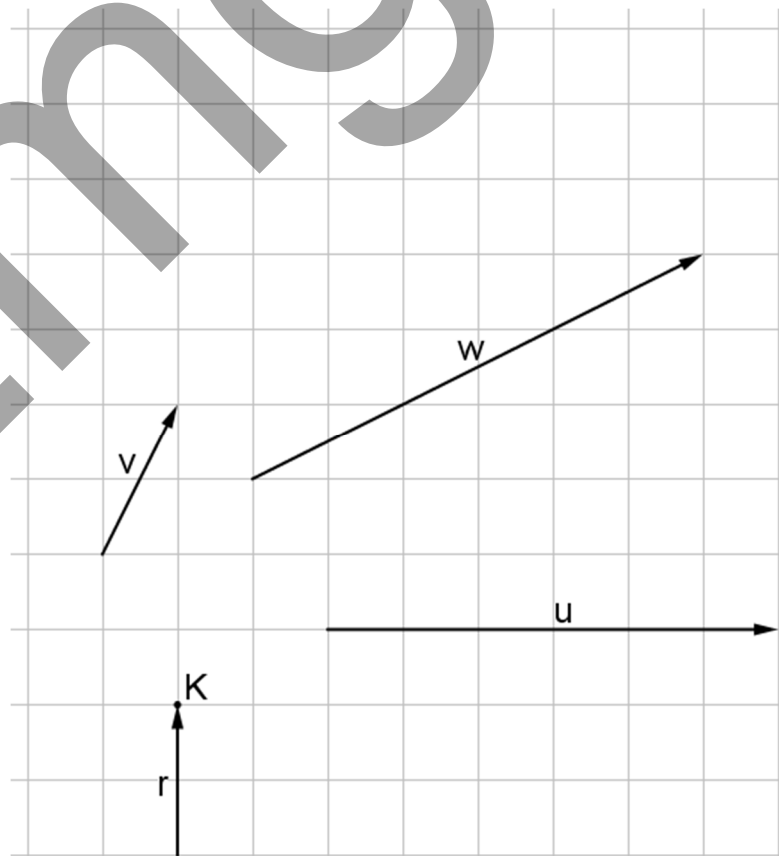
Az 1/c) beli ötlet alapján állítsd újra elő w majd v a másik kettőből, de most úgy, hogy az együtthatókat számold ki!



c) 3 vektor már nem egyértelmű előállítást ad

w-t állítsa elő az osztály fele: $\frac{2}{3}$ u-ból és v és r-el párhuzamos összetevőkből.

a másik fele $\frac{1}{2}$ u-ból és v és r-el párhuzamos összetevőkből.



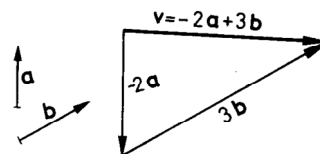
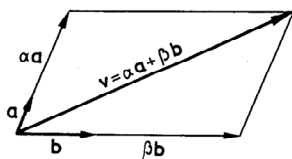
Vegyük észre, három vektor már „túl sok” egy negyedek előállításához a síkban.

II.3) A lineáris kombináció fogalma:

Az $\alpha_1 \cdot \underline{a}_1 + \alpha_2 \cdot \underline{a}_2 + \dots + \alpha_n \cdot \underline{a}_n$ alakban létrehozott $\underline{v}$ vektort az $\underline{a}_1; \dots; \underline{a}_n$ vektorok egy lineáris kombinációjának nevezzük, ahol, $(\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$.

Pl.: $\underline{v} = \alpha \cdot \underline{a} + \beta \cdot \underline{b}$

Konkrétan: $\underline{v} = -2\underline{a} + 3\underline{b}$



Az n db. vektor **triviális lineáris kombinációja**: $\underline{v} := 0 \cdot \underline{a}_1 + 0 \cdot \underline{a}_2 + \dots + 0 \cdot \underline{a}_n$

II.4) A lineáris függőség és lineáris függetlenség

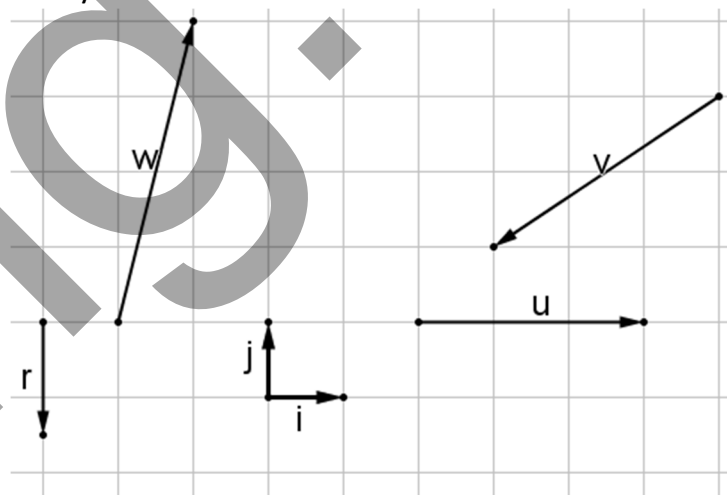
a) Definíció

legyen $\underline{i} \neq \underline{0}$, $\underline{j} \neq \underline{0}$, $\underline{i} \nparallel \underline{j}$, és $\underline{v}$ vektorok. Ekkor ... $\underline{v}$ vektor függ az $\{\underline{i}; \underline{j}\}$ vektorpártól, ha $\exists (\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \underline{v} = \alpha \cdot \underline{i} + \beta \cdot \underline{j}$. Ez az $(\alpha; \beta)$ rendezett pár lesz az $\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle$ által generált vektortérben a $\underline{v}$ vektor $\langle \underline{i}; \underline{j} \rangle$ bázis szerinti koordinátája.

Ez azt is jelenti, hogy az $\underline{i}; \underline{j}; \underline{v}$ vektorok összefüggőek. Vagyis $\exists$ olyan nem triviális lineáris kombinációjuk, ami $\underline{0}$ -t eredményez:

$$\underline{0} = \alpha \cdot \underline{a} + \beta \cdot \underline{b} - \underline{v}.$$

Állítsuk elő az $\langle \underline{i}; \underline{j} \rangle$ bázisból a többi vektort!



b) Tétel: független vektoroknak csak a triviális lineáris kombinációja lehet $\underline{0}$.

Vagyis: ha $\underline{a}$ nem függ az $\underline{i}$ és $\underline{j}$ vektoroktól, akkor $\nexists$ nem triviális, $\underline{0}$ -t adó lineáris kombinációjuk. (Más szavakkal: csak a triviális lineáris kombinációjuk $\underline{0}$ vektor.

Biz: Indirekt: Tfh: $\alpha \underline{i} + \beta \underline{j} + \gamma \underline{a} = \underline{0}$ ahol $\gamma \neq 0$. Ekkor:

$$\Leftrightarrow \alpha \underline{a} + \beta \underline{b} = -\gamma \underline{v} \Leftrightarrow (-\alpha/\gamma) \underline{a} + (-\beta/\gamma) \underline{b} = \underline{v}, \text{ vagyis így } \underline{v} \text{ előáll } \underline{a} \text{ és } \underline{b} \text{ lineáris kombinációjaként.}$$

c) Egyállású vektorok

Áll.: Ha adott az $\underline{a}$ ($\neq \underline{0}$) és a vele egyállású $\underline{b}$ vektor, akkor az $\underline{a}$ vektorból a $\underline{b}$ vektor lineáris kombinációval – jelen esetben egy skalárral történő szorzással – egyértelműen előállítható.

Biz: $\underline{b} = \pm \frac{|\underline{b}|}{|\underline{a}|} \underline{a}$ (Az előjel a $\underline{b}$ és az $\underline{a}$ egymáshoz viszonyított irányítása szerint + v. -.)

$\exists!$ Tegyük fel, hogy $\alpha_1 \underline{a} = \underline{b} = \alpha_2 \underline{a}$ Ekkor: $\alpha_1 \underline{a} = \alpha_2 \underline{a} \Leftrightarrow (\alpha_1 - \alpha_2) \underline{a} = \underline{0} \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 \checkmark$

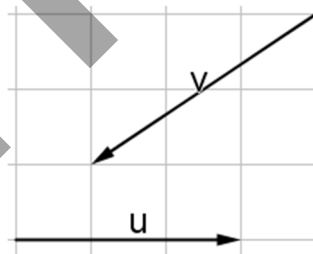
Ekkor azt mondjuk, hogy $\underline{b}$ vektor függ az $\underline{a}$ vektortól.



Érdekes és fontos észrevétel: $\underline{a}^0 = \frac{\underline{a}}{|\underline{a}|}$: az $\underline{a}$ vektorral egyirányú egységvektor.

Ugyanakkor az ábrán az $\underline{u}$ vektorból nem áll elő ilyen lineáris kombinációval a $\underline{v}$. Vagyis azt mondjuk, hogy $\underline{v}$ nem függ $\underline{u}$ -tól, vagyis $\underline{u}$ és $\underline{v}$ független vektorok.

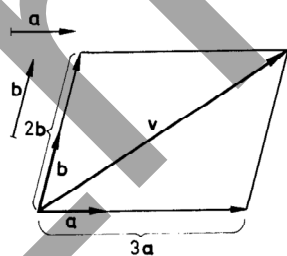
(Vagyis csakis a triviális lineáris kombinációjuk lehet $\underline{0}$.)



II.5) Az egyértelmű előállítás bázisból

a) Tétel

Ha adott az $\underline{a}$ és a vele nem egyállású $\underline{b}$ vektor, akkor bármely velük egy síkú, $\underline{v}$ vektor egyértelműen felbontható az adott vektorokkal egyállású összetevőkre, azaz egyértelműen felírható $\underline{v} = \alpha \cdot \underline{a} + \beta \cdot \underline{b}$ alakban, ahol $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$. Vagyis a sík két független vektorából egyértelműen előállítható a sík $\forall$ vektora.



Bizonyítás:

Létezik előállítás:

Először nézzünk egy konkrét példát: lsd. fenti ábra.

Általában:

Logikus, ha $\underline{v} \parallel \underline{a}$ vagy $\underline{v} \parallel \underline{b}$, akkor lsd. b) pont, így $\underline{v} = \alpha \underline{a} + 0 \underline{b}$ v. fordítva.

Egyébként: $\exists A; C \in S \rightarrow \underline{v} = \overrightarrow{AC}$. Ez az AC legyen a $\underline{a}$ és $\underline{b}$ által kifeszített paralelogramma átlója (az A és B-ből párhuzamosokat húzunk a két vektorral.)

Így $\alpha \underline{a} + \beta \underline{b} = \underline{v}$.

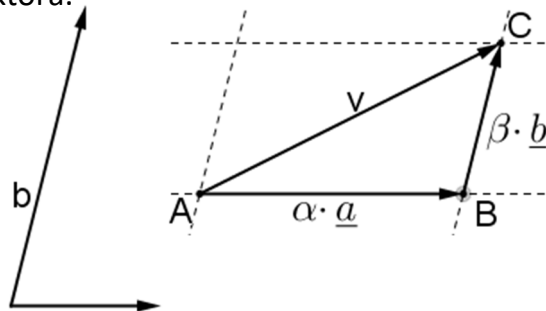
$\exists!$ Indirekt: Tfh. $\exists (\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$ és $\exists (\alpha_1; \beta_1) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (\alpha; \beta) \neq (\alpha_1; \beta_1)$ és

$$\alpha \cdot \underline{a} + \beta \cdot \underline{b} = \alpha_1 \cdot \underline{a} + \beta_1 \cdot \underline{b}$$



$$(\alpha - \alpha_1) \cdot \underline{a} = (\beta_1 - \beta) \cdot \underline{b}$$

Vagyis $\underline{a}$ és $\underline{b}$ összefüggő ☠



(A tétel a térben 3 nem komplanáris vektorra is igaz.)

Σ : A sík két független, vagyis nem párhuzamos (tehát nem is $\underline{0}$) vektorából a sík $\forall$ vektora egyértelműen előállítható.

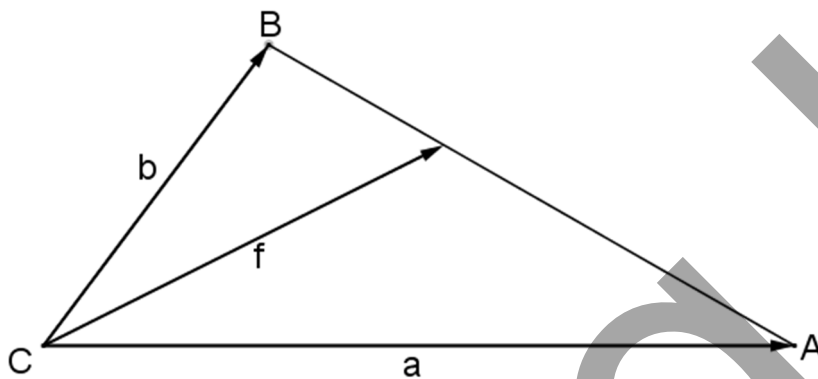
Figyelem, ha azonban 3 vektor adott a síkban, akkor azok már egymástól függenek, így a felírás sem egyértelmű, ahogy azt már láttuk.

b) Gyakorlása

$\underline{a}$ és $\underline{b}$ függetlenek. $3\underline{a}+4\underline{b}=(2\beta+3\alpha+1)\underline{a}+(2\beta-\alpha+3)\underline{b}$ Mennyi az α és a β ?

Lássuk be a szögfelezőtételt egy 2:1 oldalarányú háromszögre.

Mo.: Az $\underline{f}$ vektort írjuk föl kétféleképp:



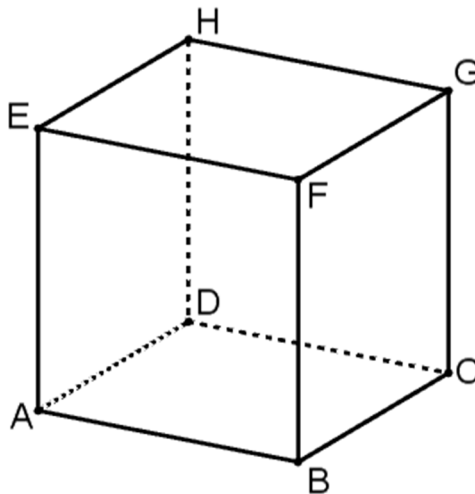
II.6) Generátor-rendszer és bázis

a) Generátor-rendszer

Láttuk, hogy a síkban 2 vagy több nem párhuzamos vektor segítségével a sík $\forall$ vektorát elő tudjuk állítani.

Ekkor ezt a 2 vagy több kijelölt vektort a sík vektorainak halmazában generátorrendszernek nevezzük.

Pl.: Térben egy kocka egy csúcsból induló 3 élvektora és a testátlóvektora szintén generátorrendszert alkot.



Def.: egy V vektortérben azon vektorok halmazát, melyek valamilyen lineáris kombinációjából a vektortér $\forall$ vektora előáll, generátor-rendszernek hívjuk.

b) Bázis

Beláttuk, hogy a síkban 2 nem párhuzamos vektor generátor-rendszer, de ennél kevesebb már nem az.

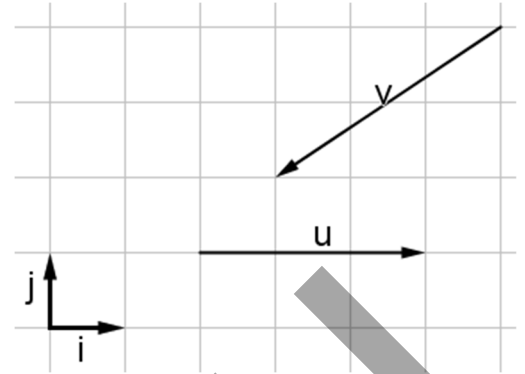
Nyilvánvaló, hogy térben 3 ilyen vektor kell.

Def.: egy V vektortérben egy minimális elemszámú generátorrendszert bázisnak hívunk.

Pl.:

Nyilván a bázis vektorai függetlenek.

$\Rightarrow$ a bázis vektoraiból a vektortér $\forall$ vektora egyértelműen áll elő!



Kopernikuszi fordulat: nem a sík az alap, hanem csak két bázisvektor – és az általuk generált vektortér (vagyis azon vektorok összessége, melyeket a lineáris kombinációjukkal legyárthatunk) a sík megfelelője.

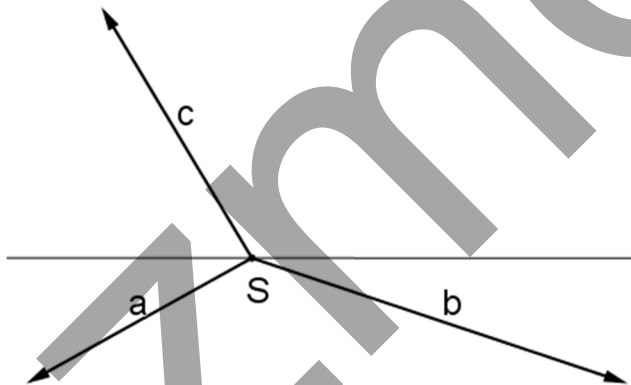
Sík helyett: $V = \langle \underline{i}; \underline{j} \rangle$, vagyis: $\underline{v} \in V \Leftrightarrow \exists (\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \underline{v} = \alpha \underline{i} + \beta \underline{j}$

Vagyis igazából 1, v. 2 v 3 vektorból generálunk egy vektorteret.

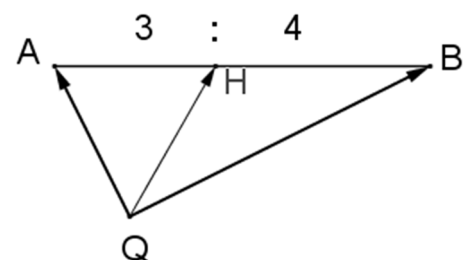
Így például a sík vektorai: $V = \langle \underline{i}; \underline{j} \rangle$

II.7) Gyakorlás

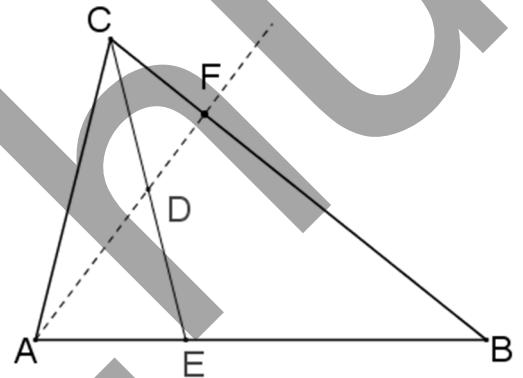
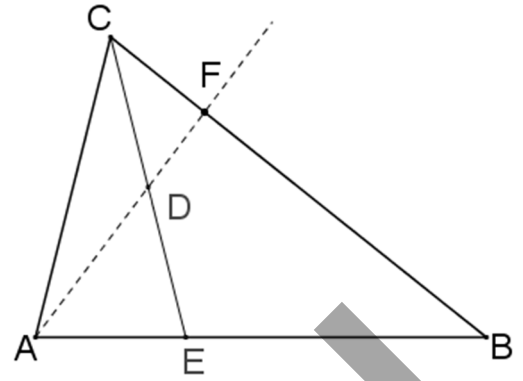
- a) Adott egy S pont. A belőle kiinduló 3 vektor összege $\underline{0}$. Az S ponton áthalad egy e egyenes is. Mutasd meg, hogy az 3 vektornak az e irányú összetevőinek az összege $\underline{0}$.



