

Matematika
Véges matematika
HF Munkafüzet

v1.0

Szent Margit Gimnázium

szmg.hu
2022

Matematika

Véges matematika

Házi feladat Munkafüzet

v1.0

Szent Margit Gimnázium

szmg.hu

2021

szmg.hu

Szerkesztette: Vízhányó Zsolt Sch.P. ©

TARTALOMJEGYZÉK

Logika - Bevezetés	7
I. Kvantorok – bevezetés	7
1) Kvantorok	7
2) Legalább/legfeljebb	7
II. Kijelentés – állítás - ítélet	7
1) Kijelentés, állítás – „prédikátum”	7
2) Egy állítás tagadása - egyváltozós logikai művelet	8
1) A Konjunkció – Diszjunkció – Antivalencia	10
2) Az implikáció	14
Halmazelmélet – Alapozás	16
I. Definíció, jelek, halmazok megadása	16
1) Fogalomalkotás a halmazokról	16
2) Halmazok számossága először	18
3) Halmazok ábrázolása - Venn-diagrammal	18
II. Részhalmaz	19
1) Definíció	19
2) Triviális részhalmazok	19
3) A „részhalmazság” mint reláció	19
4) Halmaz részhalmazai	19
III. Halmazok egyenlősége - a bizonyítások két módszere	20
IV. Halmazok ekvivalenciája és a (többféle-)végtelen számosságú halmazok	20
Számelmélet - Oszthatóság	22
I. Osztó, oszthatóság	22
1) Az oszthatóság bevezetése	22
2) Az oszthatóság definíciója	22
3) Oszthatósági szabályok	23
4) Összetett oszthatósági szabályok	23
5) Reláció tulajdonságok	24
6) Egyéb tulajdonságok	25
7) Példák a tulajdonságok alapján	27
II. A teljes hatványok, a Pascal- Δ , nevezetes szorzattá-alakítások – a számelmélet erős eszközei - symbolab.com	29
1) Teljes köb	29
2) Másod - harmad - negyed fok, stb.	29
3) Azonos kitevőjű hatványok különbsége	30

4)	Azonos páratlan kitevőjű hatványok összege: $a^{2k+1}+b^{2k+1}=(a+b)(\dots)$	30
5)	Három v. több tag összegének négyzete, illetve két nehezebb szorzattá alakítás.....	30
6)	A hatványozás és szorzattá-alakítás gyakorlása	31
7)	Emlékeztető két nagyon fontos ismeretre	33
8)	A szorzattá alakítás – <i>a számelmélet egyik legerősebb eszköze</i>	33
9)	Szorzattá alakítás, relatív prímek, egymást követő számok	35
III.	Számrendszerek.....	36
1)	Számrendszerek és átírások (ismétlés).....	36
2)	Műveletek számrendszerekben.....	38
Számelmélet – LNKO és LKKT		39
I.	A számelmélet alaptétele	39
1)	Az egység	39
2)	A prímek kezdő definíciója, és az összetett számok	39
3)	A számelmélet alaptétele – és a kanonikus alak	39
4)	Osztók keresése, osztók száma.....	40
5)	Osztók tulajdonságai.....	40
6)	Osztókkal kapcsolatos gyakorlások.....	41
7)	Oszthatósági szabályok – elemi oszthatóságok	44
8)	Négyetszámok-köbszámok stb.	44
9)	Osztók és a relatív prímek a Számelmélet alaptétele alapján	45
10)	Oszthatósági szabályok - összetett oszthatósági szabályok	45
II.	A lineáris kombináció és az LNKO - $(a;b)$ előállítása x_0a+y_0b alakban	46
1)	LNKO megtalálása a Számelmélet alaptétele felhasználásával	46
2)	Euklideszi algoritmus alapja – számok távolsága.....	47
3)	A lineáris kombináció.....	47
4)	A közös osztók „lélekvandorlása” vagyis átadása.....	48
5)	Hasznuk algebrai törtek egyszerűsíthetőségénél	48
6)	Egyéb gyakorló példák (Az a és b változók természetes számok)	50
III.	Legkisebb közös többszörös: Least Common Multiple	51
1)	Definíciók; példa	51
2)	Tételek	52
3)	Példák	52
Számelmélet – A maradékok világa az egész számoknál - olvasmány		57
I.	Számok osztási maradéka.....	57
1)	Bevezetés	57
2)	Gyakorlás más számokkal	58
II.	Definíció és tulajdonságok.....	58

1)	Kongruencia definíció	58
2)	Tulajdonságok (a szereplő számok egészek, természetesek)	58
Kombinatorika		62
I.	Gondolkodási módszerek	62
1)	Bevezetés	62
2)	Skatulya elv	64
3)	Gondolkodási módszerek - az ábrázolás sok esetben segít	68
4)	A komplementer esemény – első közelítésben	69
II.	Néhány alapismeret, gondolat	69
1)	A faktoriális	69
2)	Egy kis valószínűség számítás	70
1)	Ismétlés nélküli Permutáció – különböző elemek maradéktalan sorba állítása	70
2)	Az ismétléses permutáció – minden elemet sorba állítok – lehetnek azonos elemek is	73
3)	Ciklikus permutációk – Arthur király kerek-asztala	76
IV.	Variáció – számít a sorrend – nem minden elem szerepel	77
1)	Az Ismétlés Nélküli Variáció – egy elem csak egyszer szerepelhet	77
2)	Az ismétléses variáció – számít a sorrend – egy elem akárhányszor felhasználható	80
V.	Kombináció – nem minden elem szerepel – nem számít a sorrend	83
1)	Ismétlés nélküli kombináció – minden elem különböző – nem minden elem szerepel, nem számít a sorrend	83
2)	Az ismétléses kombináció – a sorrend nem számít - nem minden elem szerepel – egy elem akár többször is	86
VI.	Egy kis összefoglaló	87
1)	Összefoglaló táblázat – elemi kombinatorika	87
2)	Vegyes példák	88
VII.	A binomiális együtthatók, a binomiális tétel, a Pascal-háromszög	88
1)	A szimmetria tulajdonság és két összegtulajdonság	88
2)	A binomiális tétel	89
3)	A binomiális együtthatók összege	90
4)	A binomiális együtthatók és a prímek	90
IX.	Invariáns feladatok	92
Számelmélet – Prímek – Diofantikus egyenletek – Polinomok		94
I.	A prímek	94
II.	Az egyértelmű prímfelbontás és következményei	96
1)	A számelmélet alaptétele	96
2)	Egy szám osztói	96
3)	Racionális-irracionális számok	97

4) Az egyértelmű prímfelbontásra, kanonikus alakra épülő feladatok.....	97
1) Diofantikus feladatok.....	99
2) Egyéb számelméleti feladatok.....	100
Halmazelmélet – Műveletek halmazokkal	102
I. Hatványhalmaz	102
1) A hatványhalmaz léte axióma.....	102
2) Halmaz részhalmazainak száma – vagyis a hatványhalmaz számossága.....	102
1) Halmazok Uniója – a „vagy” művelet: $p \vee q$	103
2) Halmazok Metszete – az „és” művelet : $p \wedge q$	103
3) Tulajdonságok, összefüggések.....	103
4) Halmazok Különbsége.....	104
5) Szimmetrikus differencia – a „kizáró vagy” művelet: $p \oplus q$	104
6) A Komplementer halmaz – „Tagadás”	106
7) A Descartes szorzat.....	107
Gráfelmélet.....	112
I. Definíciók – fogalmak	112
1) Gráf	112
2) Fogalmak.....	112
1) Izomorfia.....	113
2) Élszámok, foksámok	114
3) Komplementer gráfok.....	115
4) A gráf bejárása	115

Logika - Bevezetés

I. Kvantorok – bevezetés

1) Kvantorok

2) Legalább/legfeljebb

Van-e 8 alma annál biztosan, akinek nem volt egy sem, majd vásárolt

a) legfeljebb 5-öt

b) legalább 12-öt

c) Legfeljebb 12-öt,

d) legalább 5-öt.

Írd föl intervallummal, illetve írd le a „legalább” és a „legfeljebb” szavakat használva értelmes magyar mondatokban a következőket:

a) $7 \leq a$

b) $2 < b \leq 5$

c) $c < -4$

d) $-3 < d < 0$

A farmerboltban ötféle szakadt farmert lehet kapni. Öt lány véleménye van alább, de pontosan csak egynek van igaza. Ki lehet az?

Anna: Egyik sem jó farmer.

Bíborka: Legfeljebb egy farmer jó.

Cili: Legfeljebb kettő farmer jó.

Dominika: Legfeljebb három farmer jó.

Emma: Legfeljebb négy farmer jó.

Öt fiú véleményéből szintén pontosan egy igaz:

Feri: Ezek közül legalább egy farmer jó,

Géza: Legalább két farmer jó

Hugó: Legalább három farmer jó

István: Legalább négy farmer jó,

Károly: Mind az öt farmer jó

II. Kijelentés – állítás - ítélet

1) Kijelentés, állítás – „prédikátum”

Igazak vagy hamisak az alábbi kijelentések?

- Minden egész számnál van nagyobb egész szám.
- Van olyan racionális szám, aminél nincs nagyobb egész szám.
- Egyik egész szám sem osztható nála nagyobb egész számmal.
- Létezik olyan természetes szám. ami nem osztható nála nagyobb természetes számmal.

2) Egy állítás tagadása - egyváltozós logikai művelet

a) Írd le az alábbi állításoka tagadását, majd dönts el, melyik az igaz – írd mellé!

- Csak barnamedve van a világon.
- Minden zebra csíkos.
- Minden paralelogramma trapéz.
- Egyetlen egész számnak sem osztója a nulla.

Tagadd le az alábbi állításokat és dönts el, hogy az állítás vagy a tagadása az igaz!

- Van olyan autó, ami nem benzinnel megy.
- Van olyan trapéz, ami nem téglalap.
- Létezik olyan egész, melyet a 12 nem oszt.
- Van rózsza tüske nélkül.

b) Írd föl a következő mondatokat úgy, hogy ne legyen bennük tagadás:

- A tanárok nem az ellenségeink.
- Nincsen 5-ös munka nélkül.
- Lusta kitűnők nincsenek.
- Nem kedvelem a hanyagokat.
- Egyetlen tanár sem keres sokat.
- Senki sem bukik matekból, aki tanul.

c) Írd le az alábbi állítások tagadását!

- Minden utas legfeljebb 5 kg cukrot vihet magával.
- Minden pozitív egész számnak legalább kettő különböző pozitív osztója van.
- Minden élőlény testének legalább 60%-a víz.
- Bármely egyenesnek és körnek legfeljebb egy metszéspontja van.

d) Egészítsd ki a következő mondatot, majd tagadd (legfeljebb, legalább).