- b) Osztópontba mutató vektor
Fejezd ki $\underline{h}$ -t $\underline{a}$ és $\underline{b}$ -ből!



- c) Háromszögben osztópont
 $2AD=DB$ és $CE=ED$. Milyen arányban osztja F a CB-t?



III) A koordinátarendszer

III.1) Vektorok az ortonormált jobbrendszer alkotó $\mathbf{i}$ és $\mathbf{j}$ bázis által generált vektortérben

Adott $V := \langle \mathbf{i}; \mathbf{j} \rangle$ vektortérben $\forall$ vektor egyértelműen felírható $\mathbf{v} = \alpha \mathbf{i} + \beta \mathbf{j}$ alakban.

Pl.: $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$; $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j}$ stb. Alább rajzold meg!

Ekkor azonban lehetőség van arra, hogy a nehézkes fölírás helyett rendezett „számenesekkel” jellemezzünk 1-1 vektort, s majd egy kicsit később a műveletek is egyszerűbben nyomon követhetők lesznek.

Így egy adott $V := \langle \mathbf{i}; \mathbf{j} \rangle$ vektortérben a $\mathbf{v} = \alpha \mathbf{i} + \beta \mathbf{j}$ alakban felírt vektort ezentúl a következőképp írhatunk fel: $\mathbf{v}(\alpha; \beta)$, ahol $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Írd fel $V := \langle \mathbf{i}; \mathbf{j} \rangle$ vektortérben a $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ vektort koordinátákkal stb. Szerkeszd is meg.

Olvasd ki, mit jelent és szerkeszd is meg az $\langle \mathbf{i}; \mathbf{j} \rangle$ bázisban:

$\mathbf{a}(-2; 5)$ stb.

Mit válasszunk bázisnak?

Az $\langle \mathbf{i}; \mathbf{j} \rangle$ ortonormált, jobbrendszer alkotó bázist.

Vagyis:

„orto”: merőleges

„normált”: egység hosszúak

„jobbrendszer alkotó”:

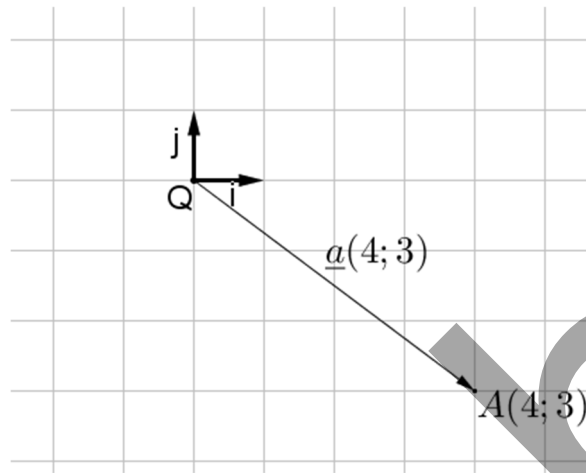
$\mathbf{i}$ -t $+90^\circ$ -kal elforgatva $\mathbf{j}$ -t kapjuk.

Ez később nagyon kényelmes lesz.



III.2) Namost akkor mi a koordináta-rendszerben egy pont koordinátája?

Ha már van a síkban két bázisunk (pl. az előbbi $\langle \underline{i}; \underline{j} \rangle$ ortonormált, jobbsodrású), akkor elég egy vonatkoztatási pont a síkban, és máris kész minden pont koordinátája. Ugyanis: Mutasson egy A pontba a Q vonatkoztatási pontból egy $\underline{a}$ vektor. Ekkor ha az $\underline{a}$ vektor koordinátája: $\underline{a}(4;3)$, akkor az A pont koordinátája legyen $A(4;3)$.

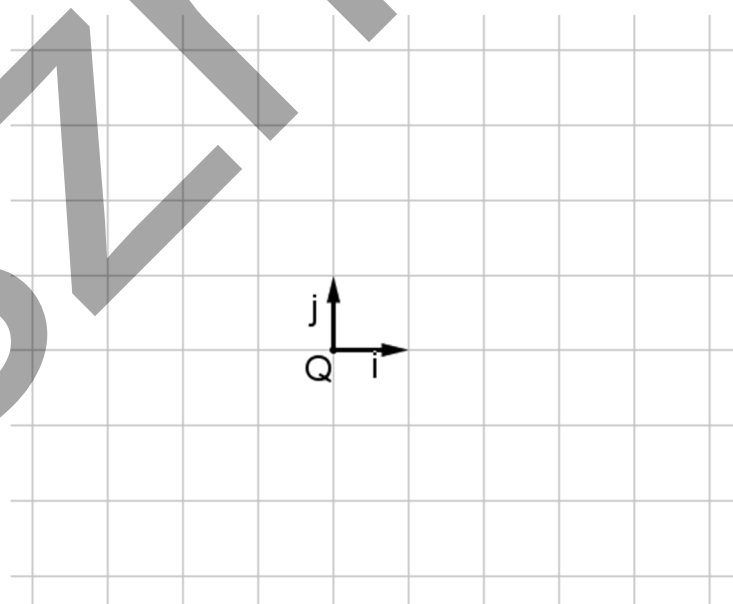


Def.: Egy $\langle \underline{i}; \underline{j} \rangle$ bázisú, Q vonatkoztatási pontú koordináta-síkban az A pont koordinátája legyen a $\overrightarrow{QA}$ vektor koordinátája.

A helyvektor: Egy $\langle \underline{i}; \underline{j} \rangle$ bázisú, Q vonatkoztatási pontú koordináta-síkban a Q vonatkoztatási pontból felmért $\overrightarrow{QA}$ vektor legyen a vele azonos osztályba tartozó (tehát egyenlő) vektorok képviselő helyvektora.

Rajzoljunk „helyvektorokat”: pl.: $\underline{a}(4;-2)$ $\underline{b}(-4;-1,8)$ stb.

Rajzold fel azt a háromszöget, amely csúcsainak a helyvektorai: $\underline{a}(-3;4)$ $\underline{b}(2;1)$ $\underline{c}(-1;-2)$



IV) A koordinátával adott vektorok tulajdonságai, műveletek koordinátákkal adott vektorokkal

IV.1) Tulajdonságok, műveletek

a) Egyenlőség

Áll.: két vektor akkor és csak akkor egyenlő, ha a megfelelő koordinátájuk egyenlő.

Biz.: a koordináták a megfelelő bázisvektorok együtthatói. Korábban pedig beláttuk, hogy a bázisból egyértelmű az előállítás.

b) Lineáris kombináció

Állítás: $\underline{a}(a_1; a_2) + \underline{b}(b_1; b_2) = \underline{c}(c_1; c_2) = \underline{c}(a_1+b_1; a_2+b_2)$

Bizonyítás:

Állítás: $\lambda \cdot \underline{a}(a_1; a_2) = \underline{c}(\lambda \cdot a_1; \lambda \cdot a_2)$

Bizonyítás:

Lineáris kombináció: $\alpha \cdot \underline{a}(a_1; a_2) + \beta \cdot \underline{b}(b_1; b_2) = \underline{c}(\alpha \cdot a_1 + \beta \cdot b_1; \alpha \cdot a_2 + \beta \cdot b_2;)$

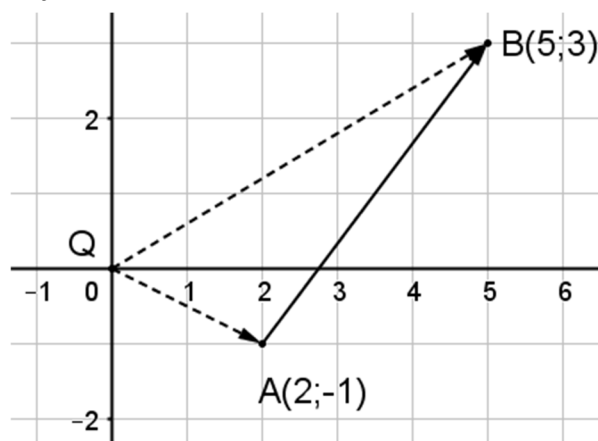
c) Forgatás

Forgatás még csak röviden: ha a bázist is forgatjuk, akkor a koordináták nem változnak. De ha a bázis fix, akkor a koordináták nyilván változnak.

d) Két pont által meghatározott vektor koordinátája:

Adott Q, A(a₁; a₂) B(b₁; b₂)

Ekkor: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{QB} - \overrightarrow{QA} \Rightarrow \overrightarrow{AB}(b_1 - a_1; b_2 - a_2)$



e) Vektor hossza a koordinátáiból. Vektor „abszolút értéke”

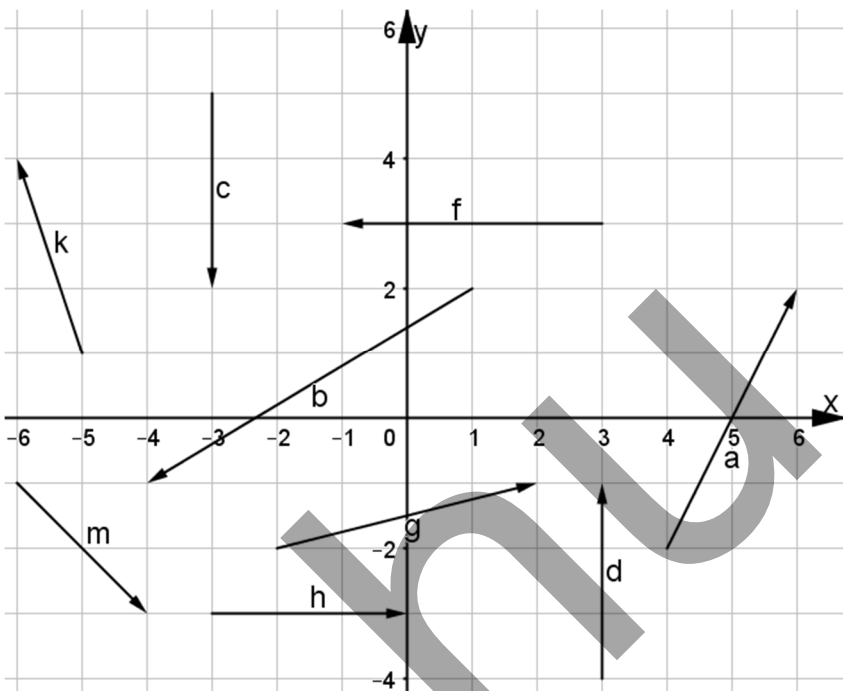
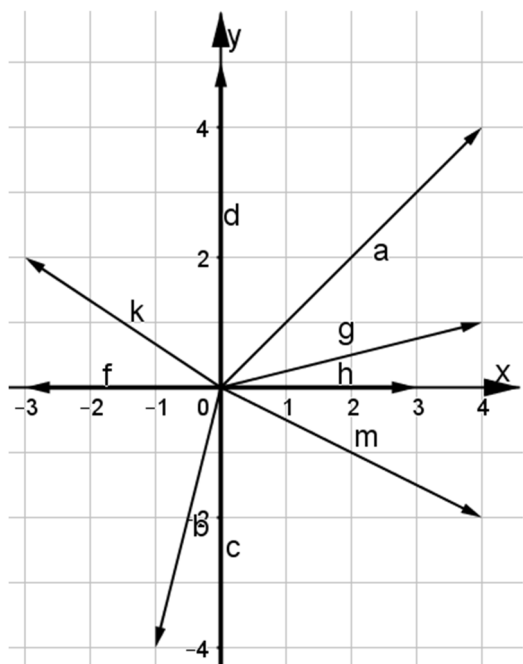
Ha párhuzamos valamelyik tengellyel (bázissal), akkor a nem 0 koordinátájának az abszolútértéke. Pl.: $|\underline{a}(0; -3)| = 3$

Ha nem: akkor Pitagorasz tétellel könnyen bizonyítható, a fenti ábrán be is rajzolható a derékszögű háromszög a bázisvektorok „koordinátaszorosaival” mint befogókkal:

$$|\underline{a}(a_1; a_2)| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

IV.2) Gyakorlás

a) Írd a vektorok neve mellé zárójelben a koordinátáikat



b) $\underline{a}(-1;2)$; $\underline{b}(3;-5)$ Add meg a következő lineáris kombinációk koordinátáit:

$$5\underline{a} = \underline{c} \quad -2,4\underline{b} = \underline{d} \quad \underline{a}+3\underline{b} = \underline{f}$$

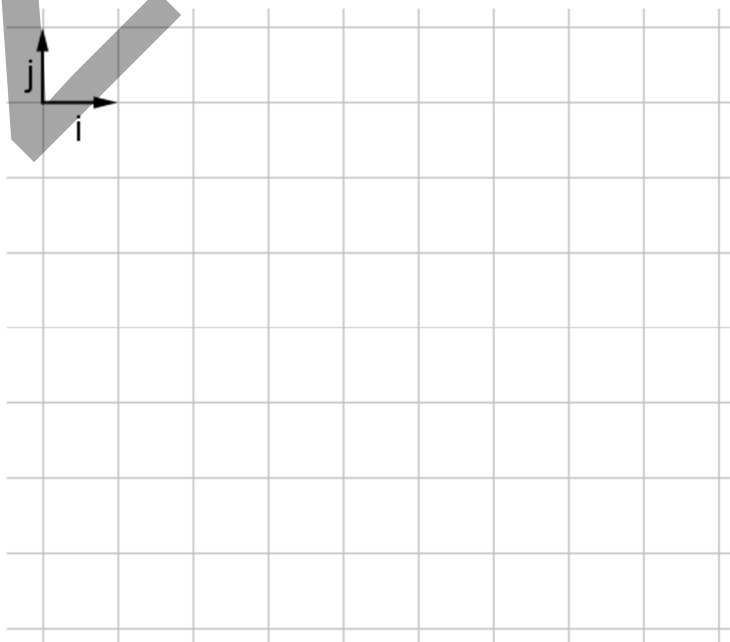
$$5\underline{b}+2\underline{a} = \underline{g} \quad (\underline{a}-\underline{b})/3 = \underline{h}$$

$$(1/2)\underline{a} - (3/2)\underline{b} = \underline{k}$$

c) $\underline{a}(-2;4)$; $\underline{b}(1;-3)$ Rajzold be a következő lineáris kombinációkat a $\langle \underline{i}, \underline{j} \rangle$ vektortérbe!

$$2\underline{a}+3\underline{b} \quad -\underline{a}/2+\underline{b}$$

Szerkeszd meg a $\sqrt{2}(2\underline{a}+2\underline{b})$ -t! (Írd rá a nevüket, és ne zavarják egymást az ábrák.)



d) Az ábrán látható az $ABCDEF$ hatszög

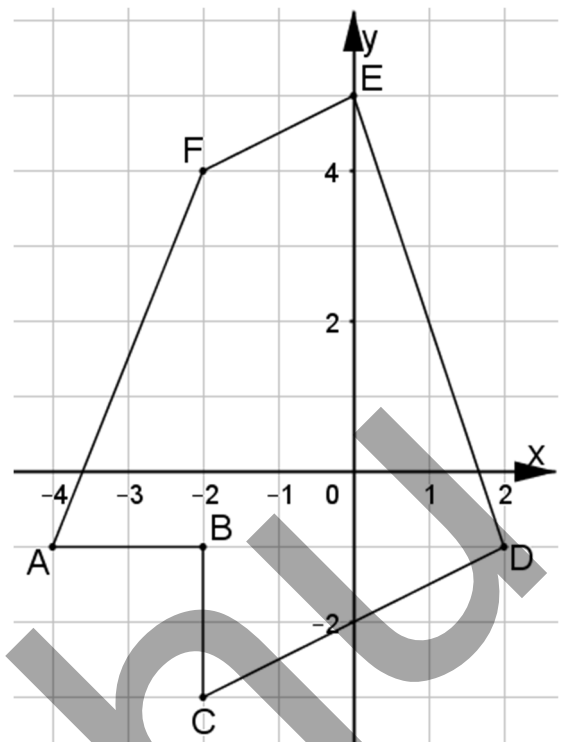
Add meg a csúcsokba mutató helyvektorokat koordinátákkal – minta: $\underline{d}(2;-1)$

Add meg az oldalvektorokat koordinátákkal.
(pozitív körüljárással)

Minta: $\overrightarrow{CD}(4;2)$

Add meg az A csúcsból a többi csúcsba mutató vektort

Minta $\overrightarrow{AB}(2;0)$



Írd föl a F-ből a többi csúcsba mutató vektort a bázisvektorok segítségével:

pl.: $\overrightarrow{FA} = -2\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$

Számold ki a lineáris kombináció koordinátáit:

$$\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{CB} - \frac{2}{3}(3 \cdot \overrightarrow{FB} - 6 \cdot \overrightarrow{DB}) + 2(2\overrightarrow{BE} + 3 \cdot \overrightarrow{FE})$$

Hova mutat (milyen koordinátájú pontba) a D pontból felmért $\overrightarrow{FE}$ vektor?

V) A súlypont

V.1) 1. állítás: az egyértelműn létező Súlypont

$$\frac{\sum_{i=1}^n \overrightarrow{QP_i}}{n} = \overrightarrow{QQ'} + \frac{\sum_{i=1}^n \overrightarrow{Q'P_i}}{n}$$

Vagyis azt állítjuk, hogyha adott egy A pontrendszer, akkor bárhol veszünk is föl egy Q pontot, a Q pontból a pontrendszer pontjaiba mutató vektorok számtani közepe mindig ugyanabba a pontba mutat. Nevezzük ezt S pontnak!

$$\text{Biz.: Áll.} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \overrightarrow{QP_i} = n \cdot \overrightarrow{QQ'} + \sum_{i=1}^n \overrightarrow{Q'P_i} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \overrightarrow{QP_i} = \sum_{i=1}^n (\overrightarrow{QQ'} + \overrightarrow{Q'P_i}) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \overrightarrow{QP_i} = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{QP_i}$$

Tehát $\exists!$ S $\rightarrow$ bárhol veszek fel egy kiindulási Q pontot, a pontrendszer pontjaiba mutató vektorok számtani közepe $\overrightarrow{QS}$ lesz.

Vegyük észre, hogyha $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ egészek (egyelőre, aztán lehetnek racionálisak és valósak is!), és minden P_k pont α_k db. pontot jelöl, így a P_k -ba α_k db. vektor mutat, akkor is igaz, hogy

$$\frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{QP_i}}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} = \overrightarrow{QQ'} + \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{Q'P_i}}{\sum_{i=1}^n \alpha_i}$$

Vagyis ez már „súlyozott” pontrendszer.

Valójában a bizonyítás ugyanaz, ha $\alpha_i \in \mathbf{R}$.

Tehát ha minden ponthoz „súlyként” egy-egy valós számot rendelünk, akkor súlyozott pontrendszerről beszélünk és ugyanígy továbbra is $\exists!$ ennek a véges pontrendszernek súlypontja.

V.2) 2. állítás: Súlypontból a pontrendszer pontjaiba mutató vektorok összege $\underline{0}$.

Vegyük az A pontrendszert, és az előbb megtalált, egyértelműn létező S pontot.

$\sum_{i=1}^n \overrightarrow{SP_i} = ?$ Nyilván $\underline{0}$. Hiszen az előbbi tétel alapján Q-t választhattuk S helyére, és akkor az eredővektor S-be mutat.

Ha más pontot veszek föl, onnan az eredővektor/n ebbe az S-be mutató, vagyis nem $\underline{0}$.

Vagyis lehet az S definíciója a következő:

Def.: az A véges pontrendszer S súlypontja az a pont, melyből a pontrendszer pontjaiba

mutató vektorok összege $\underline{0}$.: $\overrightarrow{SP_1} + \overrightarrow{SP_2} + \overrightarrow{SP_3} + \dots + \overrightarrow{SP_n} = \underline{0}$ vagyis $\sum_{i=1}^n \overrightarrow{SP_i} = \underline{0}$

Természetesen ugyanez súlyokkal is megy, ahol $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$; $\frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{SP_i}}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} = 0$.

Beláttuk hogy ez létezik, és egyértelműn létezik.

Hiszen: ha $\exists S' \neq S$, akkor: $\sum_{i=1}^n \overrightarrow{S'P_i} = n \cdot \overrightarrow{S'S}$.

(Lehetne a definícióból indulni eleve!)

V.3) 3. állítás: alpontrendszer saját súlypontjába helyezése

Állítás: az A pontrendszer súlypontja nem változik, ha veszek egy $A' \subset A$ alpontrendszert, és $\forall P_i \in A_i$ pontot az A' alpontrendszer S' súlypontjába helyezek (vagyis a alpontrendszer pontjait saját súlypontába helyezem)

Biz.: Legyen n db. pont. Vegyünk fel egy külső Q pontot, és indexeljük így a pontokat, hogy $P_1, \dots, P_k \in A'$.

$$\text{Áll.} \Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^n \overrightarrow{QP_i}}{n} = \frac{\sum_{i=k+1}^n \overrightarrow{QP_i} + k \cdot \overrightarrow{QS'}}{n} \Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^n \overrightarrow{QP_i}}{n} = \frac{\sum_{i=k+1}^n \overrightarrow{QP_i} + k \cdot \frac{\sum_{i=1}^k \overrightarrow{QP_i}}{k}}{n} \Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^n \overrightarrow{QP_i}}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n \overrightarrow{QP_i}}{n}$$

Természetesen lehetne úgy a bizonyítás, hogy S-ből bizonyítunk:

$$\text{Áll.} \Leftrightarrow \sum_{i=k+1}^n \overrightarrow{SP_i} + k \cdot \overrightarrow{SS'} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=k+1}^n \overrightarrow{SP_i} + k \cdot \frac{\sum_{i=1}^k \overrightarrow{SP_i}}{k} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \overrightarrow{SP_i} = 0.$$

V.4) 4. állítás: pontrendszer két diszjunkt pontrendszerre bontása

Állítás: ha az A azonos pontsúlyú pontrendszert két olyan diszjunkt halmazra bontunk (A_1 és A_2), melyekre $A_1 \cup A_2 = A$, és az A_1 súlypontja S_1 , az A_2 -é S_2 , akkor az A pontrendszer S súlypontja az S_1S_2 egyenesen van, és $S_1S : SS_2 = |A_2| : |A_1|$ (S_1S és SS_2 irányított szakaszok).

Bizonyítás: Az előző tétel alapján a S helye nem változik akkor, ha S_1 -be helyezem az az A_1 rendszer pontjait, S_2 -be az A_2 -ét. Mivel S-ből a pontrendszer pontjaiba mutató vektorok összege 0 (hiszen két nem $\parallel$ vektor összege nem lehet 0), ezért S az S_1 és S_2 egyenesén van, és triviálisan a kettő között.

Meg kell még mutatni, hogy az ilyen arányban osztó S pont a megfelelő. Nyilván:

az $|A_2| \cdot \overrightarrow{SS_1}$ és az $|A_1| \cdot \overrightarrow{SS_2}$ vektorok $\parallel$ -ak, hosszuk azonos: $(n-k)(kx)$ és $k((n-k)x)$, vagyis összegük 0 vektor.

Legyenek a pontok úgy indexelve, hogy P_1-P_k -ig az A_1 hez tartoznak, a többi az A_2 -höz. Ennek a tételnek nagyon sok fontos következménye van.

V.5) Pontrendszer súlyvonalának általános definíciói

a) Súlyponton áthaladó egyenes

b) az a szakasz (egyenes), melyet úgy kapunk, hogy a pontrendszert két diszjunkt alpontrendszerre bontjuk, melyek uniója a pontrendszer, és a súlyvonal e két alpontrendszer súlypontját összekötő szakasz/egyenes.

Az előző tétel alapján a pontrendszer súlypontja eleme a súlyvonalnak.

Két pont súlypontja a 2. def. alapján:

Δ - súlypontja 2. def alapján:

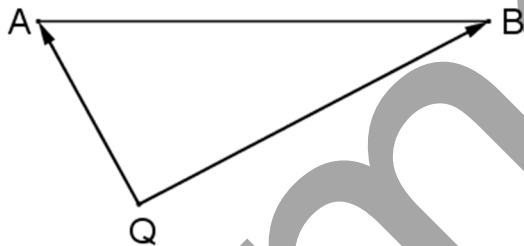
Tetraéder súlypontja, ha a csúcsai T pontrendszert alkotnak:

$|T_1|=1$ és $|T_2|=3$ vagy $|T_1|=2$, $|T_2|=2$.

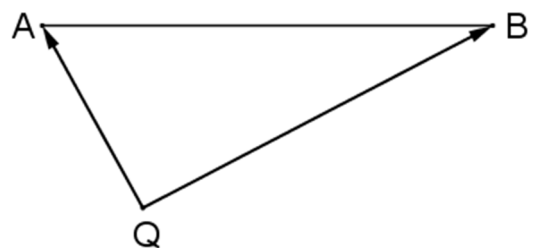
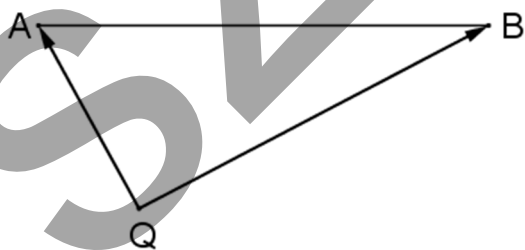
VI) Gimnáziumi súlyvonal - súlypont

VI.1) Szakasz

a) Szakasz felezőpontjába mutató vektor



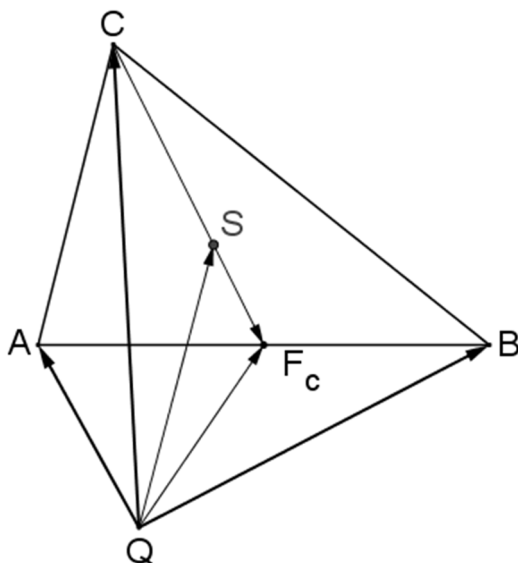
b) Szakasz 3-adoló, 4-edelő pontjába mutató vektor



VI.2) Háromszög

- a) Súlyvonala: csúcsot a szemközti oldalfelezőponttal összekötő szakasz (egyenes).
Háromszög súlyvonalai az oldalhoz közelebbi harmadolópontjukban metszik egymást, mely a háromszög súlypontja.

- b) Áll: Külső Q pontból a Δ súlypontjába mutató vektor: $\frac{\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}}{3}$, ahol $\underline{a} = \overrightarrow{QA}$ stb.



Biz.: Nézzük meg először a CF_c súlyvonal F_c -hez közelebbi S harmadolópontjába mutató vektort.

$$\underline{f}_c = \frac{\underline{a} + \underline{b}}{2}, \text{ így } \underline{s} = \underline{c} + \frac{2}{3}(\underline{f}_c - \underline{c}) = \underline{c} + \frac{2}{3}\left(\frac{\underline{a} + \underline{b}}{2} - \underline{c}\right) = \underline{c} + \frac{2}{3}\left(\frac{\underline{a} + \underline{b} - 2\underline{c}}{2}\right) = \frac{\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}}{3}$$

Így látható, hogy igaz a tétel.

DE: vegyük észre, hogyha nem tudnánk, hogy ugyanez az S pont az AF_a súlyvonal F_a -hoz közelebbi harmadolópontja, akkor az megmutatható lenne ugyanígy, és abba a harmadolópontba is $\frac{\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}}{3}$ vektor mutatna, vagyis: a súlyvonalak oldalhoz közelebbi

harmadolópontja megegyezik, tehát tényleg egy pontban metszik egymást.

VI.3) Tetraéder súlypontja hivatalosan

Majd: HF 2580, 2582, 1586 stb.

Def.: Tetraéder súlyvonala a csúcsból a szemközti lap súlypontjába húzott szakasz. A tetraédernek így 4 súlyvonala van.

Áll.: Tetraéder súlypontja: a tetraéder súlyvonalai egy pontban metszik egymást, ez a pont a súlypont, és ez a súlyvonalak a lapokhoz közelebb negyedeli.

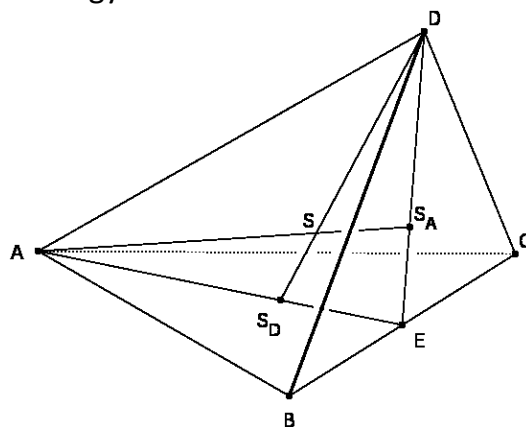
1. Biz.: Nyilván: DS_D és AS_A egy síkban van, tehát metszik egymást.

$$S^{\lambda=-3}(S_A S_D) = ASD_{\Delta}. \text{ Stb.}$$

2. Biz.: Legyen A az origó, B-be $\underline{b}$, C-be $\underline{c}$ és D-be $\underline{d}$ vektorok mutassanak. Ekkor $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$ bázis.

$$\alpha(\underline{b} + \underline{c} + \underline{d}) = \underline{d} + \beta((\underline{b} + \underline{c})/3 - \underline{d})$$

$$\Rightarrow \beta = 3/4 \checkmark$$



VI.4) Négyszög

Def: négyszög szemközti oldalfelező pontjait összekötő szakasz a négyszög középvonala!

Állítás: négyszög szemközti oldalfelező pontjai által meghatározott szakaszok felezik egymást.

1. Biz.: Az oldalfelezőpontok paralelogrammát határoznak meg...

2. Biz.: ld. ábra

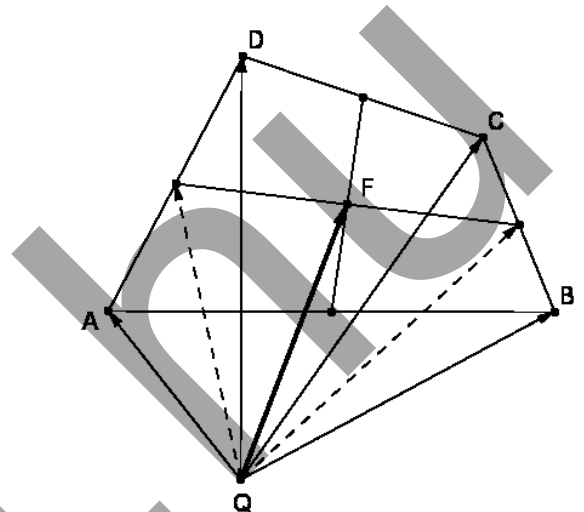
Az $F_b F_d$ felezőpontjába: az $\frac{\frac{a+d}{2} + \frac{b+c}{2}}{2} = \frac{a+b+c+d}{4}$ vektor mutat, ugyanígy a F_a és F_c felezőpontjába is...

Vegyük észre:

$$\frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}}{2} = \overrightarrow{F_d F_b}$$

$$\text{Biz.: } \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}}{2} = \frac{(\underline{b} - \underline{a}) + (\underline{c} - \underline{d})}{2}$$

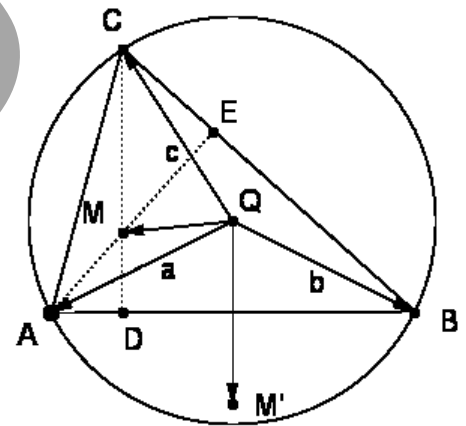
$$\text{és } \overrightarrow{F_d F_b} = \frac{\underline{b} + \underline{c}}{2} - \frac{\underline{a} + \underline{d}}{2} \quad \checkmark$$



VI.5) Euler egyenes vektorokkal

Mutassuk meg, hogy egy $\triangle M$ magasságpontját és a körülírt kör Q középpontját összekötő szakaszt az S súlypont a Q -hoz közelebb harmadolja (vagyis egy egyenesbe is esnek: „Euler egyenes”).

A bizonyítás felhasználható a Magasságpont létének bizonyítására is!



$$\underline{a} + \underline{b} \perp AB$$

Még nem tudjuk, hogy M magasságpont, csak azt kell tudnia, hogy: $\overrightarrow{QM} = \underline{c} + (\underline{a} + \underline{b})$. M nyilván rajta van m_c -n.

De mivel ugyanígy $\overrightarrow{QM} = \underline{a} + (\underline{b} + \underline{c})$, így rajta van m_a -n is. És természetesen m_b -n is.

Így a háromszög magasságai egy pontban metszik egymást, mely pontba a köréírt kör középpontjából a csúcsokba mutató vektorok eredője mutat.

$$\text{És mivel nyilván } \frac{\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}}{3} = \overrightarrow{QS} \text{ ezért: } \checkmark$$

Trigonometria – C: Szögfüggvények általános értelmezése

I) Definíciók

I.1) Forgásszögek

A forgási irány:

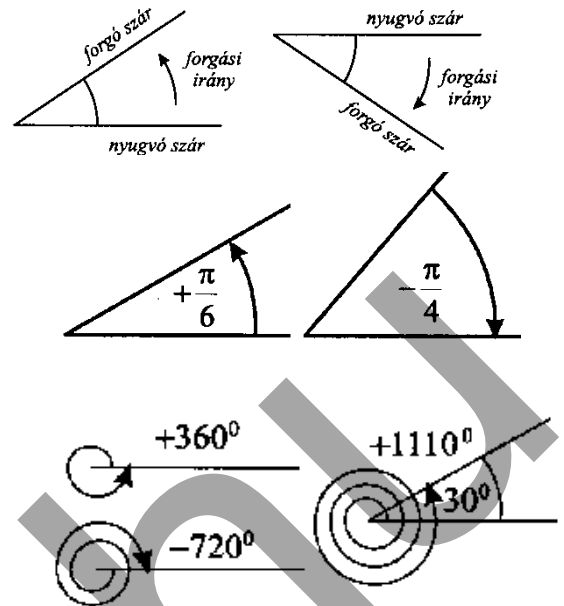
pozitív: óramutatóval ellentétes

Negatív: óramutatóval megegyező

A forgatás nagysága:

Rajzold föl:

+270°; 3720°; -2070°;



Számold ki, hogy a következő forgásszögek melyik $[0; 360^\circ[$ -ba eső szögnek feleltethetők meg, illetve a legkisebb abszolútértékű 360° szerint (illetve: $[0; 2\pi[$)

$$1810^\circ = 10^\circ + 5 \cdot 360^\circ \quad (\Leftrightarrow 1810 \equiv 10 \pmod{360})$$

3750°=

- 392°=

23,2π=

I.2) Definíciók (permanencia elv!)

sin: Az α szög sinusa az $\langle i, j \rangle$ bázisú (ortonormált, jobbrendszer) koordinátasíkon az origó körül az i vektortól α szöggel elforgatott egységvektor második (y) koordinátája.