..... négyes annak a szorgalma, akinek három kettes osztályzata van.

Tagadd az alábbi állításokat!

- Van olyan zene, amit naponta legalább ötször meghallgatok.
- Létezik vers, ami legfeljebb három szóból áll.
- Van olyan egyenes és négyszög, melyeknek legalább 4 közös pontja van.
- Létezik olyan valós szám, melynek az abszolút értéke legfeljebb 3.

Írd le az alábbi állítások tagadását. Ne használ tagadó szavakat (ha lehet)!

- Létezik szorgalmas diák.
- Minden jegyem ötös vagy négyes.
- Van, aki látott szorgalmas diákot.
- Minden ember halandó.
- A röfi mindenevő.
- Mindent megtanultam.
- Nem tanultam meg mindent.
- Aki tanul, átmegy a vizsgán.

e) Töltsd ki a táblázatot!

Hugó kütyüfüggő	Hugó nem kütyüfüggő: Hugó normális ☺	קרי	קרי
igaz			
hamis			

f) „Minden szekrény barna.”

Válaszd ki az alábbiak közül, amelyek tagadása a fenti kijelentésnek!

- A) Van olyan szekrény, amelyik nem barna.
- B) Nincs barna szekrény.
- C) Van olyan szekrény, amelyik barna.
- D) Pontosan egy szekrény barna.

g) Írj olyan állításokat, amelynek tagadásai a következő állítások:

A: Van olyan ruhabolt bolt, ahol nem árulnak nadrágot.

B: Minden iskolába jár fiú is és lány is.

C: Pista minden meccsen lőtt gólt.

D: Naponta legalább 4 órát tanulok.

Megadunk 7 állítást:

A: A páros számok mind 2-re végződnek.

B: A páros számok mind 0-ra végződnek.

C: A páros számok nem mind végződnek 2-re.

D: A páros számok 2-re vagy 0-ra végződnek.

E: A 2-re végződő számok páros számok.

F: Van olyan páros szám, amely 2-re végződik.

G: Van olyan páros szám, amely nem 2-re végződik.

a) Melyik igaz, melyik hamis? Írd le a jelüket.

b) A fenti kijelentések között van-e két olyan, amely egymás tagadása?

III. Kétváltozós logikai műveletek

1) A Konjunkció – Diszjunkció – Antivalencia

a) Definíciójuk

Értelmezd a következő viccet: A férjet a felesége elküldi a boltba „Hozz tejet és ha van tojás, akkor hozz tízet!” Hazajön a rendőr 10 doboz tejjel. „Volt tojás!” :-)

b) Bélát elküldi édesanyja a boltba, és ezt mondja:

(i) Hozz fiam legalább tíz mákoslepényt vagy legalább 10 túrósat.

Írd le, hogy mivel állíthat haza Béla, ha

- a „vagy”-ot diszjunkciónak
- antivalenciának értelmezi.

(ii) Hozz fiam legfeljebb tíz mákoslepényt vagy legfeljebb 10 túrósat.

- a „vagy”-ot diszjunkciónak
- antivalenciának értelmezi.

c) Töltsd ki a táblázatot

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Delta q$
i	i			
i	h			
h	i			
h	h			

d) Gyakorlásuk

Az alábbi táblázat háromszögekről szól:

Derékszögű: , egyenlő szárú: Δ

Rajzold le ezt a táblázatot (a 4. oszlop széles legyen), és rajzolj be megfelelő Δ -ket a 3. és a 4. oszlopba (a 4. oszlopban egy cellába több is kerül néha...!)

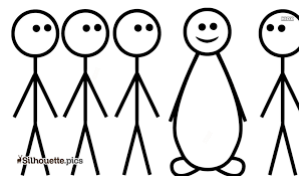
	Δ	 $\wedge$ Δ	 $\vee$ Δ
i	i		
i	h		
h	i		
h	h		

A magyar „vagy” kötőszó melyik alább mondatnál diszjunkció és melyiknél antivalencia? Írd mellé:

- Egy egész szám páros vagy páratlan.
- Egy négyszög lehet téglalap vagy deltoid.
- Az n természetes szám páros vagy prím
- Egy háromszög derékszögű vagy egyenlőszárú.
- Egy háromszög derékszögű vagy egyenlőoldalú.
- Az n természetes szám osztható 2-vel vagy 3-mal.

Béla vékony vagy rövid hajú.

Rajzolj ilyen pálcikaembereket (három van). Rajzold le az állítás tagadását!



--	--	--

--

Marcsa kék szemű vagy nem rövid hajú.

Rajzolj illet (három rajz). Rajzold le az állítás tagadását!

--	--	--	--

e) Tagadásuk – a De Morgan azonosságok

- Az n szám osztható 3-mal is és 4-gyel is.

Húz alá azokat a számokat közül, amelyekre *nem igaz* az állítás:

0 2 8 25 6 24 9

Írd le az állítás tagadását:

- Gizike magas vagy barnaszemű.

Húz alá azokat, amelyekre *nem igaz* az állítás

Magas és kékszemű

Alacsony és barnaszemű

Alacsony és kékszemű

Magas és barnaszemű

Írd le az előző állítás tagadását:

- Ez az alakzat háromszög vagy nem paralelogramma

Húz alá azokat, amelyekre *nem igaz* az állítás

Deltoid

Négyzet

Derékszögű háromszög

Szabályos ötszög

Írd le az állítás tagadását:

- Az n szám nem osztható 6-tal és nem osztható 10-zel

Húz alá azokat, amelyekre *nem igaz* az állítás

12

30

20

16

Írd le az állítás tagadását:

- Józsefnek legalább 3 fia van vagy legfeljebb 4 lánya

Húz alá azokat, amelyekre *nem igaz* az állítás

5 lány 5 fiú

4 lány 2 fiú

2 lány 2 fiú

5 lány 2 fiú

Írd le az állítás tagadását:

- Töltsd ki a táblázatot – mutasd meg vele, hogy a konjunkció (és) tagadása az a tagadások diszjunkciója (vagy): $\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
i	i					
i	h					
h	i					
h	h					

- Töltsd ki a táblázatot – mutasd meg vele, hogy a diszjunkció tagadása az a tagadások konjunkciója: $\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
i	i					
i	h					
h	i					
h	h					

- Húzd alá késsel azokat a számokat, amelyekre az első állítás igaz, majd pirossal azokat, melyekre a második:

Első állítás: $5 \mid n \vee (3 \mid n \wedge 4 \mid n)$ Második: $(5 \mid n \vee 3 \mid n) \wedge (5 \mid n \vee 4 \mid n)$

25 21 24 40 15 16 60 14

Vagyis a két állítás ugyan az. Ezek után táblázattal bizonyítsd be, hogy:

$$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C).$$

A	B	C	$(B \wedge C)$	$A \vee (B \wedge C)$	$(A \vee B)$	$(A \vee C)$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$
i	i	i					
i	i	h					
i	h	i					
i	h	h					
h	i	i					
h	i	h					
h	h	i					
h	h	h					

2) Az implikáció

a) Bevezetés

- Igaz/Hamis – írd mellé!

Ha $5 \mid a$ akkor $5 \mid 4a$

Ha $6 \mid b$ akkor $6 \mid b+5$

Ha egy négyszög átlói felezik egymást, akkor az paralelogramma.

Ha egy négyszög rombusz, akkor szemközti szögei egyenlők.

Ha egy négyszög szemközti oldalai párhuzamosak, akkor rombusz.

- Húzd alá, amikor *nem igaz* a következő állítás: „Ha háromszöget rajzolok, akkor derékszöget is fogok rajzolni”

Szabályos ötszög

$\triangle$: $a=5$ $b=12$ $c=13$

Szabályos háromszög

Négyszög

- Húzd alá, amikor *nem igaz* a következő állítás: „Ha esik akkor viszek esernyőt”

Nem esik, viszek

Esik, viszek

Esik, nem viszek

Nem esik, nem viszek.

- Írd le a következő állítások tagadását!

A: Holnap uszodába megyek vagy moziba.

B: Győzni fogunk ha elmegyek szavazni akkor.

C: Van olyan diák, aki nem kütyüzik

D: Hull a hó és Micimackó fázik.

E: Julcsi szereti a csokit és a narancsot.

F: Ha időben hazaérek megnézem a híradót.

b) Az implikáció

Ha esik az eső, akkor vizes az út. E: esik V: vizes. Töltsd ki a táblázatot!

Esik	Vizes	Tagadás: $E \wedge \neg V$	A tagadás tagadása: $E \rightarrow V$
i	i		
i	h		
h	i		
h	h		

c) A szükséges és elégséges feltétel

- Írj a 15-tel való oszthatósághoz szükséges de nem elégséges, illetve elégséges de nem szükséges föltételt, végül egy szükséges és elégséges föltételt.

Szükséges, de nem elégséges:

Elégséges, de nem szükséges:

Szükséges és elégséges:

- Egy alakzat paralelogramma - írd föltételeket:

Szükséges, de nem elégséges:

Elégséges, de nem szükséges:

Szükséges és elégséges:

- Egy alakzat téglalap - írd föltételeket:

Szükséges, de nem elégséges:

Elégséges, de nem szükséges:

Szükséges és elégséges:

- A Magyar és az Olasz vízlabda csapat döntőt játszott, végigjátszották, és a magyarok nyertek. Adj meg a dobott gólokra vonatkozó eseményeket:

Szükséges, de nem elégséges:

Elégséges, de nem szükséges:

Szükséges és elégséges:

Nem szükséges és nem elégséges:

- Ha egy háromszög egyenlő oldalú, akkor egyenlőszárú.

Az egyenlőoldalúság föltétele az egyenlőszárúságnak.

Az egyenlőszárúság föltétele az egyenlőoldalúságnak.

Halmazelmélet – Alapozás

I. Definíció, jelek, halmazok megadása

1) Fogalomalkotás a halmazokról

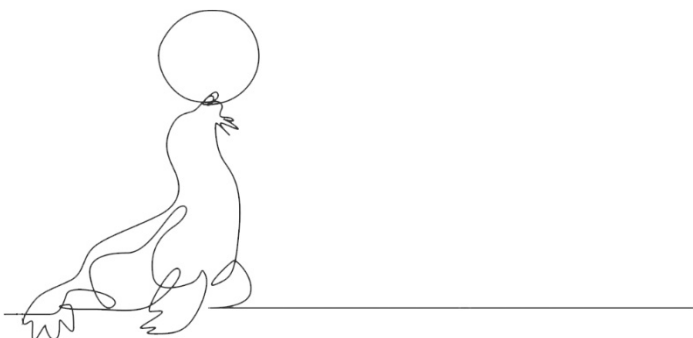
a) Néhány ismétlő gondolkodtató

* Bizonyítsd be: $S=1 \cdot 1!+2 \cdot 2!+ 3 \cdot 3!+...+2020 \cdot 2020!=2021!-1$

Hány 0-ra végződik: $200!$

Írd föl a 120 osztóit fastruktúrával! (Ld. 7.o: Algebra B.)