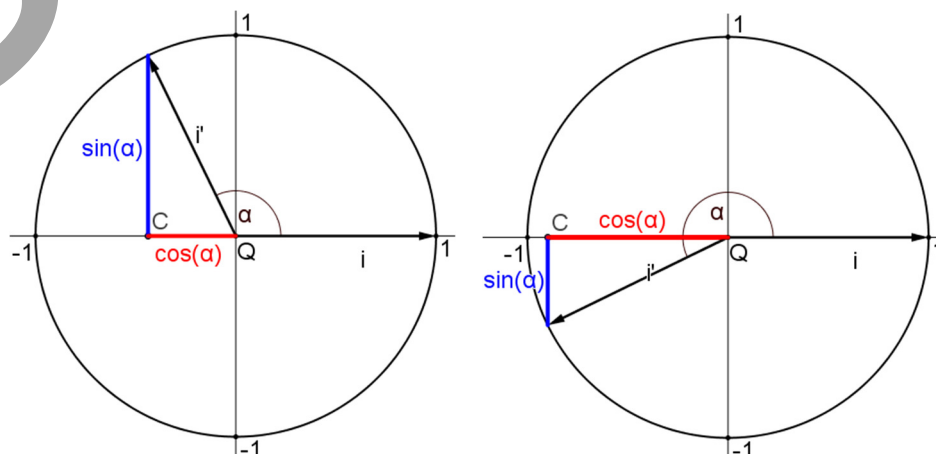
cos: Az α szög cosinusa az $\langle i, j \rangle$ bázisú (ortonormált, jobbrendszer) koordinátasíkon az origó körül az i vektortól α szöggel elforgatott egységvektor első (x) koordinátája.

tg: Az α szög tangense értelmezve van akkor, amikor a szög koszinusza nem 0 és ekkor:

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}, \quad \alpha \neq 90^\circ + k \cdot 180^\circ \quad k \in \mathbb{Z}$$

ctg: Az x ívmértékű szög cotangense értelmezve van akkor, amikor az ívmérték szinusza

nem 0 és ekkor: $\operatorname{ctg}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}, \quad x \neq m \cdot \pi \quad m \in \mathbb{Z}$



A definíciókból következik, hogy a koordinátáson az $\underline{i}$ vektortól α szöggel elforgatott egységvektor a következő alakban írható fel:

$$\underline{i}^\alpha = \underline{e}(\cos(\alpha); \sin(\alpha)) = \cos(\alpha) \cdot \underline{i} + \sin(\alpha) \cdot \underline{j}$$

Figyelem: új típusú szögfüggvény-értékek, illetve a tg és ctg-nél értelmezéstartománybeli „lukak”

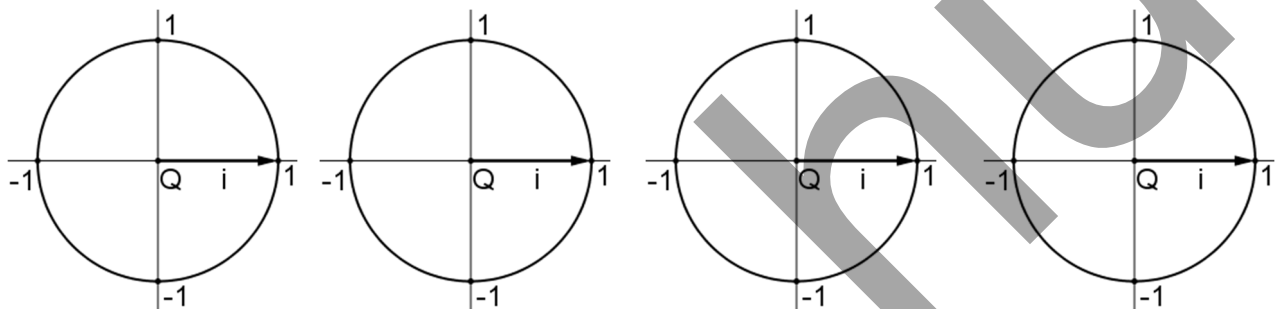
(Számoláshoz, gondolkodáshoz: mindig rajzolj kört!)

$\sin(x) \in [-1; 1]$, $\cos(x) \in [-1; 1]$: vagyis lehet 1; lehet negatív és lehet 0 is az értékük.

pl. $\sin(90^\circ) =$ $\cos(3\pi/2) =$ $\sin(210^\circ) =$ $\text{tg}(0^\circ) = 0$

$\neq \text{tg}(\pi/2)$ $\text{ctg}(3\pi/4) =$

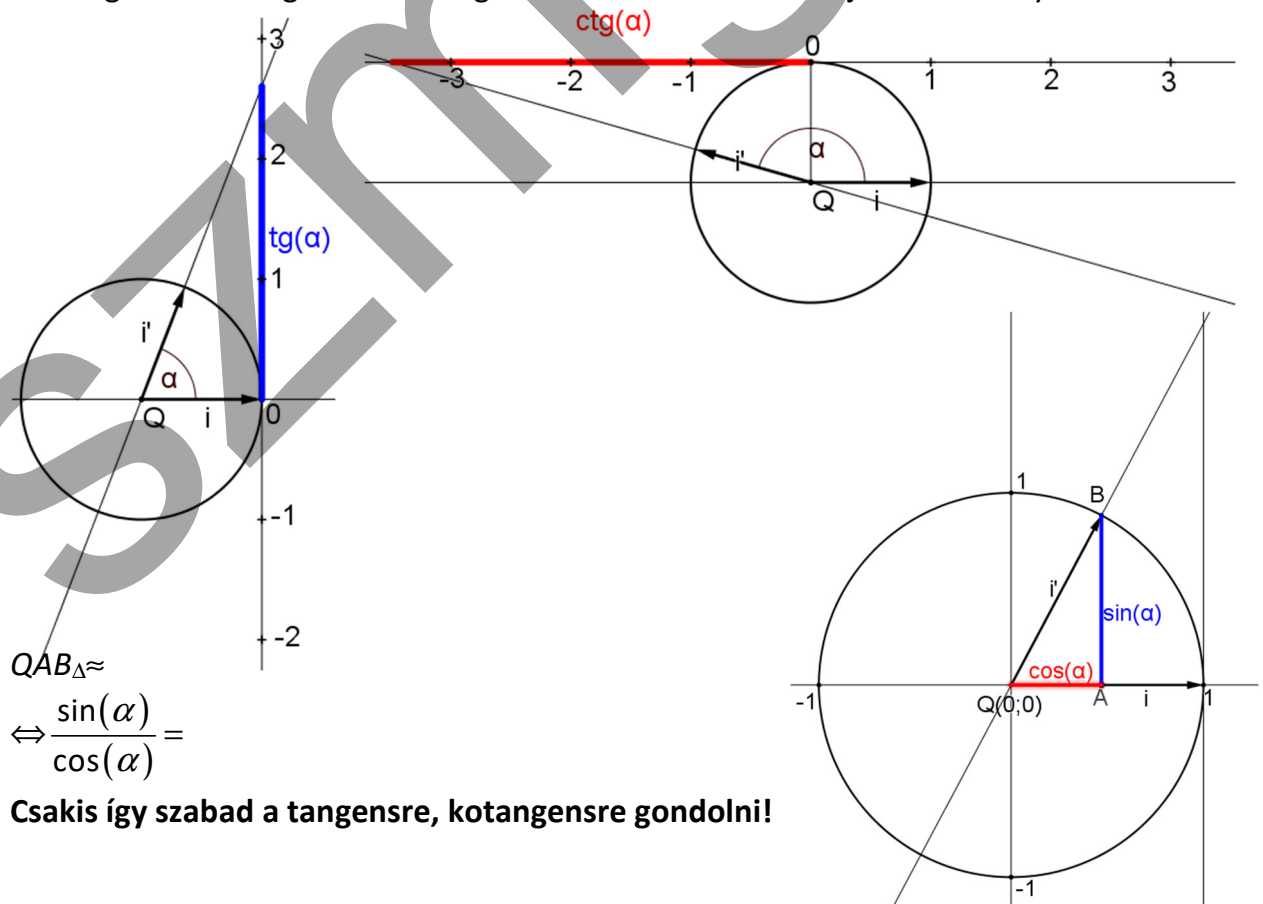
$\sin(-210^\circ) =$ $\cos(-45^\circ) =$ $\sin(-840^\circ) =$



I.3) Szemléletesen tehető a szög tangense és kotangense is

Definíció (nem kell tudni): Az α szög tangense/kotangense értelmezve van akkor, amikor a szög koszinusza/színusza nem 0 és ekkor: $\text{tg}(\alpha) = 1/\text{ctg}(\alpha) =$ annak a pontnak az y/x koordinátája, amelyet az $\underline{i}$ vektortól α szöggel elforgatott egységvektor tartóegyenese az origó körüli egységsugarú kör $(1;0)/(0;1)$ pontjához húzott érintőből kimetsz.

Szükséges a két tangens és cotangens definíció ekvivalenciájának a bizonyítása.



$$QAB_{\Delta} \approx \Leftrightarrow \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} =$$

Csakis így szabad a tangensre, kotangensre gondolni!

I.4) Permanencia elv

Ha egy logikai rendszerben új fogalmat, új definíciót vezetünk be, vagy a már meglévő definíciót bővítjük, akkor azt úgy szabad megtenni, hogy a korábbi definíciók és az az azokból következő szabályok, tételek, összefüggések érvényesek maradjanak.

Hol használtuk már a Permanencia elvet?

I.5) Figyelem: periodikus ismétlődés – nézzük meg a Geogebra-ban

$$\sin(\alpha) = \sin(\alpha + k \cdot 360^\circ), \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos(x) = \cos(x + r \cdot 2\pi), \quad r \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg}(\beta) = \sin(\beta + m \cdot 180^\circ), \quad m \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{ctg}(y) = \operatorname{ctg}(y + n \cdot \pi), \quad n \in \mathbb{Z}$$

Szorítsuk a $\sin()$ és $\cos()$ argumentumokat $[0^\circ; 360^\circ[$ illetve $[0; 2\pi[$ közé, a $\operatorname{tg}()$ és $\operatorname{ctg}()$ argumentumokat: $[0^\circ; 180^\circ[$ illetve $[0; \pi[$ közé. Ahol ismerjük, számítsuk ki!

$$\sin(870^\circ) =$$

$$\cos(19 \cdot \pi) = \cos(\pi + 9 \cdot 2\pi) = \cos(\pi) = -1$$

$$\sin(21\pi/10) =$$

$$\cos(-3810^\circ) =$$

$$\sin(-550^\circ)$$

$$\cos(-7\pi/2) =$$

$$\sin\left(\frac{171}{4} \cdot \pi\right) =$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) =$$

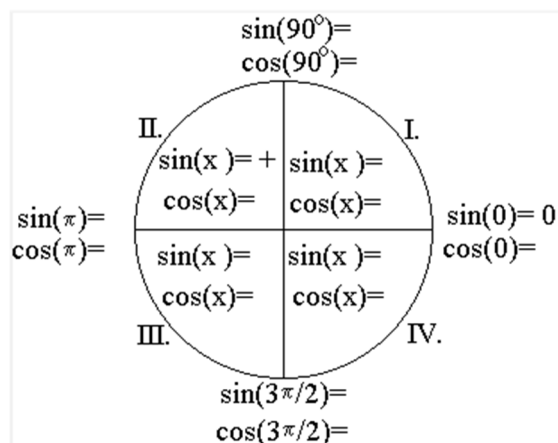
$$\operatorname{tg}(1860^\circ) =$$

$$\operatorname{tg}(71,4\pi) = \operatorname{tg}(0,4\pi)$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{27}{4} \cdot \pi\right) =$$

I.6) Előjelek

Rajzold föl a síknegyedekre az előjeleket, és a tengelyekre az értékeket!



Milyen határok között változhat x illetve β , ha: (FIGYELEM: RAJZI!)

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \text{pozitív} \\ 0 + k2\pi < x < \pi + k2\pi \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\operatorname{ctg}(x) = \text{negatív}$$

$$\cos(\beta) = \text{nem pozitív}$$

$$\operatorname{tg}(\beta) = \text{negatív}$$

Milyen határok között változhat y illetve β , ha: (FIGYELEM: RAJZ!)

$$\sin(2y) = \text{pozitív}$$

$$\text{ctg}(y/3) < 0$$

$$(\sin(2y) > 0)$$

$$0 + k2\pi < 2y < \pi + k2\pi \quad k \in \mathbb{Z} \quad /:2$$

$$0/2 + k\pi < y < \pi/2 + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos(2x+3) \leq 0$$

$$\text{tg}(-\beta) < 0$$

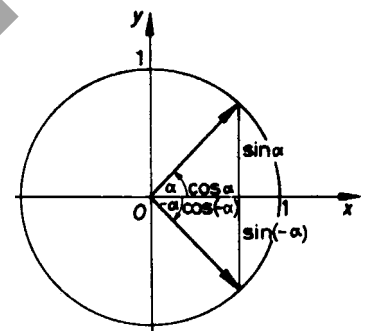
$$\sin(60^\circ - 3\beta) \geq 0$$

I.7) A negatív forgásszög

Visszavezetjük a pozitív szögek szögfüggvényértékeinek meghatározására:

Az ábráról is látható, de érdekes a következőt megfontolni.

A definíciók alapján a megfelelő egységvektorok koordinátái a $\sin$ és $\cos$ érték. A negatív forgásszög az olyan, mintha tükröznénk a pozitívan elforgatott vektort az x tengelyre. Vagyis az első koordináta ugyanaz, a második -1 -szeres lesz.



A lényeg, hogy érdemes nézni a kört, illetve a szemléletes definíciókat.

$$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$$

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

$$\text{tg}(-\beta) = -\text{tg}(\beta)$$

$$\text{ctg}(-y) = -\text{ctg}(y)$$

Tehát: amennyiben függvény hozzárendelési szabály lesz belőle, akkor a $\sin()$ fv. páratlan lesz, a $\cos()$ fv. pedig páros.

Gyakorlása

$$\sin(-45^\circ) = -\sin(45^\circ) =$$

$$\text{tg}(-\pi/3) =$$

$$\text{ctg}(-7\pi/5) = ?$$

$$\cos(-342^\circ) =$$

$$\text{tg}(-75^\circ) =$$

$$\text{ctg}(-90^\circ) =$$

Vegyük észre, hogy néha egyszerűbb 360° -ot hozzáadni...

Figyelem: Könnyebb dolgozni pozitív argumentummal!!!

II) A szögfüggvényértékek meghatározása

II.1) Ismerkedés az új definíciókkal

Ahol nincs pontos érték, ott a sin-cos argumentumokat $[0;360^\circ[$ -ba alakítsd: pl: $\sin(400^\circ)=\sin(40^\circ)$, a tg() és ctg() argumentumokat $[0;180^\circ[$ -ba.

Aki nem használja a köröket, az ökörkör.

Mivel egyenlő?

$$\sin(180^\circ)=$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ)=$$

$$\cos(180^\circ)=$$

$$\operatorname{ctg}(180^\circ)=$$

$$\sin(210^\circ)=$$

$$\operatorname{tg}(225^\circ)=$$

$$\cos(240^\circ)=$$

$$\operatorname{ctg}(270^\circ)=$$

$$\sin(810^\circ)=$$

$$\operatorname{tg}(670^\circ)=$$

$$\cos(1320^\circ)=$$

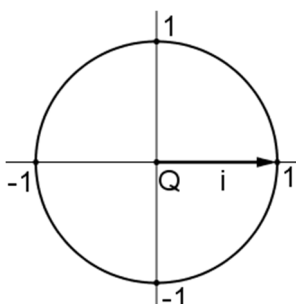
$$\operatorname{ctg}(-850^\circ)=$$

$$\sin(270^\circ)=$$

$$\operatorname{tg}(270^\circ)=$$

$$\cos(270^\circ)=$$

$$\operatorname{ctg}(360^\circ)=$$



$$\sin(330^\circ)=$$

$$\operatorname{tg}(315^\circ)=$$

$$\cos(432^\circ)=$$

$$\operatorname{ctg}(-95^\circ)=$$

$$\sin(0^\circ)=$$

$$\operatorname{tg}(0^\circ)=$$

$$\cos(0^\circ)=$$

$$\operatorname{ctg}(0^\circ)=$$

$$\sin(-60^\circ)=$$

$$\operatorname{tg}(2190^\circ)=$$

$$\cos(-210^\circ)=$$

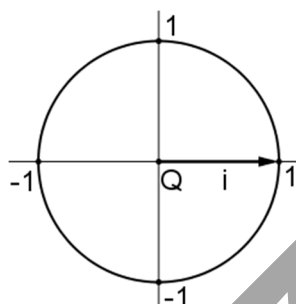
$$\operatorname{ctg}(2190^\circ)=$$

$$\sin(30^\circ)=$$

$$\operatorname{tg}(45^\circ)=$$

$$\cos(30^\circ)=$$

$$\operatorname{ctg}(45^\circ)=$$



$$\sin(390^\circ)=$$

$$\operatorname{tg}(-45^\circ)=$$

$$\cos(-420^\circ)=$$

$$\operatorname{ctg}(-180^\circ)=$$

$$\sin(-420^\circ)=$$

$$\operatorname{tg}(135^\circ)=$$

$$\cos(150^\circ)=$$

$$\operatorname{ctg}(-390^\circ)=$$

$$\sin(-150^\circ)=$$

$$\cos(-60^\circ)=$$

$$\sin(18^\circ)=$$

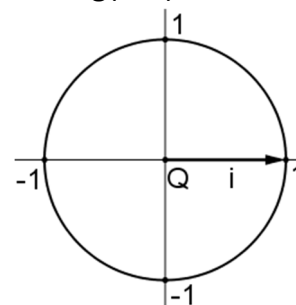
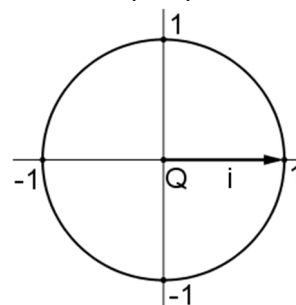
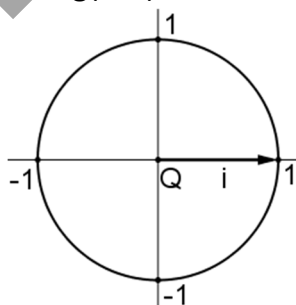
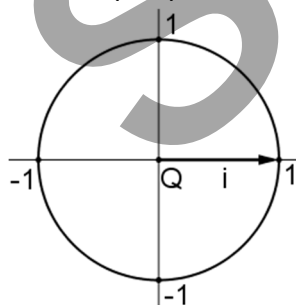
$$\cos(-72^\circ)=$$