Hány közös osztója van az 504 és 540-nek? Lásd 7.o Algebra



b) A halmaz alapfogalom

Dönts el, hogy halmaz-e a következő – írd mellé!

Páratlan egészek

Szigorú tanárok

Prímek

Okos diákok

A hétfejű sárkányok

Emlősök

c) Halmaz megadása

Dönts el, igaz-e: (Igaz/Hamis) – írd mellé!

$2 \in \text{Prímek halmaza}$

$\text{Négyzet} \in \text{trapézok halmaza};$

$A \in A$

$A \in \{A\}$

$2^{25}+1 \in \text{prímek halmaza}$

$1,9 \in 2 \text{ hatványok halmaza}$

Ha $a \in \mathbf{N}$ és $b \in \mathbf{Z} \Rightarrow a \cdot b \in \mathbf{Z}$

$\exists x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ és $y \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \rightarrow xy \in \mathbf{N}$

Ha $a \in \mathbf{Q}$ és $b \in \mathbf{Q} \Rightarrow (a/b) \in \mathbf{Q}$

Gondolkodtató: Melyik az a legkisebb természetes szám, melynek pontosan 12 db. osztója van?

Írd föl az alábbi számok számjegyeinek a halmazát: a) 205 501; b) 100 000; c) 222

Írd föl a
négyzetszámok
utolsó számjegyeinek a halmazát!

köbszámok
utolsó számjegyeinek a halmazát!

d) Halmaz halmazokból

Ha azt mondanánk, hogy a sík egyenesekből áll, az egyenes pontokból, akkor a pont mi a síknak?

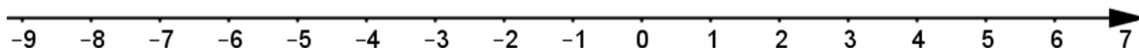
e) Intervallumok illetve geometriai halmazok

Rajzold föl a következő, intervallummal megadott halmazokat a számgyenesen:

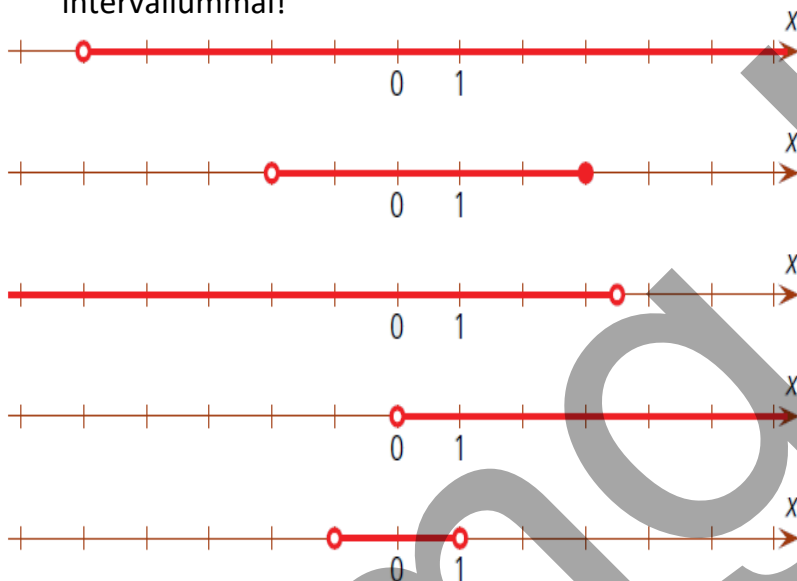
$$I_1 = [-2; 0]$$

$$I_2 =]-\infty; -4[$$

$$I_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leq 5\}$$



Írd föl a számgyenesen ábrázolt számokat mellédük - relációs jellel, illetve intervallummal!



2) Halmazok számossága először

Írd föl azt a halmazt,
mely számossága 0:

Írd föl azt az egy elemű halmazt,
melynek a 0 az eleme:

3) Halmazok ábrázolása - Venn-diagrammal

Ábrázold Venn-diagrammal a következő három halmazt, és írd be a számokat a megfelelő helyre! $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid 6 \mid n\}$ (A 6-tal osztható egészek - másképp: 6 többszörösei);

$B = \{n \in \mathbb{Z} \mid 15 \mid n\}$ és $H = \mathbb{Z}$. (Ez utóbbi a nagy téglalap)

A számok: -12; 5; 0; 45; -90; 105; 18; 30; 15; 24



II. Részhalmaz

1) Definíció

Írd le, melyik igaz: $A \subset B$ v $A \subseteq B$ v $B \subset A$ v $B \subseteq A$ v egyik sem.

$A = \{3; 4; 5; 6\}$ és $B = \{3; 4; 5; 6; 7; 8\}$;

$A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$ és $B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$

$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x + 18 = 24\}$ és $B = \{3; 4; 5; 6; 7; 8\}$

$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 4 \leq x \leq 7\}$ és $B = \{3; 4; 5; 6; 7; 8\}$

2) Triviális részhalmazok

$A = \{0; 1; 4\}$

Írd mellé: Igaz/Hamis:

$\{1\} \in A$

$\{4\} \subseteq A$

$\emptyset \in A$

$\emptyset \subseteq A$

$\{0; 1; 4\} \subseteq A$

$0 \in \emptyset$

$\{0; 4\} \in A$

Mely prímszámokat lehet kidobni a dobókockával? Írd le őket egy halmazba. Írd ennek a halmaznak az összes részhalmazát!

3) A „részhalmazság” mint reláció

Adj meg egy olyan A halmazt, hogy a következő három feltétel mind igaz legyen:

$\emptyset \subseteq A$; $\emptyset \in A$; és $\{\{\emptyset\}\} \subset A$.

4) Halmaz részhalmazai

Írd föl az a) $\{x\}$ b) $\{x; y\}$ c) $\{a; b; c\}$ halmazok összes részhalmazát! NE FELEDD, BÁRMELY HALMAZNAK RÉSZHALMAZA AZ ÜRES HALMAZ ÉS ÖNMAGA IS!

a)

b)

c)

Mutasd meg, hogy egy hételemű halmaznak pontosan annyi 4 elemű részhalmaza van, mint 3 elemű!

Ezek után magyarázd meg, hogy miért nem lehet egy halmaz összes részhalmazának a darabszáma páratlan!

III. Halmazok egyenlősége - a bizonyítások két módszere

- Adottak a következő halmazok

P=paralelogrammák, Tr=trapézok D=deltoidok R=rombuszok Té=téglalapok

N=négyzetek

Írd mellé: Igaz/Hamis

$$Té \subset D$$

$$R \subset D$$

$$R \subset P$$

$$P \subset Tr$$

$$Té \subset N$$

$$N \subset P$$

$$R \subset D$$

$$R \subset Tr$$

- A két definíció sok esetben: a bizonyítások két módszere

Írd föl az $A = \{-2; \frac{5}{8}; 0; \sqrt{3}\}$ halmaz összes a) 0 elemű; b) 1 elemű; c) háromelemű részhalmazát!

Adott az S síkon egy Q pont. Rajzold fel a következő halmazokat:

$$K = \{P \in S \mid d(P; Q) = 1,5 \text{ cm}\}$$

$$H = \{P \in S \mid 1 \text{ cm} < d(P; Q) \leq 2 \text{ cm}\}$$

IV. Halmazok ekvivalenciája és a (többféle-)végtelen számosságú halmazok

Állítsd párba a természetes számokat, és a páratlan természeteseket: két sort írsz, egymás alá, majd a két sor végén legyen egy általános pár.

Teremts a két halmaz között ekvivalenciát

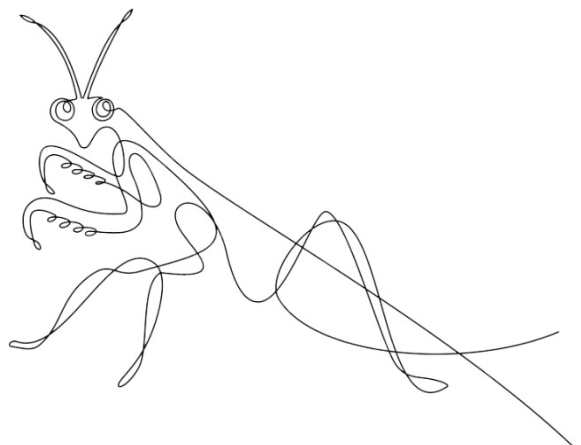
- A páratlan természetesek és a páros természetesek.

- A természetes számok és az egész számok közt.

- * A páros természetesek és az egészek közt.

- * Egy félig nyílt szakasz és egy zárt félegyenes pontjai közt. (Ehhez rajzolni kell!)

Állítsd párba a pozitív páros természeteseket és négyzetszámokat úgy, hogy egy sem marad ki.



Számelmélet - Oszthatóság

I. Osztó, oszthatóság

1) Az oszthatóság bevezetése

- Végezd el a műveletet – összevonás, csökkenő fokszám!

$$(x-3)(x^2 + 3x + 9) =$$

$$(x-3)(x^3 + 3x^2 + 9x + 27) =$$

$$(x-2)(x^2 + 2x + 4) =$$

$$(x-2)(x^3 + 2x^2 + 4x + 8) =$$

$$(x-2)(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16) =$$

- Hány jegyű lehet? Próbálj jó becslést adni! Emlékezz: $2^{10} = 1024$
 2^{1000}

$$* 15^{600}?$$

- Írd le – javítsd, ha kell

$$7|-21 \text{ mert}$$

$$6|15 \text{ mert}$$

$$13|0 \text{ mert}$$

2) Az oszthatóság definíciója

- Melyik az a szám, amelynek végtelen sok osztója van?
- Melyik az a egész, amelyik végtelen sok egésznek osztója? (Kettő is van...)

- $100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 2^2 - 1 = ?$
(Ötlet: először párosával alakítsd őket szorzattá...)

- $* 100^2 + 99^2 - 98^2 - 97^2 + 96^2 + 95^2 - 94^2 - 93^2 + 92^2 + \dots - 1^2 = ?$

3) Oszthatósági szabályok

Emlékeztető érdekes számokra:

$$1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13 \text{ „Ezeregy éjszaka meséi”}$$

$$168 = 7 \cdot 24 \text{ (168 óra egy hét)}$$

$$2021 = 43 \cdot 47$$

$$2022 = 2 \cdot 3 \cdot 333$$

$$2023 = 7 \cdot 17^2$$

4) Összetett oszthatósági szabályok

- Adj meg a következő számoknak mennél több osztóját – használd az oszthatósági és összetett oszthatósági szabályokat!

25 740

42 075

216 216

- Egészítsd ki úgy, hogy igaz legyen (a vonalakon 1-1 számjeggyel), és a szám a legkisebb legyen!

$$\begin{array}{r} 15 \overline{) _ 6 _} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 45 \overline{) 8 _ 3 _} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 22 \overline{) 8 _ 2 _} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 24 \overline{) 8 _ 07 _} \end{array}$$

- Írd föl az $A = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$ összes osztóját fa struktúrával!

5) Reláció tulajdonságok

- Gondolkodtató

Felírom a táblára 1-től 101-ig a természetes számokat. Majd kiválasztok kettőt, letörlöm és felírom a különbségüket. Addig csinálom, míg csak egy szám marad.

- Egy művelet után hányval csökken a táblán található számok száma?
- Hányadik művelet után marad egy db. szám a táblán?
- Milyen számpárokból lesz ps (páros) különbség és milyenből pt (páratlan)?
- Ha ps lesz egy művelet után, akkor miket törölhettem le?
- Ha pt marad egy művelet után, akkor miket törölhettem le?
- Hogyan változik a ps és pt számok darabszáma a táblán egy-egy törlés után?
- Hány páros és hány páratlan szám volt kezdetben a táblán?
- Páros vagy páratlan lesz az utolsó fennmaradó szám?
- Miben különbözik mindez attól, hogy összeadom a két számot, amit kiválasztok?

- Töltsd ki a táblázatot (hamis/igaz)

Reláció	Reflexív	Szimmetrikus	Tranzitív	Anti-szimmetrikus
„merőleges” (egyenesek)				
egybevágó (pl. Δ -ek)				
kisebb-egyenlő (számok)				
„osztja” (természeteseknél)				
őse (élőlények)				
egyenlő (számok)				
része-egyenlő (halmazok)				

6) Egyéb tulajdonságok

a) Bizonyítsd be: ha $c|a \wedge c|b \Rightarrow c|a+b \wedge c|a-b$.

b) Bizonyítsd be, hogyha $6|a$ és $6|b \Rightarrow 6|5a+7b$

c) A lineáris kombináció: $a|b$ és $a|c \Rightarrow a|(k \cdot b + n \cdot c)$ ahol k és n egész.

Bizonyítsd be: ha $c|a+b \wedge c|b \Rightarrow c|a$

$$(5^{100}; 5^{100}+3)=?$$

**** Melyek azok az n természetes számok, melyeknek a tízes számrendszerben felírt alakjában a számjegyek szorzata $n^2-10n-22$.**
(Induló ötlet: Az n szám számjegyeinek szorzata nem nagyobb számnál! ügyesebbek lássák be...!)

**** Mutasd meg, hogy: $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ bármilyen nagy lehet!**

(Ötlet: Mutasd meg, hogy $\frac{1}{k(k+1)}$ -től $\frac{1}{(2k)}$ ig összeadva a törteket $\frac{1}{2}$ -nél nagyobbat kapok...)

*** Áll: $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100} = 1 - \frac{1}{100}$**

(Segítség: próbáld meg pl. az $\frac{1}{4 \cdot 5}$ -öt felírni két szám különbségeként...)

*** Mutasd meg, hogy bármennyig adom is össze, mindig igaz lesz, hogy:**

$$\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots < 1$$

(Segítség: rajzolj egy négyzetet...)

Vizsgáld, meg, hogy igazak-e:

7|28392

17|34529

d) Sorold fel az 54 valódi és nem valódi osztóit.

7) Példák a tulajdonságok alapján

- $a, b \in \mathbb{Z}$. Igazak-e a következő állítások?

($\wedge$ = and = és, $\vee$ = or = vagy, $\oplus$ = xor = kizáró vagy)

Minta: $a + b$ eredménye ps (páros) $\Rightarrow a \text{ ps} \wedge b \text{ ps}$ hamis (lehet $\forall$ kettő pt)

$a + b \text{ ps} \Rightarrow a \text{ ps} \vee b \text{ ps}$

$a - b \text{ ps} \Rightarrow a \text{ ps} \wedge b \text{ pt}$

$a - b \text{ pt} \Rightarrow a \text{ ps} \vee b \text{ ps}$

$a \cdot b \text{ ps} \Rightarrow a \text{ ps} \wedge b \text{ ps}$

$a \cdot b \text{ ps} \Rightarrow a \text{ ps} \vee b \text{ ps}$

$a + b \text{ pt} \Rightarrow a \text{ pt} \oplus b \text{ pt}$

- Válaszd ki, hogy melyek lehetségesek (lehet, nem lehet): ha $4 | (a + b + c)$, akkor

$4 \nmid a; 4 \mid b, 4 \mid c$

$4 \mid a, 4 \nmid b, 4 \nmid c$

$4 \mid a, 4 \mid b, 4 \mid c$

$4 \nmid a, 4 \nmid b, 4 \nmid c$

- Igaz-e:

7|210147

13|39263

- Hozd kanonikus alakra a 2 250 000 -et
- Bizonyítsd be, hogy: $73 \mid \overline{abcdabcd}$ és $137 \mid \overline{abcdabcd}$
- Bizonyítsd be: $17 \mid (a + 2b) \Rightarrow 17 \mid 20a + 6b$
- Mutasd meg, hogy: $121 \mid (\overline{abcd} + \overline{dcba})^2$
- Mutasd meg, hogy: $9 \mid 5n + 8k \Rightarrow 9 \mid 14n + 17k$
- * Mutasd meg, hogy: $17 \mid (a + b) \Rightarrow 17 \mid b(2b + 3) + a(4b + 3) + 19a^2$.

- * Mutasd meg, hogy: $7 \mid (2a-4b) \Rightarrow 7 \mid 2a^2-4ab + 11a + 8b-35$

- Adj meg az $\overline{abc} - \overline{bca}$ -nak minél több osztóját!

II. A teljes hatványok, a Pascal- Δ , nevezetes szorzattá-alakítások – a számelmélet erős eszközei - symbolab.com

1) Teljes köb

$$(x + y)^3 =$$

$$(x-1)^3 =$$

$$(a-b)^3 =$$

$$(x-5)^3 =$$

$$(x + 1)^3 =$$

$$(2x + 1)^3 =$$

2) Másod - harmad - negyed fok, stb.

a) Írd föl a Pascal-háromszög első 7 sorát – vigyázz, a 0. sorral kezdődik ☺

b) Bonts föl a zárójelet – a Pascal-háromszöget használva

$$(a + 4)^3 =$$

$$(3a + 1)^3 =$$

$$(2a-3)^3 =$$

$$(x + 1)^4 =$$

$$(2x+3)^4 =$$

$$(3x-5)^4 =$$

3) Azonos kitevőjű hatványok különbsége

a) Bontsd föl a zárójelet, vonj össze!

$$(a-2)(a^2 + 2a + 4) =$$

$$(2x-3)(4x^2 + 6x + 9) =$$

b) Alakítsd szorzattá

$$x^3 - y^3 =$$

$$y^3 - 1 =$$

$$x^3 - 3^3 =$$

$$x^3 - 8 =$$

$$y^3 - 125 =$$

$$27x^3 - 1 =$$

$$2x^7 - 2x =$$

$$64x^6 - 729 =$$

4) Azonos páratlan kitevőjű hatványok összege: $a^{2k+1} + b^{2k+1} = (a+b)(\dots)$

a) Bontsd föl a zárójelet

$$(x+1)(x^2 - x + 1) =$$

$$(x+1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) =$$

$$(x+2)(x^2 - 2x + 4) =$$

b) Alakítsd szorzattá:

$$a^3 + 8 =$$

$$a^5 + 243 =$$

$$x^7 + 128 =$$

$$125x^3 + 27 =$$

5) Három v. több tag összegének négyzete, illetve két nehezebb szorzattá alakítás

a) Bontsd föl a zárójelet

$$(3a - 2b + c)^2 =$$

$$(2x - 3y - 5)^2 =$$

b) Alakítsd szorzattá – ld órai anyag

$$a^4 + a^2 + 1 =$$

$$a^4 + 4 =$$

* Alakítsd kéttényezős szorzattá

$$n^4 + n^2 + 1 =$$

$$n^6 + n^4 + n^2 + 1 =$$

$$n^8 + n^6 + n^4 + n^2 + 1 =$$

$$n^{10} + n^8 + n^6 + n^4 + n^2 + 1 =$$

6) A hatványozás és szorzattá-alakítás gyakorlása

Ahol szorzat van megadva, ott bontsd föl a zárójelet (csökkenő fokszám, összevonás), ahol tagok, ott alakítsd szorzattá - mennél több tényezővé! „In medio stat virtus” Amit lehet fejben, csak a végeredményt írd le:

$$(2x^2-3)(5x^2+2) =$$

$$(x^3-1)(8x^3+1) =$$

$$(3x-1)^3 =$$

$$(2x-5)^3 =$$

$$(x^3-3)(x^2+5) =$$

$$(5x+3y-4)(5x+3y+4) =$$

$$(2x+1)(x-3)(2x-1)(x+3) =$$

$$(3x-2y)^3 =$$

$$(x^4+1)(x^2+1)(x+1)(x-1) =$$

$$6x^3-6 =$$

$$a^6-b^6 =$$

$$x^3-8-12x+6x^2 =$$

$$a^3-a^2b-ab^2+b^3 =$$

$$3x^3+375 =$$

$$5x^6-320 =$$

$$3cx^2-9-x^2-18cx+27c+6x =$$

$$(x^2-8x-7)^2-81 =$$

$$(a^4+1)^2-289 =$$

$$x^4-(2x-1)^2 =$$

$$45-3x^2-6x =$$

$$5x + 14 - x^2 =$$

$$49x^2 - 28x + 4 =$$

$$(4x^2 + 1)^2 - 25 =$$

$$2x^2 + 9x + 10 =$$

$$6x^2 - 23x + 21 =$$

$$\frac{2}{1250}x^4 - \frac{3}{48}a^4 =$$

$$-18x^3 - 32x + 48x^2 =$$

$$a^2x - 1 - 2ax + x - a^2 + 2a =$$

$$-25x^4 + 20x^2 - 4 =$$

$$(x^2 + 16)^2 - 64x^2 =$$

$$4x^2 + 12x + 9 =$$

$$6a - 3a^2 + 45 =$$

$$4x + 6 - 2x^2 =$$

$$30x - 5x^2 - 40 =$$

Hozd a legegyszerűbb alakra

$$\frac{437^2 - 363^2}{537^2 - 463^2} =$$

„In medio stat virtus”

$$x^8 - 1 =$$

$$x^{10} - 1 =$$

$$x^5 + x^2 =$$

$$x^2 + 2x - 3 =$$

$$2x^2 + 5x - 3 =$$

$$-x^2 + 2x + 24 =$$

$$x^4 - x^2 =$$

$$a^3 + 27 =$$

$$x^3 + x^2y - xy^2 - y^3 =$$

$$x^5 - x^3 + x^2 - 1 =$$

$$x^4 + x^3 + 6x^2 + 5x + 5 =$$

7) Emlékeztető két nagyon fontos ismeretre

Mutasd meg, hogy $6 \mid n^3 - n$

8) A szorzattá alakítás – *a számelmélet egyik legerősebb eszköze*

a) Add meg zárt alakban a következő szorzatot:

$$(2^1 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1) \dots (2^{1024} + 1) = S$$

Vagyis ne kelljen 10 tényezőt leírni, vagy mondjuk 12-őt, ha 24096-ig mennénk)

Mit is jelent az „Zárt alak”?