$$\sin(90^\circ)=$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ)=$$

$$\cos(90^\circ)=$$

$$\operatorname{ctg}(90^\circ)=$$



$$\sin(360^\circ)=$$

$$\operatorname{tg}(360^\circ)=$$

$$\cos(360^\circ)=$$

$$\operatorname{ctg}(-360^\circ)=$$

$$\sin(120^\circ)=$$

$$\operatorname{tg}(-135^\circ)=$$

$$\cos(540^\circ)=$$

$$\operatorname{ctg}(-270^\circ)=$$

$$\sin(570^\circ)=$$

$$\operatorname{tg}(1200^\circ)=$$

$$\cos(1110^\circ)=$$

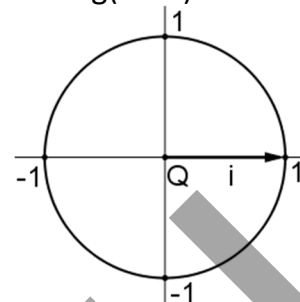
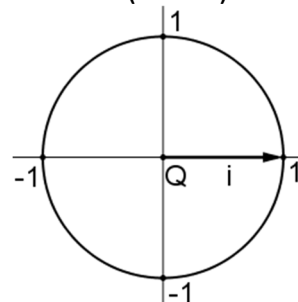
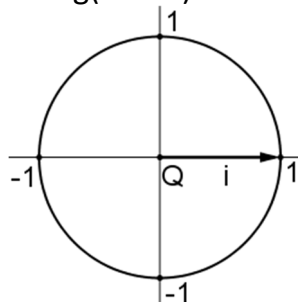
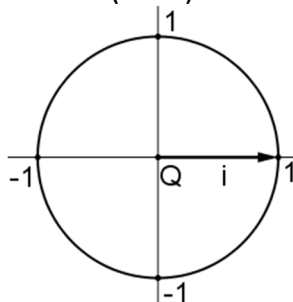
$$\operatorname{ctg}(-1560^\circ)=$$

$$\sin(-90^\circ)=$$

$$\operatorname{tg}(-390^\circ)=$$

$$\cos(-270^\circ)=$$

$$\operatorname{ctg}(225^\circ)=$$



$$\sin(\pi/6)=$$

$$\cos(\pi/3)=$$

$$\operatorname{tg}(\pi/4)=$$

$$\operatorname{ctg}(\pi/4)=$$

$$\sin(\pi/2)=$$

$$\cos(\pi/2)=$$

$$\operatorname{tg}(\pi/2)=$$

$$\operatorname{ctg}(\pi/2)=$$

$$\sin(2\pi/3)=$$

$$\cos(5\pi/6)=$$

$$\operatorname{tg}(3\pi/4)=$$

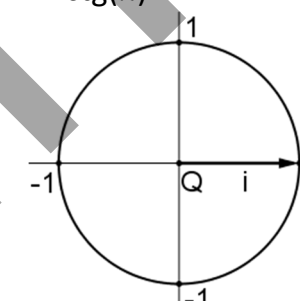
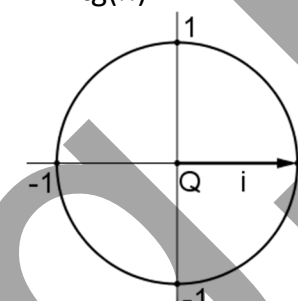
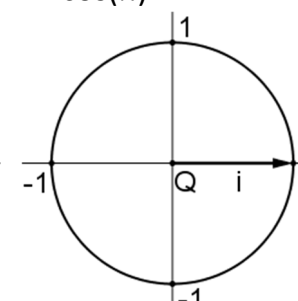
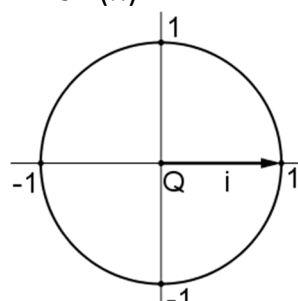
$$\operatorname{ctg}(3\pi/4)=$$

$$\sin(\pi)=$$

$$\cos(\pi)=$$

$$\operatorname{tg}(\pi)=$$

$$\operatorname{ctg}(\pi)=$$



$$\sin(7\pi/3)=$$

$$\cos(4\pi/3)=$$

$$\operatorname{tg}(5\pi/4)=$$

$$\operatorname{ctg}(5\pi/3)=$$

$$\sin(3\pi/2)=$$

$$\cos(3\pi/2)=$$

$$\operatorname{tg}(3\pi/2)=$$

$$\operatorname{ctg}(2\pi)=$$

$$\sin(11\pi/6)=$$

$$\cos(-8\pi/3)=$$

$$\operatorname{tg}(7\pi/4)=$$

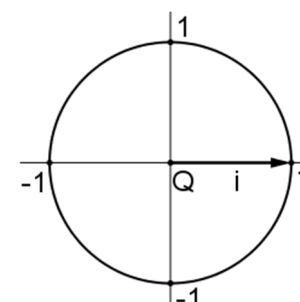
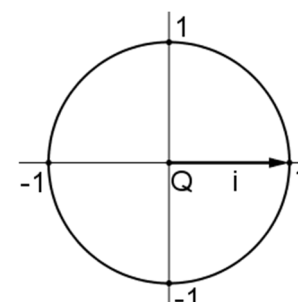
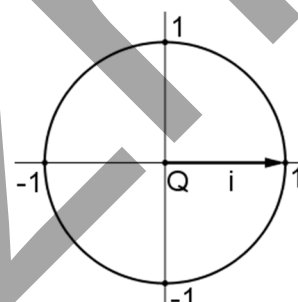
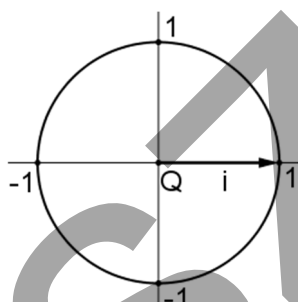
$$\operatorname{ctg}(-\pi/2)=$$

$$\sin(-\pi)=0$$

$$\cos(-\pi)=$$

$$\operatorname{tg}(-\pi)=$$

$$\operatorname{ctg}(-\pi)=$$



$$\sin(13\pi/3)=$$

$$\cos(7\pi/6)=$$

$$\operatorname{tg}(-\pi/4)=$$

$$\operatorname{ctg}(-\pi/3)=$$

$$\sin(3\pi/2)=$$

$$\cos(3\pi/2)=$$

$$\operatorname{tg}(-3\pi/4)=$$

$$\operatorname{ctg}(-3\pi/2)=$$

$$\sin(19\pi/6)=$$

$$\cos(11\pi/6)=$$

$$\operatorname{tg}(10\pi/3)=$$

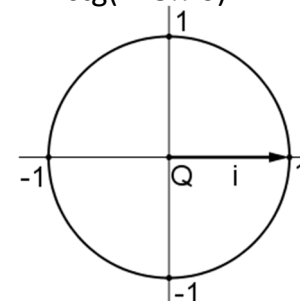
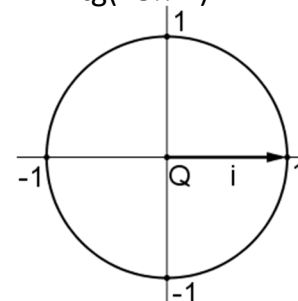
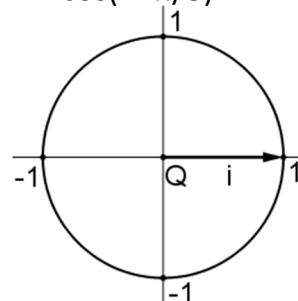
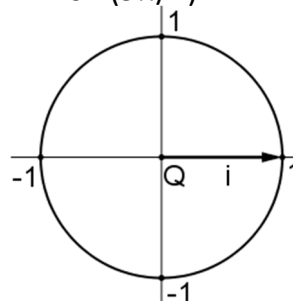
$$\operatorname{ctg}(-26\pi/3)=$$

$$\sin(9\pi/2)=$$

$$\cos(22\pi/3)=$$

$$\operatorname{tg}(13\pi/4)=$$

$$\operatorname{ctg}(-25\pi/6)=$$



$$\sin(-\pi/6)=$$

$$\cos(-4\pi/3)=$$

$$\operatorname{tg}(73\pi/6)=$$

$$\operatorname{ctg}(73\pi/6)=$$

$$\sin(-\pi/2)=$$

$$\cos(-3\pi/2)=$$

$$\operatorname{tg}(-7\pi/4)=$$

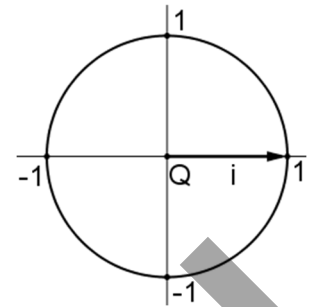
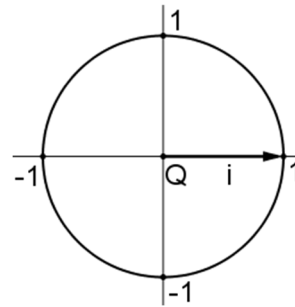
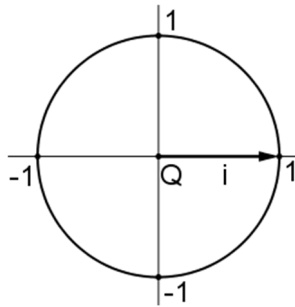
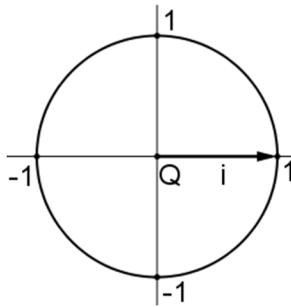
$$\operatorname{ctg}(5\pi/4)=1$$

$$\sin(-5\pi/6)=$$

$$\cos(-13\pi/6)=$$

$$\cos(2\pi/5)=$$

$$\cos(10\pi)=$$



II.2) A lényeges tartomány: $[0^\circ; 90^\circ]$

a) Hegyes-szög

$$\sin(30^\circ)=$$

$$\operatorname{tg}(\pi/3)=$$

$$\cos(2\pi/5)=$$

$$\operatorname{ctg}(45^\circ)=$$

$$\sin(750^\circ)=$$

$$\operatorname{tg}(13\pi/3)=$$

$$\cos(22\pi/5)=$$

$$\operatorname{ctg}(5525^\circ)=$$

b) Ha $90^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$, akkor:

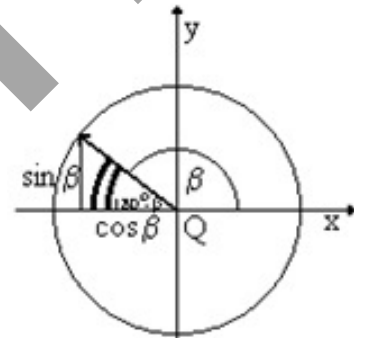
$$\sin(\beta)=\sin(180^\circ-\beta),$$

$\Rightarrow$ ha $\operatorname{tg}(\beta)$ és $\operatorname{ctg}(\beta)$ értelmezve van, akkor:

$$\operatorname{tg}(\beta)=-\operatorname{tg}(180^\circ-\beta)$$

$$\cos(x)=-\cos(\pi-x)$$

$$\operatorname{ctg}(\beta)=-\operatorname{ctg}(180^\circ-\beta)$$



$$\sin(-135^\circ)=$$

$$\operatorname{ctg}(2\pi/3)=$$

$$\cos(-3\pi/5)=$$

$$\operatorname{tg}(3\pi/4)=?$$

Írd át 0° és 90° fok közé az argumentumot:

$$\text{pl.: } \cos(172^\circ)=-\cos(18^\circ)$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ)=$$

$$\sin(100^\circ)=$$

$$\operatorname{tg}(125^\circ)=$$

$$\sin(3\pi/4)=$$

$$\cos(-2)=_{(\text{sic})}=$$

$$\cos(112^\circ)=$$

$$\operatorname{tg}(5/7 \cdot \pi)=?$$

$$\sin(-1940^\circ)=$$

$$\operatorname{ctg}(20\pi/3)=$$

$$\cos(-53\pi/5)=$$

$$\operatorname{tg}(35\pi/4)=?$$

c) Ha $x \in [\pi; 3\pi/2] \Rightarrow$ (gyakorlatilag 180° -ot forgatunk! Így könnyebb elképzelni!)

$$\sin(x) = -\sin(x-180^\circ)$$

$$\sin(x) = -\sin(x+180^\circ)$$

$$\cos(x) = -\cos(x-180^\circ)$$

$$\cos(x) = -\cos(x+180^\circ)$$

$\Rightarrow$ ha $\operatorname{tg}(\alpha)$ és $\operatorname{ctg}(\alpha)$ értelmezve van, akkor:

$$\operatorname{tg}(x) = \operatorname{tg}(x - \pi/2)$$

$$\operatorname{ctg}(x) = \operatorname{ctg}(x - \pi/2)$$

$$\sin(225^\circ) =$$

$$\operatorname{ctg}(7\pi/6) =$$

$$\cos(5\pi/4) =$$

$$\operatorname{tg}(240^\circ) =$$

Írd át 0° és 90° fok közé az argumentumot:

pl.: $\cos(192^\circ) = -\cos(12^\circ)$

$$\operatorname{tg}(220^\circ) =$$

$$\sin(195^\circ) =$$

$$\operatorname{tg}(265^\circ) =$$

$$\sin(10\pi/7) =$$

$$\operatorname{ctg}(4,2) =$$

$$\cos(250^\circ) =$$

$$\operatorname{tg}(8/7 \cdot \pi) =$$

$$\sin(6345^\circ) =$$

$$\operatorname{ctg}(43\pi/6) =$$

$$\cos(45\pi/4) =$$

$$\operatorname{tg}(2760^\circ) =$$

d) Ha $\beta \in [270^\circ; 360^\circ]$

$$\sin(\beta) = -\sin(360^\circ - \beta)$$

$$\cos(\beta) = \cos(360^\circ - \beta)$$

$\Rightarrow$ ha $\operatorname{tg}(\beta)$ és $\operatorname{ctg}(\beta)$ értelmezve van, akkor:

$$\operatorname{tg}(\beta) = -\operatorname{tg}(360^\circ - \beta)$$

$$\operatorname{ctg}(\beta) = -\operatorname{ctg}(360^\circ - \beta)$$

$$\sin(300^\circ) =$$

$$\operatorname{ctg}(7\pi/4) =$$

$$\cos(11\pi/6) =$$

$$\operatorname{tg}(5\pi/3) =$$

Írd át 0° és 90° fok közé az argumentumot:

pl.: $\cos(272^\circ) = \cos(88^\circ)$

$$\operatorname{tg}(310^\circ) =$$

$$\sin(295^\circ) =$$

$$\operatorname{tg}(347^\circ) =$$

$$\sin(12\pi/7) =$$

$$\operatorname{ctg}(5,8) =$$

$$\cos(332^\circ) =$$

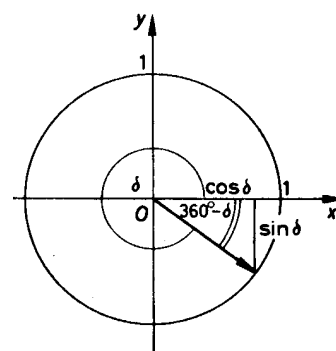
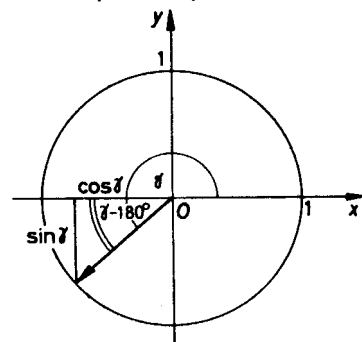
$$\operatorname{tg}(25/13 \cdot \pi) =$$

$$\sin(2867^\circ) =$$

$$\operatorname{ctg}(107\pi/4) =$$

$$\cos(71\pi/6) =$$

$$\operatorname{tg}(35\pi/3) = ?$$



II.3) Táblázat

Szögek	A táblázatból kikeressük	A szögfüggvényérték előjele, vagy értéke			
		$\sin()$	$\cos()$	$\operatorname{tg}()$	$\operatorname{ctg}()$
0°	—	0	1	0	nincs értelmezve
	az α szögfüggvényét	+	+	+	+
90°	—	1	0	nincs értelmezve	0
	a $180^\circ - \alpha$ szögfüggvényét	+	-	-	-
180°	—	0	-1	0	nincs értelmezve
	az $\alpha - 180^\circ$ szögfüggvényét	-	-	+	+
270°	—	-1	0	nincs értelmezve	0
	a $360^\circ - \alpha$ szögfüggvényét	-	+	-	-

II.4) Gyakorlás

- a) Helyezd be $[0; 90^\circ]$ közé, vagy $[0; \pi/2]$ közé. Ha ismert az érték, számold is ki!

$$\cos(-3840^\circ) =$$

$$\sin(3465^\circ) =$$

$$\operatorname{tg}(2010^\circ) =$$

$$\sin(680^\circ) =$$

$$\cos(1908^\circ) =$$

$$\operatorname{ctg}(27\pi/3) =$$

$$\cos(10 \text{ rad}) =$$

$$\sin(-23,7\pi) = ;$$

- b) Helyezd be $[0; 45^\circ]$ közé, vagy $[0; \pi/4]$ közé. Ha ismert az érték, számold is ki!

$$\cos(825^\circ) =$$

$$\cos(105^\circ) =$$

$$-\cos(75^\circ) =$$

$$-\sin(15^\circ) =$$

$$\operatorname{tg}(2465^\circ) =$$

$$\sin(-410^\circ) =$$

$$\sin(780^\circ) =$$

$$\cos(1908^\circ) =$$

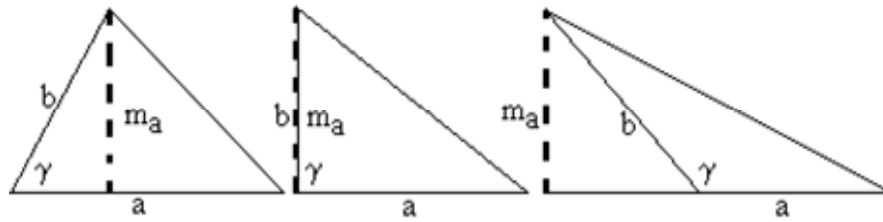
$$\sin(11\pi/7) =$$

$$\operatorname{tg}(-22\pi/9) =$$

II.5) Terület

a) Háromszög területe

Tétel: $T_{\Delta} = \frac{a \cdot b \cdot \sin(\gamma)}{2}$, „két oldal szorzata, szorozva a közrezárt szög sinusa per kettő.”



Biz: γ hegyesszög $\Rightarrow b \cdot \sin(\gamma) = m_a \Rightarrow \frac{a \cdot b \cdot \sin(\gamma)}{2} = \frac{a \cdot m_a}{2} = T_{\Delta}$

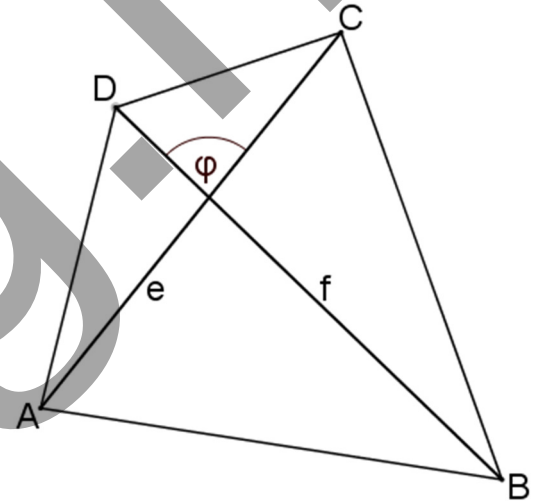
γ derékszög: $\Rightarrow b \cdot \sin(\gamma) = m_a \Rightarrow \frac{a \cdot b \cdot \sin(\gamma)}{2} = \frac{a \cdot m_a}{2} = T_{\Delta}$

γ tompaszög $\Rightarrow b \cdot \sin(\gamma) = m_a \Rightarrow \frac{a \cdot b \cdot \sin(\gamma)}{2} = \frac{a \cdot m_a}{2} = T_{\Delta}$

b) Tétel: konvex négyszög területe:

$$\frac{e \cdot f \cdot \sin(\varphi)}{2}, \text{ ahol } \varphi = \angle(e; f)$$

Biz.:



c) Gyakorlás

Egy paralelogramma területe 150 e^2 , egyik oldala 14 e hosszú. A paralelogramma egyik szöge 60° . Mekkora a másik oldal?

Egy Δ -ben: $s_a = 9$ és $s_b = 12 \text{ cm}$. Az általuk bezárt szög 18° . $T_{\Delta} = ?$

Háromszögből adott: $a+b=30$ e; $T_A=54\sqrt{2}$ e², $\gamma=45^\circ$. Mekkora az a és a b oldal hossza?

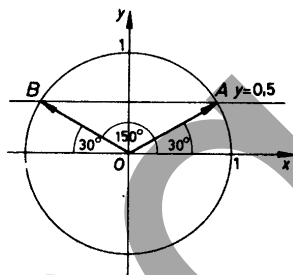
II.6) Trigonometrikus alapegyenletek – amikre mindent visszavezetünk

a) Inverz? inverz!

„Egyenletnek lehet több megoldása”, de „egy függvénynek v. műveletnek csakis egy kimeneti értéke lehet!”

Keressük azt az α szöget, amelyről tudjuk, hogy $\sin(x)=0,5$.

Felrajzolva az egységgörte, látható, hogy kettő megoldás van, és mindkettő egy-egy sorozat, vagyis igazából: két sorozat megoldás van:

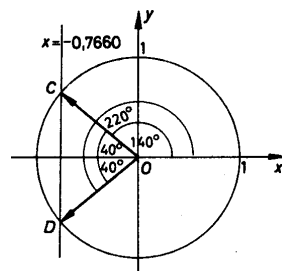


$$x_1 = \pi/6 + k_1 \cdot 2\pi \quad x_2 = 5\pi/6 + k_2 \cdot 2\pi \text{ ahol } k_1 \text{ és } k_2 \in \mathbb{Z}.$$

Így két „megoldássorozatot” kaptunk.

b) Alapegyenletek

$$\cos(2\beta - 10^\circ) = -0,766045$$



$$\text{ctg}(\pi/3 - 2\gamma) = -1$$

Megfigyelés: Sin, Cos egyenleteknél általában 2 sorozat gyök van, tg, ctg-nél: általában egy sorozat gyök van.

Érdekesség: $\sin(3x)=0$ és $\cos(2\alpha-45^\circ)=-1$ egyenleteknél egy gyöksorozat van.

Oka: A szélsőértékeket (-1; +1) csak egyszer veszik fel egy periódusban, a zérushelyeket pedig kétszer, félperiódusonként!

- c) „Egyenletnek lehet több megoldása” de „egy függvénynek v. műveletnek csakis egy kimeneti értéke lehet”

$$\arcsin(x) := \sin^{-1}(x)$$

$$\arccos(x) := \cos^{-1}(x)$$

$$\operatorname{arctg}(x) := \operatorname{tg}^{-1}(x)$$

$$\operatorname{arcctg}(x) := \operatorname{ctg}^{-1}(x);$$

De milyen értékeket adnak?

Az $\arcsin()$ a $[-\pi/2; \pi/2]$ -ba ad értéket. $\operatorname{arctg}()$ a $]-\pi/2; \pi/2[$ -ba

Az $\arccos()$ a $[0; 180^\circ]$ -ba

$\operatorname{arcctg}()$ a $]0; 180^\circ[$ -ba.

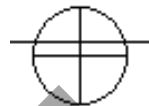
Nyilván az eredeti az csak radiánba, de a számológépek fokba is.

Pl.: $\arcsin(0,5) = \pi/6$. Jobb gépek így írják ki, de más gépek: 0,523598775598

De hogyan dolgozunk velük.

Egyenleteknél, ahol nem ismert szög a keresett (rész)eredmény, ott csak a legvégén adjuk meg a kerekítést. Mindig pontos értékekkel számolunk:

$$\sin(3x - \pi/7) = 0,3$$



I.

II.

$$(3x - \pi/7)_1 = \arcsin(0,3) + m_1 \cdot 2\pi$$

$$2 \cdot \operatorname{tg}(2y - \pi/3) = -12$$

III) Trigonometriai függvények: milliméterpapír!

III.1) Függvényelemzés az eddigi szinten: (táblázatban, mellette, rajz)

- A függvény definíciója
- Ért. tart. (Ért. készlet ált. később, a menetnél!) A trigonometrikus fv-eknél a szöget radiánnal, tehát valós számokkal mérjük!

c) Periodicitás

Def.: Legyen az $f: D_f \rightarrow R_f; y=f(x)$ és egy periódus: $p \in \mathbb{R}^+$.

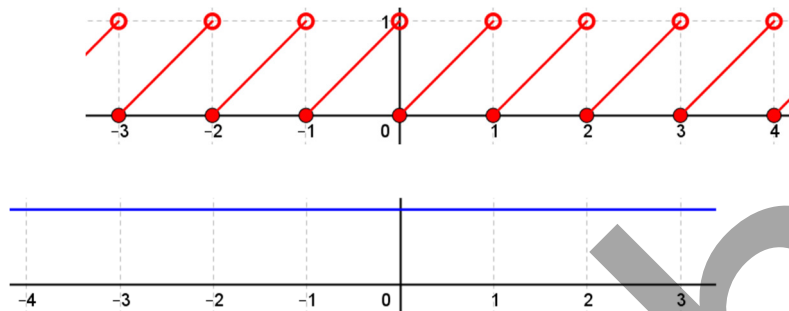
Ekkor az f függvény periodikus, ha teljesül a következő két feltétel: (Mat. Kislex.)

$\forall x \in D_f \Rightarrow x+k \cdot p \in D_f$ ahol: $k \in \mathbb{Z}$ és $\forall x \in D_f \Rightarrow f(x)=f(x+p)$

A definícióból következik, hogy ha egy függvény p -re periodikus, akkor végtelen sok periódusa van: $1 \cdot p; 2 \cdot p; \text{ stb.}$

Ha $\exists$ legkisebb periódus, akkor az az alapperiódus.

Láttunk már ilyen függvényeket: törtrész függvény; konstans fv.



Érdekes a konstans függvény. Periodikus, de nincs alapperiódusa!

A jellemzésnél ha periodikus a függvény, akkor azt szögezzük le először, mert később ezt már felhasználjuk!

d) Zérushelyek

Természetesen ha periodikus, akkor sorozatokkal adjuk meg őket.

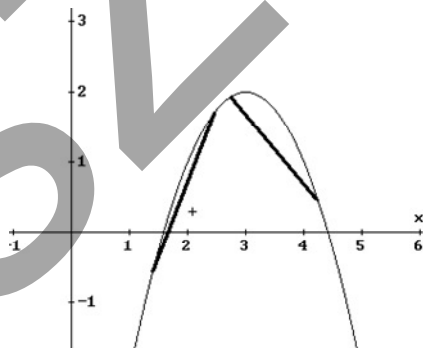
e) Menet – ha periodikus: akkor egy periódusban

(i) Monotonitások - a fogalmakat már láttuk, ismételd át a definíciókat!

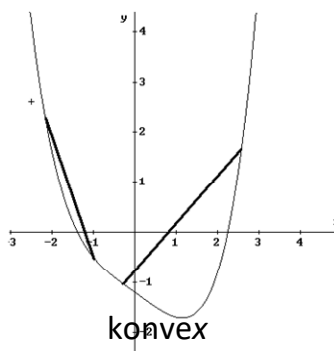
(ii) Konvexitás

Def. (Egy szemléletes, de hibátlan definíció!):

Azt mondjuk, hogy egy $f: D_f \rightarrow R_f; y=f(x)$ függvény konvex/konkáv az $I \subset D_f$ folytonos és zárt intervallumon, ha $\forall x_1 \neq x_2 \in I \Rightarrow$ az $(x_1; f(x_1))$ és $(x_2; f(x_2))$ pontokat összekötő húr $\forall$ pontja f grafikonja fölött/alatt van.



konkáv

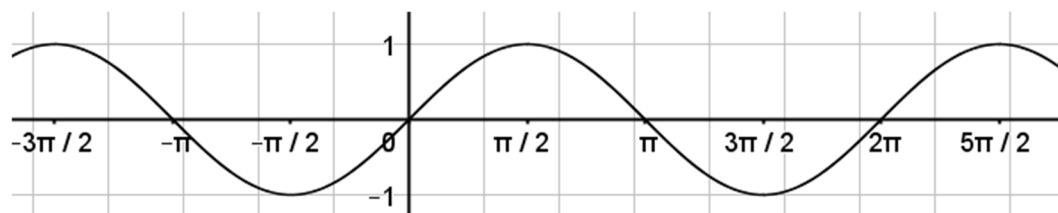


konvex

Def.: ... f fv konvex az $[a;b] \subset R_f$ intervallumon, ha

$$\forall x_1, x_2 \in D_f \Rightarrow f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

Inflexió pont: az az értelmezéstartománybeli pont,
ahol a fv. konvexből konkávba,
vagy konkávból konvexbe vált. pl:

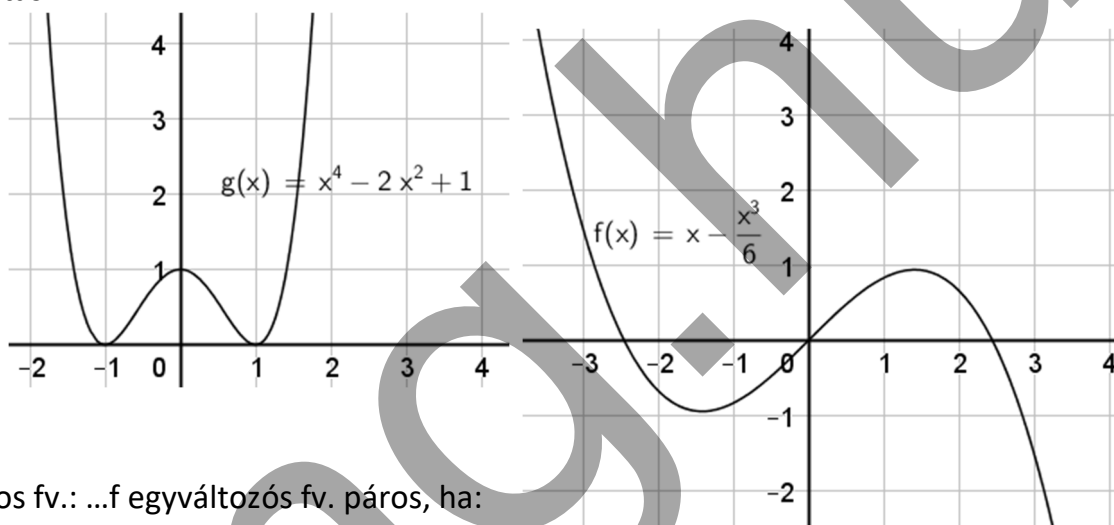


(iii) Szélsőértékek (abszolút, lokális) helyek, értékek

(iv) Értékkészlet

(v) Alak

(vi) Paritás



Páros fv.: ... f egyváltozós fv. páros, ha:

$$\forall x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f \text{ és } f(x) = f(-x)$$

Mit jelent ez a grafikonra nézve? Azt, hogy:

$$P(x; f(x)) \in \text{graf}_f \Leftrightarrow P'(-x; f(x)) \in \text{graf}_f$$



graf_f tükrös az y tengelyre

pl.: $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x^2$ vagy $f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x^4$

Figyeld meg, hogy a páros kitevőjűek mind ilyenek: x^{2k} fv.

Vegyük észre, a **cosinus** mint hozzárendelési szabály, ezt tudja.

Páratlan fv.: ... f () egyváltozós fv. páratlan, ha:

$$\forall x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f \text{ és } f(x) = -f(-x)$$

Mit jelent ez a grafikonra nézve? Azt, hogy:

$$P(x; f(x)) \in \text{graf}_f \Leftrightarrow P'(-x; -f(x)) \in \text{graf}_f$$



graf_f tükrös az origóra.

pl.: $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x^1$ vagy $f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x^3$

Rajzold fel! Figyeld meg, hogy a páratlan kitevőjűek mind ilyenek: x^{2k+1} fv.

Vegyük észre, a **sinus** mint hozzárendelési szabály, ezt tudja.

III.2) A szinusz függvény

a) Definíció: $\sin(\cdot): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y = \sin(x)$.

b) $D_{\sin}$:

c) Periodikus

Alapperiódus: 2π .

Vagyis $\forall x \in D_{\sin} \Rightarrow x + k \cdot 2\pi \in D_{\sin}$ ahol: $k \in \mathbf{Z}$; és $\forall x \in D_{\sin} \Rightarrow \sin(x) = \sin(x + 2\pi)$

Fontos: a periodikus fv-eket az ábr. és jell. során egy jó perióduson belül kell csak vizsgálni. Ennek a két széle legyen zárt, de elég lenne csak félig nyílt intervallumot vizsgálni!

d) Paritás: $\sin(x) = -\sin(-x) \Rightarrow$ páratlan, az origóra szimmetrikus a grafikonja

e) ZH.:

f) Menet vizsgálat egy periódusban: a $[0; 2\pi]$ intervallumon

Monotonitások; Szélsőért.; Értékkészlet; Konvexitás

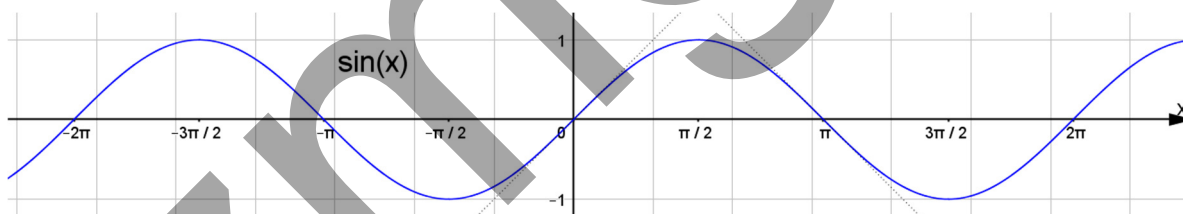
$\sin(\cdot)$ fv.	0	$]0; \pi/2[$	$\pi/2$ max. h.	$]\pi/2; \pi[$	π infl. pont	$]\pi; 3\pi/2[$	$3\pi/2$ min. h.	$]3\pi/2; 2\pi[$	2π
ZH	0				0				0
menet									
min-max é.									
konvexitás									

g) Értékkészlet: $R_{\sin} =$

h) Alakja: „szinuszgörbe”. Az alapfüggvény meredeksége 0-ban: 1 !

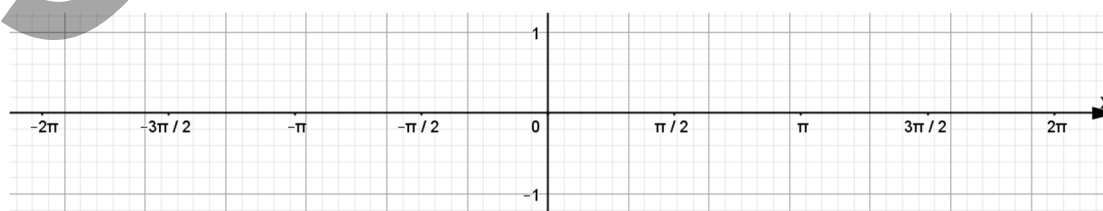
i) Grafikonja

Figyelem: az alapfüggvény 0-ban, és az annak megfelelő helyeken az 1 illetve -1 meredekségű lineáris fv. grafikonjához simul!



Rajzold be a pontokat, próbálj meg szép fv. grafikon rajzolni!

radián	0	0,524	0,785	1,047	1,571	2,094	2,356	2,618	3,142	3,665	3,927	4,189	4,712	5,236	5,498	5,76	6,283
fok	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
x rad	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π	$7\pi/6$	$5\pi/4$	$4\pi/3$	$3\pi/2$	$5\pi/3$	$7\pi/4$	$11\pi/6$	2π
$\sin(x)$			0,71	0,87		0,87	0,71				-0,71	-0,87		-0,87	-0,71		



III.3) A $\cos(\)$ fv.

a) Definíció: $\cos(\) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; y = \cos(x)$.

b) $D_{\cos}$:

c) Periodikus

Alapperiódus: 2π .

Vagyis $\forall x \in D_{\cos} \Rightarrow x + k \cdot 2\pi \in D_{\cos}$ ahol: $k \in \mathbf{Z}$; és $\forall x \in D_{\cos} \Rightarrow \cos(x) = \cos(x + 2\pi)$

Fontos: a periodikus fv-eket az ábr. és jell. során egy jó perióduson belül kell csak vizsgálni. Ennek a két széle legyen zárt, de elég lenne csak félig nyílt intervallumot vizsgálni!

d) Paritás: $\cos(x) = \cos(-x) \Rightarrow$ páros, az y tengelyre szimmetrikus a grafikonja

e) ZH.:

f) Menet vizsgálat egy periódusban: a $[0; 2\pi]$ intervallumon

Monotonitások; Szélsőért.; Értékkészlet; Konvexitás

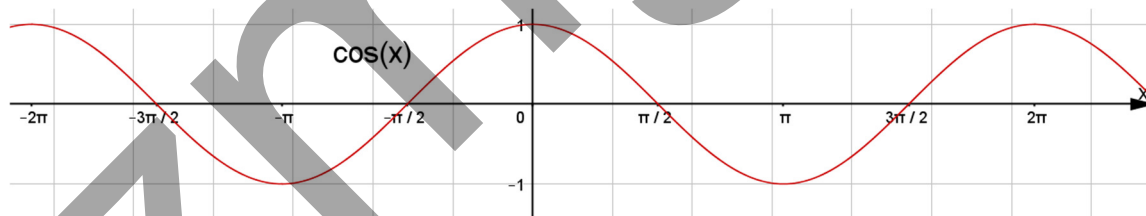
$\cos(\)$ fv.	0	$]0; \pi/2[$	$\pi/2$ infl. Pont	$] \pi/2; \pi[$	π	$] \pi; 3\pi/2[$	$3\pi/2$ infl. Pont	$] 3\pi/2; 2\pi[$	2π
ZH									
menet									
min-max é.									
konvexitás									

g) Értékkészlet: $R_{\cos} =$

h) Alakja „szinuszgörbe”. Figyelem: Az alapfüggvény meredeksége $\pi/2$ -ben: -1 !