Pl: 1-től 100-ig a számok összege: $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 100$.

Zárt alakban: $\frac{100 \cdot 101}{2}$

Vagyis ha 230-ig kellene összeadni, akkor a még hosszabb összeadást kéne írni. A zárt alak továbbra is ugyannyi változóból áll:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 230 = \frac{230 \cdot 231}{2}$$

$$(2^1 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1) \dots (2^{1024} + 1) =$$

b) Áll.: $11 \mid 2^{50} + 7^{25}$

c) Keresd a $3^{105} + 4^{105}$ -nek osztóit. Mennél többet.

d) Állítás: $7 \mid 2^{50} - 5^{20}$.

** Bizonyítsuk be, hogy $1 + 2^n + \dots + (n-1)^n$ osztható n^2 -tel, ha n páratlan természetes szám.

* Tudjuk, hogy $x + y + z = 0$ Mutasd meg, hogy ekkor $x^3 + x^2z + y^2z - xyz + y^3 = 0$

e) Mutasd meg, hogy $p > 5$ és prím, akkor a rákövetkező négy szám szorzata osztható 40-nel.

Vagyis $40 \mid A = (p+1)(p+2)(p+3)(p+4)$

f) Áll: $28 \mid 3^{15} + 1$

(Ötlet, érdemes először kivonni 28-at, majd az eredményből kiemelni egy 3 hatványt, és úgy szorzattá alakíttatni)

- g) Mutasd meg, hogyha $2^n - 1$ prím, akkor n prím.
Ha kell, lásd órai megoldás!

Matematikai logika - implikáció: $2^n - 1$ prím $\Rightarrow n$ prím.

Az utótag szükséges feltétele az előtagnak, mert ha nem igaz az utótag, akkor az előtag nem lehet igaz, mert abból az következne, hogy igaz az utótag.

Vagyis: mi feltettük, hogy nem igaz, hogy n prím ($\neg n = \text{prím}$), és abból az következett, hogy $2^n - 1$ nem prím.

Vagyis ha $2^n - 1$ prímszám, akkor csakis az lehet, hogy n prím.

Keress rá a Mersenne prímekekre!

- 9) Szorzattá alakítás, relatív príme, egymást követő számok

- Áll: $13 \mid \overline{abcabc}$

- Mutasd meg, hogyha $5 \nmid a$, akkor $a^2 + 1$ vagy $a^2 - 1$ osztható 5-tel!

- Állítás: $n \in \mathbf{N} \Rightarrow 12 \mid 15^{20} - 9^{10}$

- Állítás: $n \in \mathbf{N} \Rightarrow 40 \mid n^5 - 5n^3 + 4n$

- Állítás: $n \in \mathbf{N} \Rightarrow 360 \mid n^6 - 5n^4 + 4n^2$

- Állítás: $n \in \mathbf{N} \Rightarrow 6 \mid n^3 + 11n$

III. Számrendszerek

1) Számrendszerek és átírások (ismétlés)

- a) Írd át az alábbi számokat 10-es számrendszerbe:

$$10001110_2 =$$

$$4444_5 =$$

$$21012_3 =$$

b) Írd át az alábbi számokat 10-esből a megadott számrendszerbe:

- $127 = x_2$
- $2833 = x_5$
- $210 = x_3$
- * Mutasd meg, hogy egy 6-os számrendszerbeli szám pontosan akkor osztható 5-tel, ha a jegyek összege osztható 5-tel...
- Mennyi lehet az x , y , és z , ha: $3 \cdot 7^x + 5 \cdot 7^y + 7^z = 53200_7$
- A 16-os számrendszerben a következők a számjegyek:
1;2;3;4;5;6;7;8;9;A;B;C;D;E;F (A = 10, F = 15)
Végezd el a a következő műveleteket:
(Először át kell váltani őket a 10-esbe, ott elvégezni, majd visszaváltani.)
 $F2_{16} \cdot AB_{16} =$
 $FF_{16} - B4_{16} = ?$

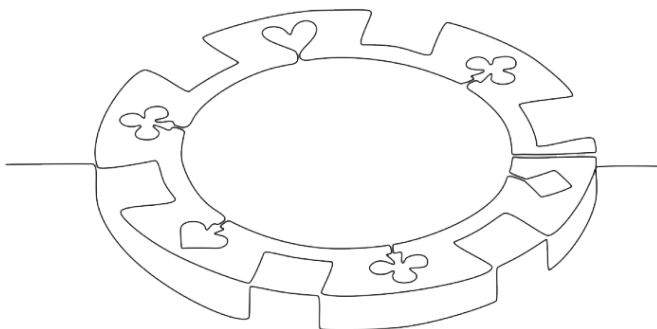
2) Műveletek számrendszerekben

- Hány db. 5-jegyű szám van a 3-as számrendszerben?

- Számold ki a számrendszer alapját: $15_x = \frac{594_x}{44_x}$

- Számold ki a számrendszer alapját: $506_x = 30_x \cdot 14_x + 26_x$.

- Egy derékszögű $\triangle$ oldalai valamely számrendszerben 11_x , 41_x , 40_x . Melyik ez a számrendszer, mekkorák az oldalak?



Számelmélet – LNKO és LKKT

I. A számelmélet alaptétele

1) Az egység

- $(1+x+x^2+x^3+x^4+\dots+x^{50})^2$ kifejezésben mennyi lesz az x^{30} együtthatója?

- $(5x-3)^3=$

$$(3x-4)^4=$$

- Alakítsd szorzattá:

$$x^4+x^2+1=$$

$$2x^2+7x-15=$$

$$-2x^4+36x^2-162=$$

$$n^6-n=$$

$$2n^3+250=$$

- * Bizonyítsd be: ha $a; b \in \mathbf{N}$ és $7 \mid (2a-3b) \Rightarrow 7 \mid (18a-6b)$

2) A prímek kezdő definíciója, és az összetett számok

- Írd le az első 10 prímszámot!

3) A számelmélet alaptétele – és a kanonikus alak

- Bontsd prímeke: $a=22500000$, $b=324000$

- Miért nem lehet négyzetszám az $50!$

- Két halmazba osztom az első 100 pozitív természetes számot. (nem szükségszerűn van ugyanannyi a két halmazban) Mindkét halmaz elemeit összeszorozom. Miért nem lehet a két végeredmény egyenlő?

- * Két halmazba osztom a 2 első 50 hatványát ($2^1, 2^2, 2^3 \dots 2^{49}, 2^{50}$.) (nem szükségszerűn van ugyanannyi a két halmazban). Mindkét halmaz elemeit összeszorozom. Miért nem lehet a két végeredmény egyenlő?

- Egyenlő-e ez a kettő szám: $20 \cdot 45 \cdot 1000 \cdot 25 \cdot 32 \cdot 420$ és $45 \cdot 250 \cdot 28 \cdot 12 \cdot 64 \cdot 10 \cdot 125$ (érdeemes a kanonikus alakot nézni...)

4) Osztók keresése, osztók száma

- Keresd ki: a 144 összes osztóját párbaállítós módszerrel!!!
- 48 egyforma négyzetből hányféle téglalapot lehet kirakni (mindegyiket fel kell használni!)?

5) Osztók tulajdonságai

- Egy N szám osztója 15 és 18. Melyik állítás **Igaz/Hamis/Lehet igaz is, hamis is**:
Az N prímtényezős felbontásában:

a) van 2	b) van 11	c) nincs 11	d) van 3
e) nincs 3	f) van 5	g) a 3 kitevője 1 v. 0	
h) a 3 kitevője 2, vagy több		i) a 2 kitevője pontosan 3	

- Add meg a 225 osztóit fa struktúrával és párba állítással is!

- * Mutassuk meg, hogy egy szám pozitív osztóinak a száma nem nagyobb, mint a szám négyzetgyökének kétszerese.
- Számold ki a 10 000 osztóinak számát!
- Szedd össze 1-től 50-ig azokat számokat, amelyeknek pontosan 6 db. osztója van. Kanonikus alakban keresd!

6) Osztókkal kapcsolatos gyakorlások

- a) Keresd meg azt a legkisebb számot, amelynek 10 osztója van.

* Határozzuk meg az a legkisebb pozitív egész számot, amelynek pontosan 12 pozitív osztója van.

b) $200!$ prímtényezős felbontásában 3-nak mennyi a kitevője?

24-nek melyik az a legmagasabb hatványa, amely még osztja $300!$ -t?

Hány 0-ra végződik a következő szorzat: $15^7 \cdot 24^3 \cdot 125^4 \cdot 16^3$.

* $\prod_{i=101}^{200} i$ hány 0-ra végződik? $(\prod_{i=101}^{200} i = \frac{200!}{100!} = \frac{200 \cdot 199 \cdot 198 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1})$

c) Hányadikra kell emelni a 9^3 -t, hogy 27^8 legyen belőle?

Mutasd meg, hogy az $\overline{abcabc}$ alakú számok közt nincs négyzetszám. (Érdemes prímtenyezőket keresni először...)

d) $20|N$ és $150|N$. Melyik állítás **Igaz/Hamis/Lehet igaz is, hamis is** (alá írd!)

$10|N$

$30|N$

$20 \cdot 150|N$

$15|N$

$300|N$

* Írd föl 600 összes (pozitív) osztójának szorzatát!

e) * Ferenc felírta egymás után 1-től 2124-ig az egész számokat. Az így kapott $N=123...21232124$ számról azt állítja, hogy annak 20615 db. osztója van. Gergely szerint N-nek csak 20614 osztója van. Mutassuk meg, hogy mindketten tévedtek. (Ötlet az elinduláshoz: az első 20615 pt, $20614=2 \cdot 11 \cdot 937$)

f) A 120-nak hány olyan pozitív osztója van, amelyet nem oszt a 4.

7) Oszthatósági szabályok – elemi oszthatóságok

- * Bizonyítsd be az 5-tel való oszthatóság szabályát!