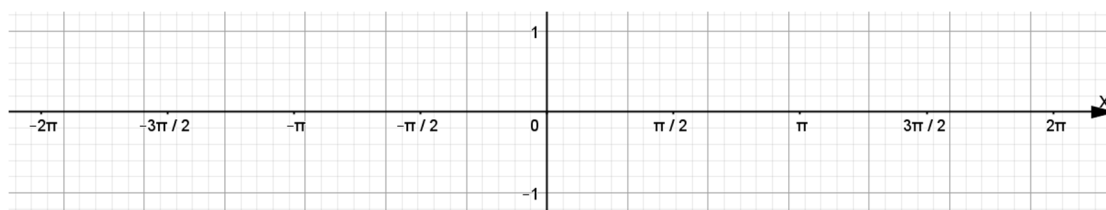
i) Grafikonja

Figyelem: az alapfüggvény $\pi/2$ -ben, és az annak megfelelő helyeken az 1 illetve -1 meredekségű lineáris fv. grafikonjához simul!



Rajzold be a pontokat, próbálj meg szép fv. grafikon rajzolni!

radián	0	0,524	0,785	1,047	1,571	2,094	2,356	2,618	3,142	3,665	3,927	4,189	4,712	5,236	5,498	5,76	6,283
fok	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
x rad	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π	$7\pi/6$	$5\pi/4$	$4\pi/3$	$3\pi/2$	$5\pi/3$	$7\pi/4$	$11\pi/6$	2π
$\cos(x)$		0,87	0,71				-0,71	-0,87		-0,87	-0,71				0,71	0,87	



III.4) A tangens fv.

a) Definíció: $\text{tg}(\cdot): \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}; y = \text{tg}(x)$

b) $D_{\text{tg}} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

c) Periodikus

Alapper: vagyis:

d) Paritás

$\text{tg}(x) = -\text{tg}(-x) \Rightarrow$ páratlan, az origóra szimmetrikus a grafikonja

e) ZH.:

f) Menet vizsgálat egy periódusban: a $[-\pi/2; \pi/2]$ intervallumon

$\text{tg}(\cdot)$ fv.	$-\pi/2$	$]-\pi/2; 0[$	0 infl. pont	$]0; \pi/2[$	$\pi/2$
ZH					
menet					
határérték:					
konvexitás					

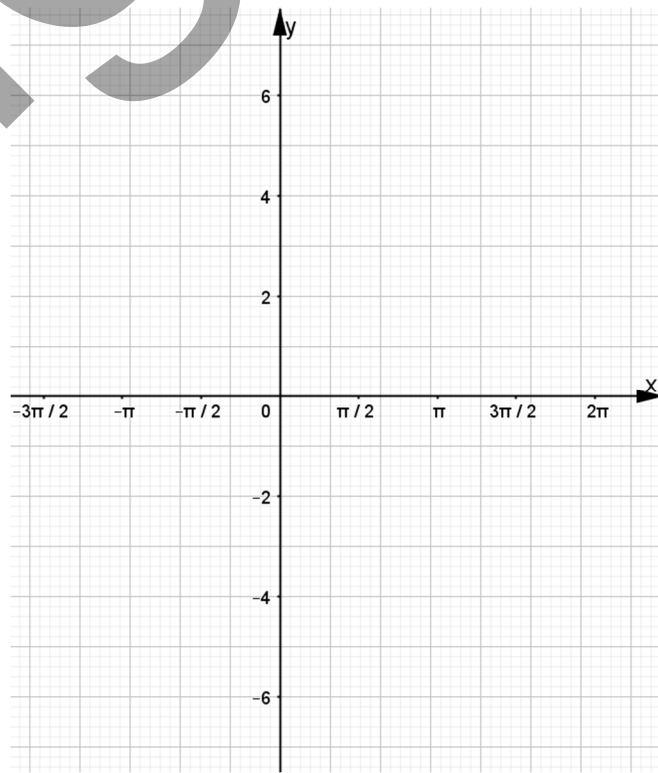
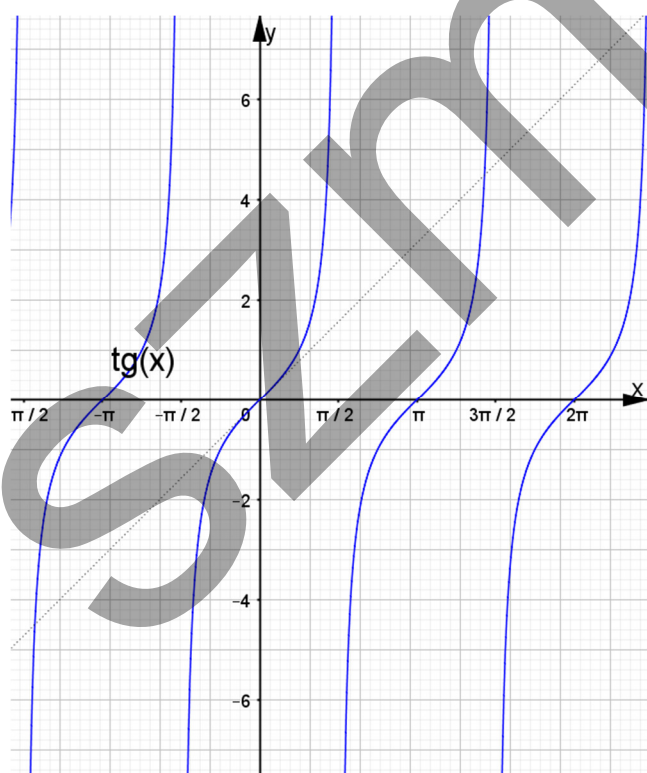
g) Értékkészlet: $R_{\text{tg}} =$

h) Alakja „tangens”. Figyelem: Az alapfüggvény meredeksége 0-ban: 1 !

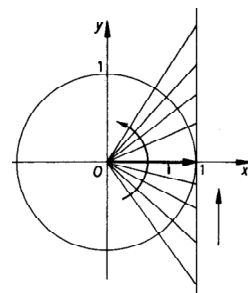
Aszimptoták:

i) Grafikonja:

Figyelem: az origóban, és az annak megfelelő helyeken az $y=x$ függvényhez simul!



	-1,571	-1,047	-0,785	-0,524	0	0,524	0,785	1,047	1,571
fok	-90°	-60°	-45°	-30°	0°	30°	45°	60°	90°
x rad	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
tg(x)		-1,732	-1	-0,577	0	0,577	1	1,732	



III.5) A cotangens fv.

a) Definíció: $\text{ctg}(\cdot): \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x = 0 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}; y = \text{ctg}(x)$

b) $D_{\text{ctg}} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

c) Periodikus

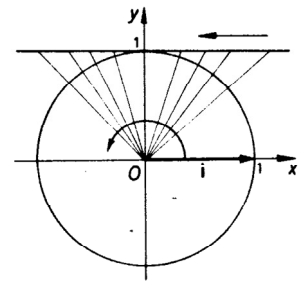
Alapper: vagyis:

d) Paritás

$\text{ctg}(x) = -\text{ctg}(-x) \Rightarrow$ páratlan, az origóra szimmetrikus a grafikonja

e) ZH.:

f) Menet vizsgálat egy periódusban: a $[0; \pi]$ intervallumon



$\cos(\cdot)$ fv.	0	$]0; \pi/2[$	$\pi/2$ infl. Pont	$] \pi/2; \pi[$	π	$] \pi; 3\pi/2[$	$3\pi/2$ infl. Pont	$] 3\pi/2; 2\pi[$	2π
ZH									
menet									
min-max é.									
konvexitás									

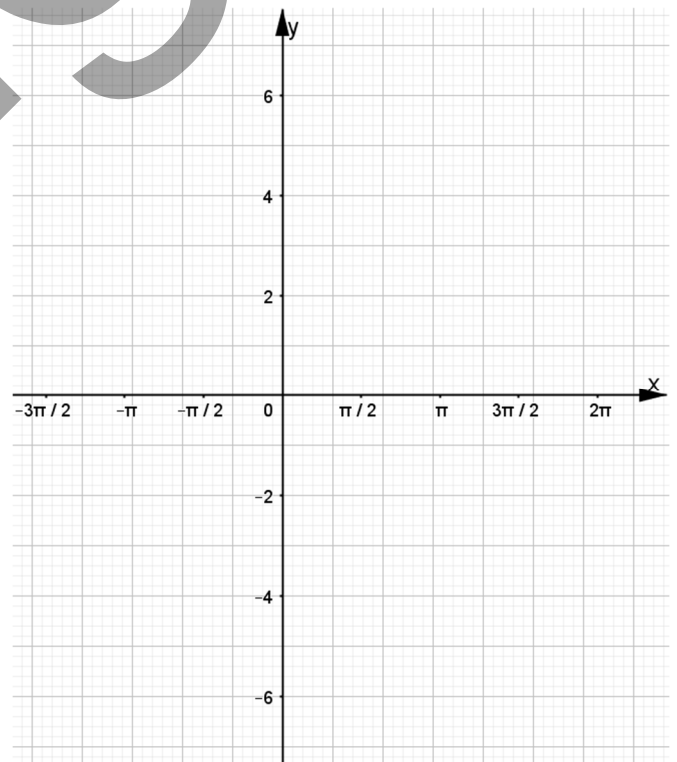
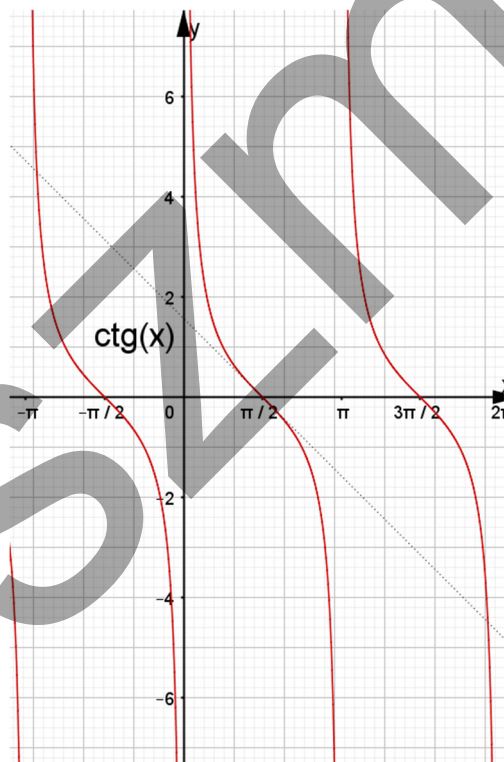
g) Értékkészlet: $R_{\text{ctg}} =$

h) Alakja „tangens”. Figyelem: Az alapfüggvény meredeksége $\pi/2$ -ben: -1 !

Aszimptoták:

i) Grafikonja:

Figyelem: $\pi/2$ -ben, és az annak megfelelő helyeken az $y = -x + \pi/2$ függvényhez simul!



	0	0,524	0,785	1,047	1,571	2,094	2,356	2,618	3,142
fok	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
x rad	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	$\pi/2$
cg(x)		-0,577		-1,732		1,732		0,577	6E-17

IV) Trigonometrikus függvénye transzformációja

IV.1) Függvénytranszformációk - elméletük (ismétlése)

Lineáris fv-el trafózunk kívülről, belülről.

a) $f()$: az alap, és ő a belső fv. g fv-el trafózom kívülről.

$g()$: $ax+b \Rightarrow g \circ f: a(f(x))+b$, vagyis az y tengely mentén (x tengelyű) „ a ” arányú merőleges affinitással trafózom a fv. grafikonját, majd $\underline{v}(0;b)$ vektorral eltolom.

Áll: periódus marad. Biz: triviális

$$a(f(x))+b=a(f(x+p))+b \Leftrightarrow a(f(x))+b=a(f(x))+b$$

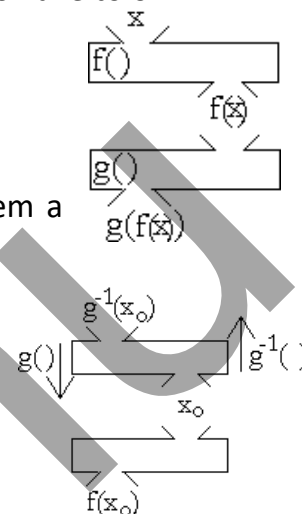
Ha $g()$: $y=a \cdot x$, $a \neq 0$ akkor: zérushely is marad, paritás is.

Ha $g()$: $y=ax+b$, $a \neq 0$ és $b \neq 0$, akkor általában sem a zérushely sem a paritás.

b) $f()$: az alap, és ő a külső fv. g a belső (lineáris) fv.

$$g(): y=ax+b \Rightarrow f \circ g: f(ax+b).$$

Ekkor az x tengely mentén trafózódik a fv. De hogyan?



Látható, hogy ha az f fv-be x_0 -t szeretnék dobni, akkor az $f(g())$ fv-be: $g^{-1}(x_0)$ -t kell bedobnom.

Vagyis pl.: $\sin(3x)$ fv-nél:

$$g: y=3x \text{ Inverze: } g^{-1}(): y=x/3$$

ha az $x_0=\pi/2$ -re akarok 1 értéket kapni, akkor az $x_0=\pi/2$ helyett $g^{-1}(x_0)$ -t, vagyis $g^{-1}(\pi/2)$ -őt, vagyis $(\pi/2)/3$ -at kell bedobjak.

Hogy trafózódik ekkor a $\sin(x)$ függvény?

Hogy ugyanazon y értékeket megkapjam, az eredeti x értékek helyett azok felét kell bedobjam, vagyis az x tengely mentén „összenyomódott” harmadára a függvény.

Összességében: az x tengely mentén trafózom a g függvény inverzével, hiszen az $f(x_0)$ érték ezentúl a $g^{-1}(x_0)$ helyen jelenik meg: $f(x_0)=f(g(g^{-1}(x_0)))$ hiszen: $g(g^{-1}(x_0))=x_0$

c) Áll: a periódus egy belső lineáris függvény hatására a következőképpen változik:

$$g: y=ax+b \Rightarrow p'=p/|a| \text{ (A bizonyítás nem törzsanyag!, itt csak pozitív a-ra.)}$$

$$\text{Biz.: 1. } \forall x \in D_g \text{ stb, kell: } f(g(x+p'))=f(g(x))$$

$$\text{Igaz, ui: } g(x+p')=a(x+p')+b=(ax+b)+p \Rightarrow \checkmark$$

2. Kell: p' minimális.

$$\text{Biz.: ind. Tfh.: } \exists 0 < p'' < p' \rightarrow \forall x \Rightarrow f(g(x+p''))=f(g(x))$$

$$\Rightarrow f(a(x+p'')+b)=f((a(x)+b)+a \cdot p''). \text{ Ekkor } a \cdot p'' \text{ jó periódus lenne, de } a \cdot p'' < p \text{ ☹}$$

A zérushely és paritás megváltozik, elveszik stb.

d) Add meg a transzformációt

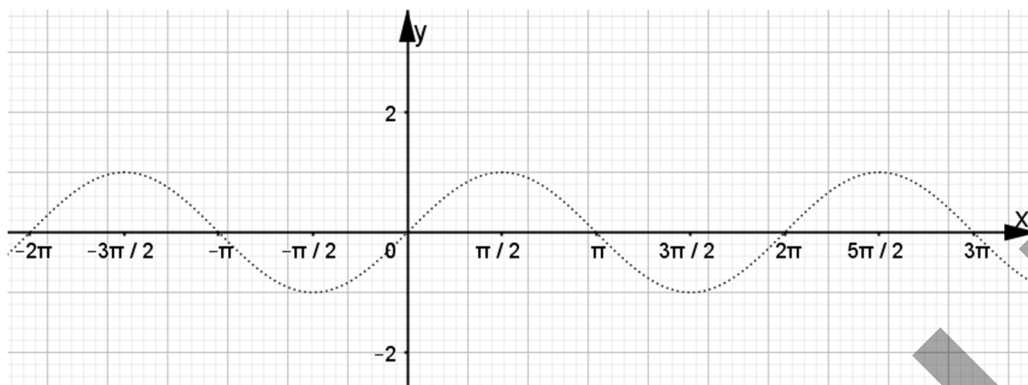
$$g(x)=5 \cdot f(x)-3$$

$$g(x)=-2 \cdot f(3x-5)+4$$

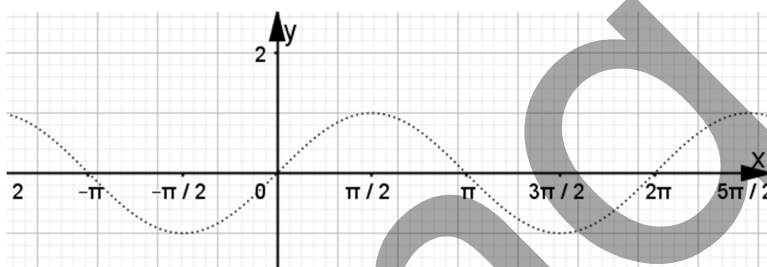
IV.2) Trigonometrikus fv-ek transzformációja

Add meg a transzformációt, a periódust és ábrázold. Az alapfüggvényt láthatod.