(Elindulás: írd le a két számot: $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 5}$ v. $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 0}$)

- $15 \mid 5_30_$ (öt jegyű szám) illetve: $36 \mid 7_20_$ (öt jegyű szám). Mit írjunk a vonalak helyére, hogy a szám a lehető legnagyobb, illetve a lehető legkisebb legyen?

- * Mutasd meg, hogy $5 \mid 2019^{2019} + 2021^{2020}$.

8) Négyzetszámok-köbszámok stb.

- Miért nem négyzetszám:

$$a = 10^{100} + 10^{50} + 1$$

$$b = 123456789101112$$

$$c = 100!$$

$$d = 10^{50} + 10^{23}$$

- Írd föl $11^3 \cdot 17^5 \cdot 23$ azon osztóit, amelyek négyzetszámok!

- * Ha egy N számot 2^3 -el szorzok, osztóinak száma duplája lesz. Ha azonban 5^2 -el szoroznám, akkor csak a felével nőne az osztók száma. Hány 0-ra végződik N ?

9) Osztók és a relatív prímek a Számelmélet alaptétele alapján

- Legyen M olyan, hogy $a=2^2 \cdot 3^5 \mid M$, $b=2^3 \cdot 5 \mid M$, és $c=5^2 \cdot 3^3 \mid M$
Adj meg olyan M -et, amire igaz az előbbi három oszthatóság, és:

$$a \cdot b \nmid M \quad M=$$

$$a \cdot b \mid M \quad M=$$

$$a \cdot b \cdot c \nmid M \quad M=$$

$$a \cdot b \cdot c \mid M \quad M=$$

$$a \cdot c \nmid M \quad M=$$

- * Maximum hány különböző osztóját tudom kiválogatni a $10!$ -nak, hogy azok páronként relatív prímek legyenek? Ezt a maximumot hány különböző féleképp tudom létrehozni?

- $a, b \in \mathbf{N}$. $a^2 - b^2 = 2021$ a és b egész. Mennyi? ($2021=43 \cdot 47$)

- Mutasd meg, hogy $\nexists n \in \mathbf{N} \setminus \{0;1\} \rightarrow n^5+1$ prím!

10) Oszthatósági szabályok - összetett oszthatósági szabályok

- Mutasd meg, hogy $60 \mid x^5 - 5x^3 + 4x$ ha $x \in \mathbf{N}$.
(Ne feledd: erős várunk a szorzattá alakítás!)

II. A lineáris kombináció és az LNKO - $(a;b)$ előállítása x_0a+y_0b alakban

1) LNKO megtalálása a Számelmélet alaptétele felhasználásával

- Készíts (prímtényezőikkel érdemes) 3 olyan összetett számot, amely három közül egyik kettő sem relatív prím – de a három szám LNKO-ja 1.

- Határozd meg: $(256000;1440)=$

- Írd föl az $a=2^2 \cdot 5^4 \cdot 7^2$ és $b=3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11^4$ összes közös osztóját az órán látható módszerrel!

- * Keres 10 olyan különböző számot, amelyből bármely kettőt kiválasztva az egyik LNKO-ja a kiválasztott kettőnek!

- Keresd meg az 2200 és az 1400 összes közös osztóját!

2) Euklideszi algoritmus alapja – számok távolsága

- Ha $a \in \mathbf{N}$ i) mi lehet: $(a; a+1)=?$ ii) mi lehet: $(a; a+2)=?$

- Mutasd meg, hogy $(14\,000\,001; 14\,000\,008)$ relatív prímek! (Ne kanonikus alakkal!)

3) A lineáris kombináció

- Tudjuk, hogy $b \mid a$. $(a; a+b)=?$

- Az órán látható ötlettel:
 $(111222; 111224)=?$

$$(1234560; 1234565)=?$$

$$(1\,000\,005; 1\,000\,007)=?$$

$$\text{Milyen „a”-ra mennyi lehet: } (5a; 15a+2)$$

- Mutassuk meg, hogy $(2^a+1; 2^a-1)=1$

4) A közös osztók „lélekvándorlása” vagyis átadása

- Számold ki a lineáris kombináció segítségével!
 $(4900; 5300) =$

$$(400; 5145) =$$

$$(832; 8500) = ?$$

- Prímfelbontással is, és lineáris kombinációval (Eukleidészi algoritmussal) is:
 $(840; 1560) =$

$$(629; 799) =$$

5) Hasznuk algebrai törtek egyszerűsíthetőségénél

- a) Mely n -ekre lesz egyszerűsíthető a $\frac{2n}{4n+18}$ tört?

b) Mely n -ekre lesz egyszerűsíthető: $\frac{3n+2}{4n+1}$

c) Add meg az $(13n-4; 5n+2)$ lehetséges értékeit!

d) Létezik-e $n \in \mathbf{N} \rightarrow \frac{2n-5}{3n-7}$ egyszerűsíthető?

e) Határozzuk meg n értékét úgy, hogy $\frac{3n+2}{8n-3}$ egyszerűsíthető legyen (másképp: határozd meg $(8n-3; 3n+2)$ lehetséges értékeit.

f) Áll.: $13 \mid (2a+b) \wedge 13 \mid (5a-4b) \Rightarrow$ Áll: $13 \mid (a-6b)$

Mutasd meg, hogy ha a és b egész számok és $17 \mid 2a+9b \Rightarrow 17 \mid 33a+89b$.

* Mivel egyszerűsíthető: $\frac{n^2 + 3n - 1}{n + 1}$

6) Egyéb gyakorló példák (Az a és b változók természetes számok)

a) $a, b \in \mathbf{N}$. $a^2 - b^2 = 539$. $(a; b) = 7$ Mennyi az a és a b ?

Áll: $17 \mid (5a-4b)$ és $17 \mid (9a+3b) \Rightarrow 17 \mid (11b-a)$

b) Áll.: $7 \mid n^7 - n$, ha $n \in \mathbb{N}$

$a, b \in \mathbb{N}$. $a^2 - b^2 = 28$. Mi lehet az „a” és a „b”?

Mutasd meg, hogy ha $n \in \mathbb{N} \Rightarrow 6 \mid n^3 + 5n$

III. Legkisebb közös többszörös: Least Common Multiple

1) Definíciók; példa

Számold ki a következő számpárok: LNKO-ját, szorzatát, LKKT-ját, és az LNKO és LKKT szorzatát: a) 11 és 13 b) 45 és 75

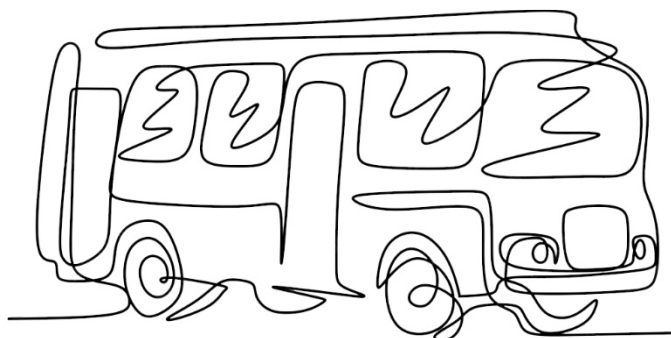


2) Tételek

- $[2 \cdot 3 \cdot 7^3; a] = 2 \cdot 3^4 \cdot 7^3$ Add meg a lehetséges „a” számokat (elég kanonikus alakban).
- $[135; b] = 1350$. Add meg a lehető legkisebb b-t!
- Két szám kanonikus alakjából mikor derül ki „ránézésre”, hogy a legkisebb közös többszörösük a szorzatuk?
- Igaz mindig/Hamis mindig / Lehet is-is Írd mellé!
Két pozitív szám LKKT-je:
 - a) mindkét számnál kisebb
 - b) mindkét számnál nagyobb
 - c) a nagyobb számnál kisebb
 - d) a kisebb számnál nagyobb
 - e) a két szám szorzatánál kisebb
 - f) a két szám szorzatánál nagyobb
 - g) a két szám szorzata
 - h) osztja a két szám LNKO-ja
 - i) osztja a két szám szorzata
 - j) osztja a két szám szorzatát

3) Példák

- a) $(a; b) = 1$. $[a; b] = 1575$. Mi lehet a két szám?
- b) A 7-es busz 6 percenként jár, a 9-es busz 10 percenként. Reggel 5 órakor mindkét busz egyszerre ért a megállóba. Hány perc múlva érnek legközelebb egyszerre a megállóba?



Egy kerékpár nagyobb fogaskerekén 35 fog, a kisebbiken 15 fog van. Hányszor kell a pedált körbeforgatni, hogy mindkét fogaskerék a kiindulási helyzetbe kerüljön vissza?

c) Venn-diagramon ábrázold: (Alaphalmaz: **Z**)

A 6-tal és 15-tel osztható számokat – minden helyre írd be 1-1 számot!

A 4; 6; 10-zel osztható számokat – minden helyre írd be 1-1 számot!

d) Venn-diagramon ábrázold: (Alaphalmaz: **Z**)

A 28; 7; 30 -cal osztható számokat – minden helyre írd be 1-1 számot!

A 28; 7; 42 -vel osztható számokat – minden helyre írd be 1-1 számot!

e) $(a;b)=1$. $[a;b]=256$. Mi lehet a két szám?

f) $a+b=98$; $[a;b]=720$. Mennyi lehet a és b ?

g) * Melyik az a háromjegyű szám, amelyből 6-ot elvéve 7-tel oszthatót kapok, 7-et elvéve 8-cal oszthatót kapok, 8-at elvéve belőle 9-cel osztható számot kapok?

IV. Egyéb gyakorló példák

- Mutasd meg, hogy nincs olyan a és b egész, melyekre: $(a;b)=7$ és $a+b=100$.
- Mely számokkal osztható biztosan A , hogyha tudjuk, hogy $12|A$ és $55|A$.
- Keresd osztót a következő számhoz: $\overline{a000a}$
- $a;b;c \in \mathbb{N}^+$. $ac=284$; $bc=497$. Mi lehet $a \cdot b \cdot c$?
- Nem köt.: Áll: $7 | \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0} \Leftrightarrow 7 | \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1} - 2a_0$
- * Számítsd ki (állítsd elő) $(3273; 2746)$ -t a két szám lineáris kombinációjából.
- Állítsd elő a 11-et a 7 és a 10 lineáris kombinációjából!
- Mely számrendszerre igaz
 $52_x + 43_x = 125_x$ b) $32_x \cdot 23_x = 756_x$
- Mutasd meg, hogy a következő számok összetettek:
 $a = 10^{11} - 5^{13}$ $b = 10^{100} - 7$
- * A körzővel, vonalzóval szerkeszthető szögek: $15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 18^\circ$ (Nyilván ezek minden lineáris kombinációja is). Megadnak egy szöget, amely 25° -os. A segítségével tudunk-e szerkeszteni 22° -os szöget?
- Mutasd meg, hogy a következő számok összetettek:
 $a = 4^{20} - 1$ $b = 1111 \dots 11$ (100 db 1-es) $c = 111 \dots 11$ (2015 db. 1-es)
- Oldd meg az egészek halmazán (nézd meg, először, hogy megoldható-e!)
a) $x \cdot 12 + y \cdot 55 = 63$ b) $a \cdot 12 + b \cdot 15 = 77$
- Mutasd meg, hogy $18 | 17^{19} + 19^{17}$
- Mutassuk meg, hogy a következő 4 jegyű szám teljes köb bármely számrendszerben: 1331_x .
- A 81000 -nek hány db. 54-gyel nem osztható osztója van?
- * Mely n -re egyszerűsíthető és mivel: $\frac{n^3 + 2n}{n^4 + 3n^2 + 1}$
- Mely n -re egyszerűsíthető és mivel: $\frac{2n-4}{n+5}$ illetve $\frac{2n-5}{3n-7}$
- * Áll: $\sum_{i=1}^a i \mid \sum_{i=1}^a i^n$, ahol $n = p \cdot t$.
- Add meg az $(13n-4; 5n+2)$ és az $(n^2+2n-1; n+2)$ lehetséges értékeit.
- * Áll: $(2^{2a}+1; 2^a+1)=1$
- * Mely „a” természetesenekre igaz, hogy $(a^4+3a^2+1; a^3+2a)=1$
- * Keresd meg $A=11\ 111\ 111$ és $B=1111 \dots 1$ (100 db. 1-es) LNKO-ját!
- $2C2D_{16} = 443110_x$ (A 16-os számrendszer jegyei: 0-9, 10=A, 11=B; 12=C ... 15=F).

- * A 10-es számrendszerben mely számokkal lehet minden esetben „biztonsággal” osztani, vagyis úgy, hogy ne legyen végtelen szakaszos tizedes tört. ** És a 6-os számrendszerben?
- * Adj a 7-es számrendszerben 6-tal való oszthatósági szabályt!
- * Van egy 1 kg, 3 kg, 9 kg és 27 kg súlyom. Két serpenyős mérlegen milyen egész tömegű testeket tudok velük mérni, ha a serpenyő bármelyik felébe tehetek súlyt?
- Egy számológép az 5-ös számrendszerben számol. Csak azt látjuk, hogy valaki beütött két számot: $10\#_5$ és $\#0_5$, majd összeszorozta őket, és a következőt számot kapta $\#140_5$. Sajnos a gép nem tud egy számjegyet kiírni, azért írja helyette a kettőskeresztet. Mi lehet ez a számjegy?
- A következő ötlet alapján próbálj meg magadtól létrehozni Pitagorasz-i számhármast:
 $8^2+15^2=17^2$ $8^2=17^2-15^2$ $64=(17-15)(17+15)$ $32=(17+15)$
 $a^2+b^2=c^2$ $a^2=c^2-b^2$ $a^2=(c-b)(c+b)$ legyen $c-b=2$. $\frac{a^2}{2}=c+b$
Vagyis az $a^2/2$ -öt két olyan szám összegére kell szétszedni, amelyek különbsége 2.



Számelmélet – A maradékok világa az egész számoknál - olvasmány

I. Számok osztási maradéka

1) Bevezetés

a) „Baráti számok” és „Baráti körök”

Oszd el maradékosan: 30-at utána a -30 -at 5-tel, 6-tal és 7-tel

$a=5k+3$ és $b=5n+3$ Mutasd meg, hogy $5|a-b$

Töltsd ki a táblázatot az 5 szerinti baráti számokkal oszloponként. Legyen köztük 3 jegyű is, és negatív is

0	1	2	3	4

Mutasd meg, hogy $2021|1^3+2^3+3^3+..+2020^3$

(Ötlet: okos párbaállítással után $2^{k+1}+b^{2k+1}$ szorzattáalakítás...)

Adott 8 természetes szám. Mutasd meg, hogy biztos van köztük 2 olyan, melyek különbségét osztja a 7.

(Ötlet: nézd meg a 7 szerinti „legkisebb nemnegatív teljes maradékrendszert”, a baráti társaság táblázatának első sorát...)

2) Gyakorlás más számokkal

- Különböző modulusok

Írj a vonalakra különböző számokat: egyjegyűt, kétjegyűt és háromjegyűt!

$$\underline{\hspace{1cm}} \equiv 5 \pmod{3}$$

$$\underline{\hspace{1cm}} \equiv 5 \pmod{3}$$

$$\underline{\hspace{1cm}} \equiv 5 \pmod{3}$$

$$\underline{\hspace{1cm}} \equiv 5 \pmod{6}$$

$$\underline{\hspace{1cm}} \equiv 5 \pmod{6}$$

$$\underline{\hspace{1cm}} \equiv 5 \pmod{6}$$

Írj a vonalakra különböző számokat: egyjegyűt, kétjegyűt és egy *negatívot*!

$$\underline{\hspace{1cm}} \equiv 25 \pmod{6}$$

$$\underline{\hspace{1cm}} \equiv 66 \pmod{6}$$

$$\underline{\hspace{1cm}} \equiv 75 \pmod{6}$$

$$\underline{\hspace{1cm}} \equiv 25 \pmod{8}$$

$$\underline{\hspace{1cm}} \equiv 66 \pmod{8}$$

$$\underline{\hspace{1cm}} \equiv 75 \pmod{8}$$

- Add meg 3-mal 8-cal és 9-cel a legkisebb nemnegatív teljes maradékrendszert!

II. Definíció és tulajdonságok

1) Kongruencia definíció

Adj meg olyan m modulusokat, melyekre a következő két szám kongruens:

$$35 \equiv 59 \pmod{m}$$

Fogalmazd meg, hogy mit kell „tudnia” az „ m ”-nek!

2) Tulajdonságok (a szereplő számok egészek, természetesek)

a) Műveletek

- Mutasd meg: $a \equiv b \pmod{13} \Rightarrow a+2021 \equiv b+2021 \pmod{13}$

- Mutasd meg: $a \equiv b \pmod{11} \Rightarrow 70a \equiv 70b \pmod{13}$

- Mutasd meg: $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow k \cdot a \equiv k \cdot b \pmod{m}$

- Írd föl a legkisebb nemnegatív teljes maradékrendszert mod 6, majd minden képviselő alá írd a 3-szorosát, és hogy az melyik képviselővé vált!

$$n \equiv \quad \text{mod } 6$$

$$3n \equiv \quad \text{mod } 6$$

b) Maradékosztályok képviselőinek szorzata

- Mutasd meg, hogyha $a \equiv b \pmod{7}$, akkor $a^2 \equiv b^2 \pmod{7}$
(Segítség: $a \equiv b \pmod{7}$ azt jelenti, hogy $7 \mid a-b$)

- Mutasd meg, hogyha $a \equiv b \pmod{8}$, akkor $a^3 \equiv b^3 \pmod{8}$
(Segítség: $a \equiv b \pmod{8}$ azt jelenti, hogy $8 \mid a-b$)

- Mutasd meg, hogyha $a \equiv b \pmod{3}$, akkor $a^n \equiv b^n \pmod{51}$
(Segítség: $a \equiv b \pmod{51}$ azt jelenti, hogy $51 \mid a-b$)

- Mekkora maradékot ad 23^{50} 3-mal osztva?

- Mekkora maradékot ad 40^{40} 7-tel osztva?

- Mutasd meg, hogy a $6n^2+2$ nem lehet négyzetszám!
(Ötlet: érdemes a 3-mal adott maradékokat, kongruenciát figyelni...)

III. Számelméleti hasznuk - gyakorlás

- $135 \cdot 243$ -nak mennyi a maradéka 7-tel osztva? (kb.: $135 \cdot 243 \equiv x \pmod{7}$)
- Mutasd meg, hogy $13 \mid 2^{60} + 7^{30}$ (Lehet kongruenciával, vagy ügyes szorzattá alakítással...)
- Áll.: $n \in \mathbf{N} \Rightarrow 6 \mid n^3 + 5n$
- Áll.: $a \in \mathbf{N} \Rightarrow 7 \mid a^7 - a$ (Lehet kongruenciával, vagy ügyes szorzattá alakítással...)

- Mutasd meg, hogy minden pt szám négyzete 8-cal osztva 1-et ad maradékul. (Lehet kongruenciával, vagy a pt számok általános felírásából kiindulva is)
- * Mutasd meg, hogyha p prím és nem 3, akkor $8^p + p^2$ nem lehet prím!
Segítség: nézd meg 2-re, majd utána a p már csak páratlan lehet, és akkor nézd meg a 3-mal való kongruenciát!

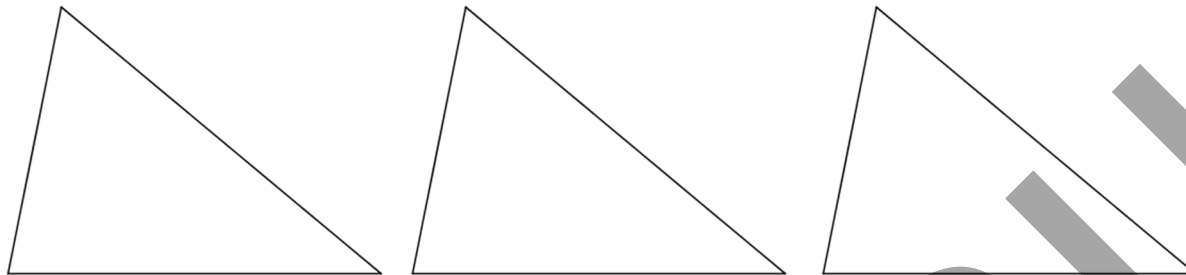


Kombinatorika

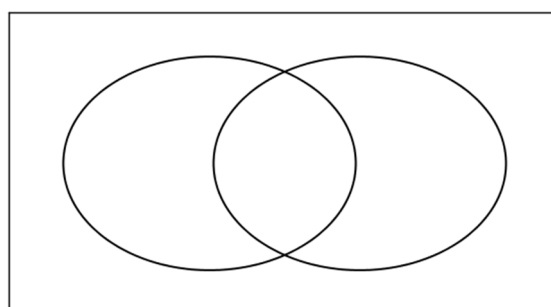
I. Gondolkodási módszerek

1) Bevezetés

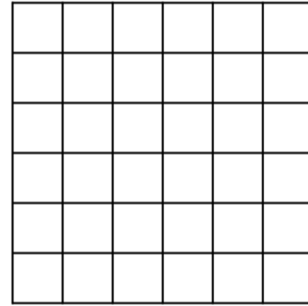
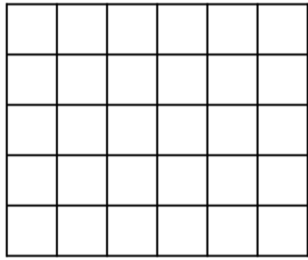
- Mutasd meg, hogy egy hegyesszögű $\triangle$ -et fel lehet vágni: a) 3 db. egyenlőszárú $\triangle$ -re; b) 4 db. egyenlőszárú $\triangle$ -re c) * 5 db. egyenlőszárú $\triangle$ -re, d) * 3 vagy annál több, bárhány db. egyenlőszárú $\triangle$ -re!