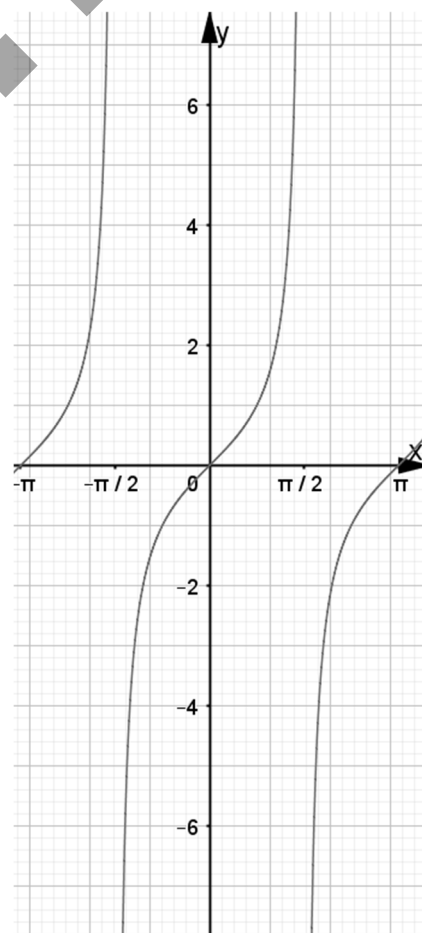
$$f(\cdot): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; f(x) = -2 \cdot \sin(x) + 0,5$$



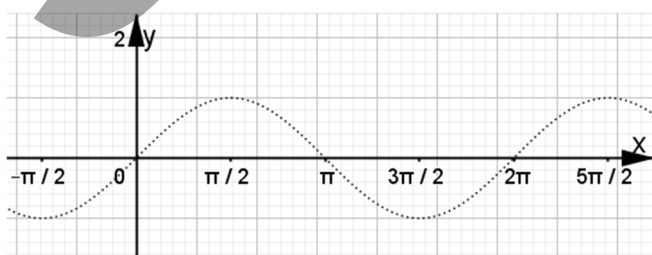
$$g(\cdot): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; g(x) = \frac{2}{3} \sin(2x) + 1$$



$$h(\cdot): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; g(x) = \tan\left(\frac{1}{2}x\right) - 1$$

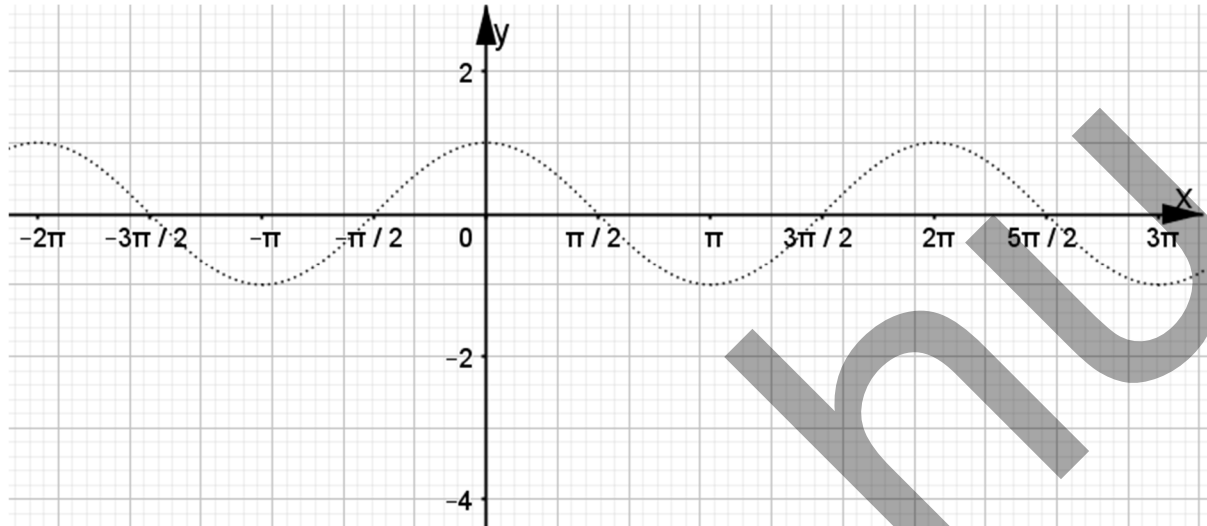


$$f(\cdot): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; g(x) = \sin\left(-x + \frac{\pi}{2}\right)$$



Vegyük észre, hogy ez a trafózott függvény maga a:

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; h(x) = 3 \cdot \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - 1$$



V) Szögfüggvények közti összefüggések

Motiváció: be fogjuk látni, hogy a **permanencia elv** alapján történt a szögfüggvények definíciója általános szögekre, a már – derékszögű háromszög segítségével – megismert összefüggések a szögfüggvények között továbbra érvényes az általános definíció által meghatározott szögfüggvényekre.

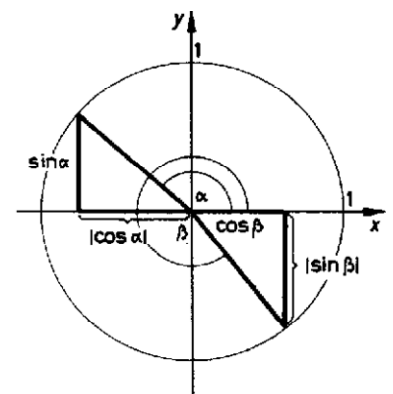
V.1) Alap összefüggések

a) Pitagorasz-tétel a trigonometriában

$$\text{Áll.: } \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

Az ábrán látható, hogy a síknegyedekbe eső szögek egységvektorainak koordinátaival derékszögű háromszögek alakíthatóak ki. Ezek átfogója egységvektor hosszúságú. Befogói hossza a megfelelő sin és cos függvényértékek v. azok abszolútértékei. Így $\forall$ síknegyedben felírható a Pit. tétel:

$$|\sin(x)|^2 + |\cos(x)|^2 = 1 \Leftrightarrow \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$



Ha pedig $x = k \cdot \pi/2$, akkor az egységvektor valamelyik tengelyre illeszkedik. Ekkor nincs ugyan derékszögű háromszög, de ekkor az egyik szögfüggvényérték +1 v. -1, a másik pedig 0.

Így itt is igaz:

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

Vagyis: ezentúl: $\sin(x) = \pm \sqrt{1 - \cos^2(x)}$ és $\cos(x) = \pm \sqrt{1 - \sin^2(x)}$

b) Szög tangense, kotangense

A $\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ összefüggést itt nem kell bizonyítani: definíció! Ui.: $\operatorname{ctg}(\alpha)$

Ha $x \neq k \cdot \pi/2 \Rightarrow \operatorname{tg}(x) = 1/\operatorname{ctg}(x)$ illetve: $\operatorname{tg}(x) \cdot \operatorname{ctg}(x) = 1$

c) 180° -kal történő forgatás

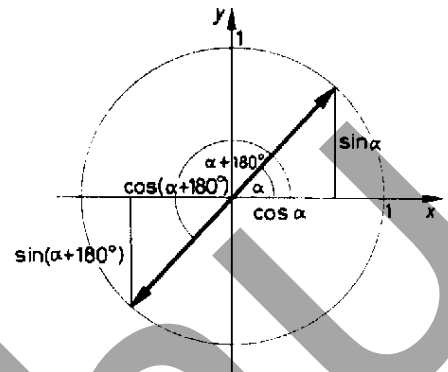
$\alpha \pm 180^\circ$: $\sin(\alpha \pm 180^\circ) = -\sin(\alpha)$

$\cos(\alpha \pm 180^\circ) = -\cos(\alpha)$

Biz: Látható, hogy ez egy középpontos tükrözésnek felel meg.

$\alpha \neq 90^\circ + k \cdot 180^\circ \quad k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \operatorname{tg}(\alpha \pm 180^\circ) = \operatorname{tg}(\alpha)$

$\alpha \neq k \cdot 180^\circ \quad k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \operatorname{ctg}(\alpha \pm 180^\circ) = \operatorname{ctg}(\alpha)$



V.2) Gyakorlás

a) $\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ Mennyi a többi szögfüggvény?

Mo.: $x_1 = \quad \Rightarrow \sin(x) = \quad \Rightarrow \operatorname{tg}(x) = \quad \Rightarrow \operatorname{ctg}(x) = \quad$

$x_2 = \quad \Rightarrow \sin(x) = \quad \Rightarrow \operatorname{tg}(x) = \quad \Rightarrow \operatorname{ctg}(x) = \quad$

b) $\sin(\alpha) = -0,6$ Mennyi $\cos(\alpha)$; $\operatorname{tg}(\alpha)$; $\operatorname{ctg}(\alpha)$

Mo: $\cos(\alpha) = \pm \sqrt{1 - \sin^2(\alpha)}$ $\operatorname{tg}(\alpha) = \pm \frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{1 - \sin^2(\alpha)}}$

Így: $\cos(\alpha_1) = \quad \operatorname{tg}(\alpha_1) = \quad$

$\cos(\alpha_2) = \quad \operatorname{tg}(\alpha_1) = \quad$

c) $\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{2}{5}$ $\sin(\alpha) = ?$

Előjelek! $\operatorname{tg}(\alpha) = \oplus$ és $\sin(\alpha) = \oplus \Rightarrow \cos(\alpha) = \oplus$

De: $\operatorname{tg}(\alpha) = \oplus$, $\sin(\alpha) = \ominus \Rightarrow \cos(\alpha) = \ominus$

d) Határozd meg a következő kifejezések ÉT-át, majd igazold a felírt azonosságot:

(i) $\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \operatorname{tg}^2(x)$

$$(ii) \quad \operatorname{tg}(x) - \operatorname{ctg}(x) = \frac{1 - 2\cos^2(x)}{\sin(x) \cdot \cos(x)}$$

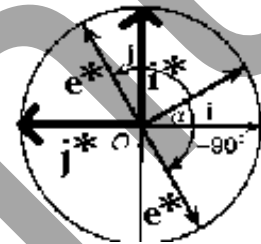
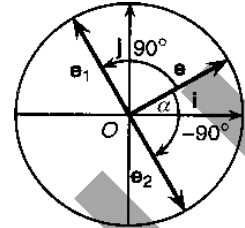
V.3) Egyéb összefüggések:

a) $\pm 90^\circ$ -os forgatás: először $+90^\circ$ -os

$$\underline{e}(\cos(\alpha); \sin(\alpha)) \Leftrightarrow \underline{e} = \cos(\alpha)\underline{i} + \sin(\alpha)\underline{j}$$

„Lineáris kombinációk lineáris kombinációja az eredeti vektorok lineáris kombinációja”; vagyis:

$$\underline{e} = \cos(\alpha)\underline{i} + \sin(\alpha)\underline{j} \Rightarrow \underline{e}^{+90^\circ} =$$



Így: $\cos(\alpha + 90^\circ) = -\sin(\alpha)$ és $\sin(\alpha + 90^\circ) = \cos(\alpha)$

Ugyanez -90° -os forgatásra HF.

Végeredménye: $\cos(\alpha - 90^\circ) = \sin(\alpha)$ és $\sin(\alpha - 90^\circ) = -\cos(\alpha)$

Nilván nem magoljuk be, hiszen elég megnézni egy konkrét forgatást, és onnan már tudható általánosan; legegyszerűbb mondjuk $60^\circ \rightarrow 150^\circ$

b) Pótszögekre vonatkozó tételek kiterjesztése:

Állítások:

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos(\alpha)$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin(\alpha)$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg}(\alpha)$$

$$\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg}(\alpha)$$

V.4) Gyakorlás

a) Számítsd ki a következő kifejezés pontos értékét:

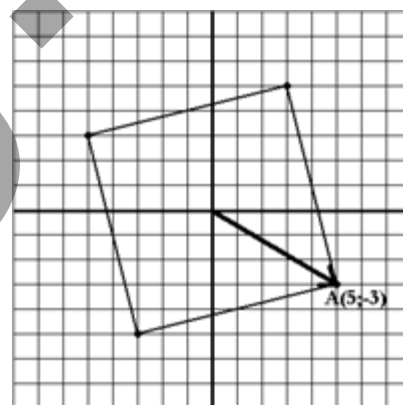
$$\frac{\sin^2(15^\circ)}{(1 - \cos(15^\circ))(1 + \sin(75^\circ))} + 2 \cdot \sin(600^\circ) \cdot \operatorname{tg}(30^\circ)$$

b) Számítsd ki a következő kifejezés pontos értékét:

$$\operatorname{tg}^2(60^\circ) + \sin(22^\circ - \beta) - \cos(30^\circ + \beta) + \sin(30^\circ) - \cos(68^\circ + \beta) + \sin(60^\circ - \beta) - \operatorname{ctg}(45^\circ) = ?$$

c) Forgatás

Egy négyzet középpontja az origó, egyik csúcspontja az $A(5; -3)$ pont. Írd föl a többi csúcspont koordinátáit!



V.5) Addíciós (összegzési) képlet bizonyítása elemi úton

$$\text{Áll.: } \sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

a) 1. bizonyítás: Ptolemaiosz tételével

Húrnégyszögben: $ac+bd = ef$

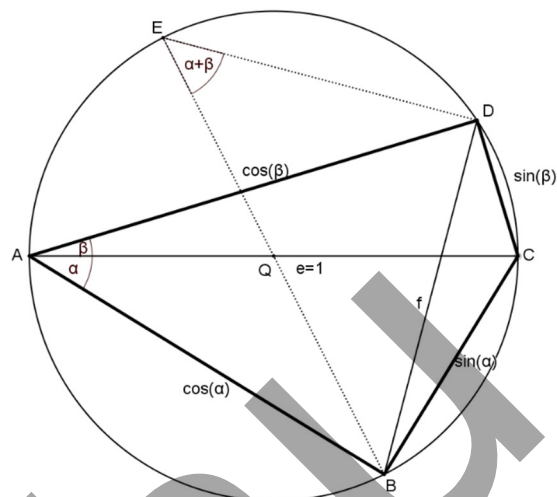
Legyen AC átmérő a körben, a szögek az ábra szerint.

Ekkor az oldalak a szögek megfelelő szögfüggvényei.

$$f = \sin(\alpha+\beta) \text{ (Lásd ábra)}$$

Vagyis átírva a Ptolemaiosz tételt:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$$



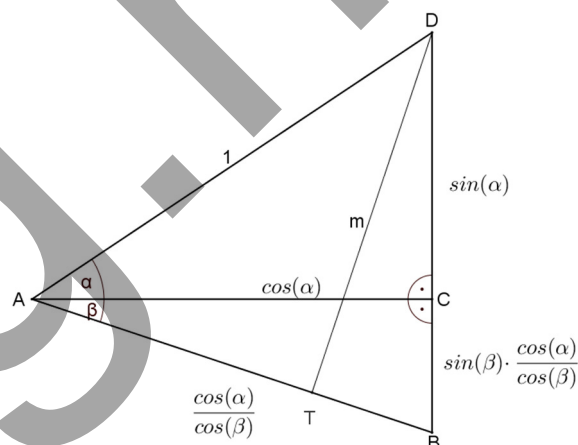
b) Területtel

Rajzoljunk fel két derékszögű háromszöget az ábra szerint.

$$AD=1$$

$$\text{Így: } m = \sin(\alpha+\beta)$$

$$2 \cdot T_{ABD} = 2 \cdot T_{ACD} + 2 \cdot T_{ABC}$$



A derékszögű háromszögek oldalai a szögfüggvényekből könnyen számolhatók.

$$\frac{\cos(\alpha)}{\cos(\beta)} \cdot \sin(\alpha+\beta) = \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \frac{\cos(\alpha)}{\cos(\beta)}$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

Ezzel a gondolatmenettel kiszámítható a $\cos(\alpha+\beta)$ is, hiszen $AT = \cos(\alpha+\beta)$

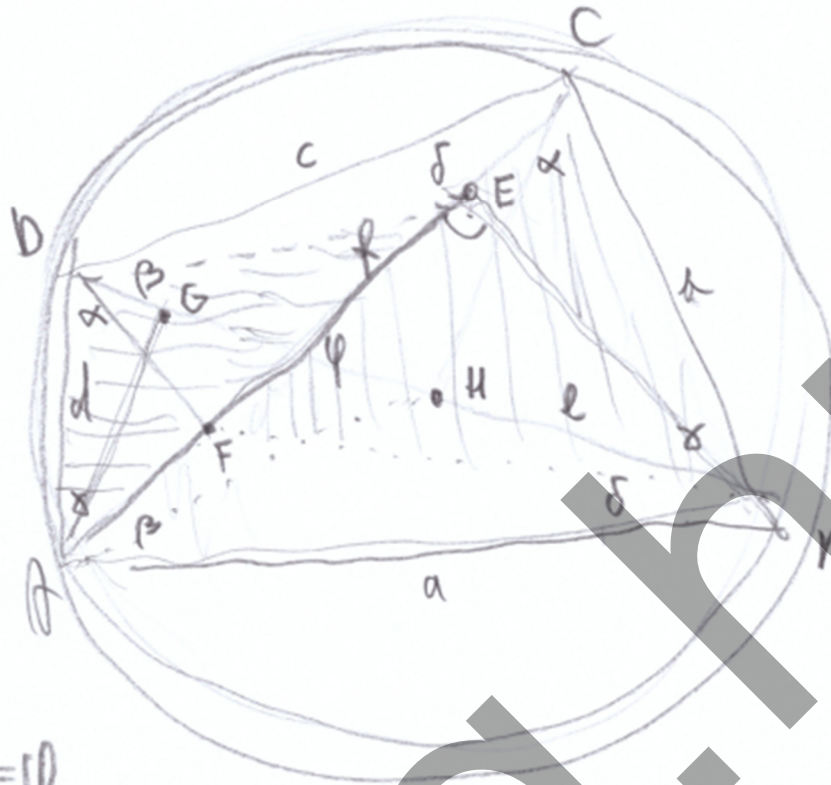
A dupla területek:

$$\text{Így } AT \cdot m = AB \cdot m - TB \cdot m$$

$$AT = AB - TB$$

Látszódik, hogy kell még: $TDB \neq \beta$.

$$\beta + \delta = \varphi$$



$$\beta + \delta = \varphi$$

$$a \cdot c + b \cdot d = ef$$

$$a \cdot c \cdot \sin(\beta + \delta) + b \cdot d \cdot \sin(\beta + \delta) = 2T$$

$$a \cdot c \cdot (\sin(\beta) \cos(\delta) + \cos(\beta) \sin(\delta)) + b \cdot d \cdot (\sin(\beta) \cos(\delta) + \cos(\beta) \sin(\delta)) = 2T$$

$$2T_{FBC}$$

$$+ 2T_{AED}$$

$$a \cdot c \cdot \sin(\beta) \cos(\delta) + b \cdot d \cdot \sin(\beta) \cos(\delta)$$

$$AE \cdot DF$$

$$2T_{FBC}$$

$$+ 2T_{AED}$$

$$(a \cdot \sin(\beta) \cos(\delta)) (d \cdot \cos(\delta))$$

$$BE \cdot AT$$

$$+ CE \cdot DF$$

$$2T_{ABF} + 2T_{ECD} = 2T \checkmark$$