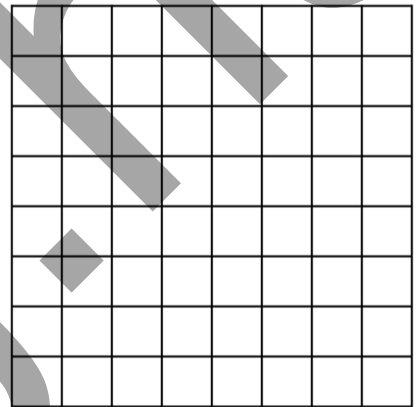
- 0-10-ig felírom a természetes számokat egy táblára. Letörlek találomra kettőt, és felírom az összegüket. Majd ezt a módszert folytatom. a) Hogy változik a táblára írt számok darabszáma lépésenként? b) Mi lesz az utolsó szám a táblán?
- Egy osztályban 32 fő van. Többféle nyelvet is tanulnak. Angolul 25-en, Franciául 10-en tanulnak. Az osztályból 7 fő nem tanulja sem az Angolt, sem a Franciát. Hányan tanulnak Angolul és Franciául is? Venn-diagramban dolgozz!



- Egy 6×5 -ös, illetve egy 6×6 -os négyzethálón eljuthatunk-e a bal alsó sarokból a jobb alsó sarokba úgy, hogy csak „oldalél-szomszédos” négyzetre ugorhatunk?

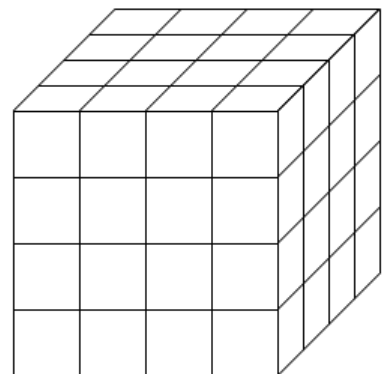


- Egy sakktábla két szomszédos mezőjét kivágjuk. Lefedhető-e a maradék 1×2 -es dominókkal?



- 2022 db. különböző prím összege páratlan. Mit mondhatunk a szorzatuk paritására?

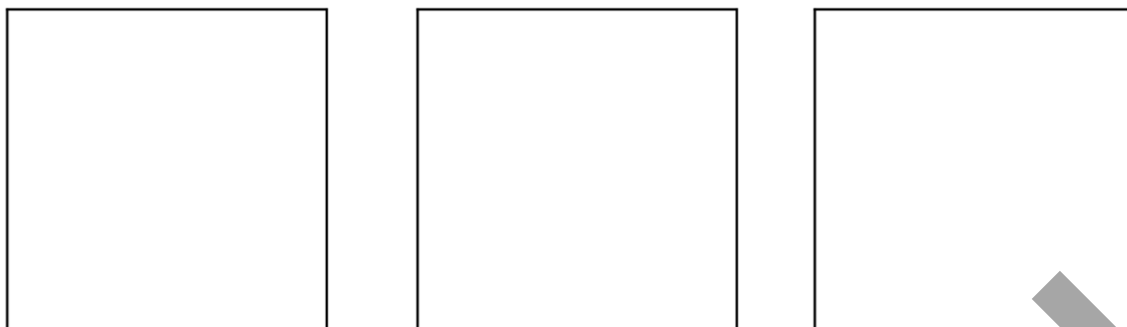
- Egy pirosra festett fehér anyagú kockát a lapjaival párhuzamos síkokkal 64 egybevágó kis kockára osztjuk. A kis kockák oldallapjai színe alapján milyen félék és azokból mennyi van?



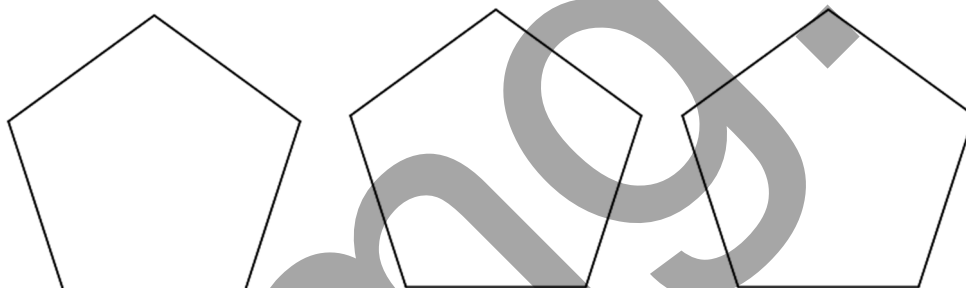
Változik-e a felülete, ha kiveszem a 8 sarkát (1×1 -es kockák)?

És ha egy 3×3 -as kockát veszek ki?

- * Egy négyzetlapot az oldalakkal párhuzamosan hány négyzetre lehet szétvágni (a daraboknak nem kell egyforma négyzeteknek lenniük!)



- Egy ötszögben 2 db, vagy 3 db különböző átlót tudsz behúzni többféleképpen?



2) Skatulya elv

a) Bevezetés

- Egy zsákban 20 db. fekete és 20 db. fehér, egyforma méretű zokni van. Hány darabot kell találomra kivenni, hogy biztosan legyen közte

a) 1 pár

b) 1 pár fehér

c) 2 pár

d) 2 ugyanolyan színű pár

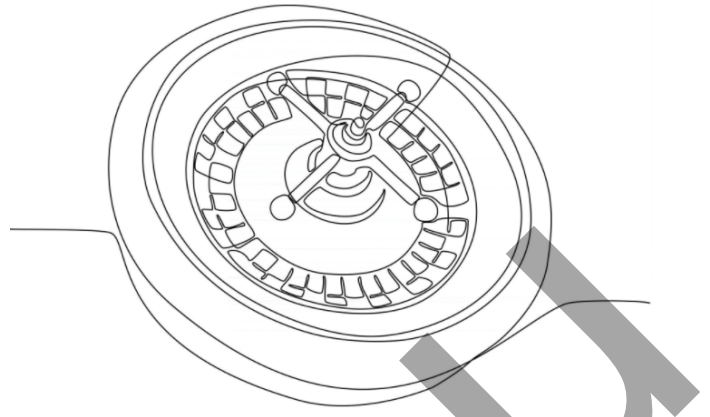
2 különböző színű pár

f) 2 pár fehér

g) 5 pár

h) 3 pár fehér és 2 pár fekete.

- A rulett keréken 0-36-ig vannak a számok. A 0 zöld színű, a maradék fele piros fele fekete. Hányszor kell egymás után dobni a golyót, hogy biztos legyen a) három azonos szín a dobások után. b) három különböző szín a dobások után 😊.



- Van egy doboz, benne: 10 piros, 15 kék, 8 sárga. Mennyit kell kivenni vakon, visszatevés nélkül, hogy

a) legyen kék

b) legalább 2 szín legyen

c) mindhárom szín legyen

d) legyen piros és kék

e) legyen piros vagy kék

f) legyen két azonos színű

b) A skatulya elv

- Mutasd meg, hogy 11 db. természetes szám közt kettő van olyan, melyek különbségét osztja a 10.

- Mutasd meg, hogy $n+1$ db. egész közül kiválasztható 2 olyan, melyek különbségét osztja n .

- Mutasd meg, hogy öt darab száznál nagyobb prím között biztos van kettő olyan, amelyik ugyanarra a jegyre végződik!

- Az iskolában 12 osztály van, és 385 tanuló jár összesen oda. Mutasd meg, hogy:
 - van két olyan tanuló, aki ugyanazon a napon született,
 - és van olyan osztály, (12 osztályos iskola) amelyben van két tanuló, aki ugyanolyan dátumú napon született: pl. jan. 3 és júl. 3.
 - Hány tanulónak kell ebbe a 12 osztályos iskolába járni ahhoz, hogy biztos legyen egy osztály, ahol biztos van legalább négy diák, aki ugyanabban a hónapban született.

c) Példák

- * Mutasd meg, hogy egy 10 tagú társaságban biztos van két olyan ember, akinek a társaságban ugyanannyi ismerőse van! (2 ember vagy ismeri egymást, vagy nem)
- Egy 5 cm oldalú négyzetben 60 pont van. Mutasd meg, hogy van három olyan pont, amely egy $r=0,75$ cm sugarú körlappal lefedhető!

- A síkon van 14 egyenes. Mutassuk meg, hogy van legalább két olyan egyenes, amelyek hajlásszöge $< 13^\circ$ (A párhuzamos egyenesek hajlásszöge 0°).
- Mutasd meg, hogy öt négyzetszám közül vagy van 5-tel osztható, vagy ha nincs, akkor van kettő, mely különbségét osztja a 10.
- Egy 23×11 cm-es téglalapon van 85 pont. Mutasd meg, hogy van 3 olyan, amelyet le lehet fedni egy $1,2$ cm sugarú 10 Ft-ossal. (Segítség: 2×1 -es téglalapokkal kell machinálni: a rövidebbik oldal: 1-es, a hosszabbon 2-es)
- A sík minden pontját kékre v. pirosra színezzük. **Minkét szín előfordul.** Mutassuk meg, hogy van
 - két azonos színű pont, melynek távolsága 1 egység.

- * két különböző színű pont, melynek távolsága 1 egység.

- * olyan egyenlőoldalú Δ , melynek csúcsai azonos színűek.

- * Megadható-e végtelen sok prím, melyek közül bármely 2015 összege összetett szám? (Fontos ismeret: végtelen sok prím van!)

3) Gondolkodási módszerek - az ábrázolás sok esetben segít

- Fastruktúrával írd föl az alább két szám osztóit (elég kanonikus alakban)

$$A=2^3 \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 11^4 \text{ és } B=2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 13^2$$

- Rajzold fel azt a fastruktúrát, amellyel le tudod írni azokat a kétjegyű számokat, melyeknek csak páratlan jegyük van!

4) A komplementer esemény – első közelítésben

- 10 diákból hány különböző összeállításban lehet 9 főt elküldeni moziba?
- Hány olyan kétjegyű szám van, melyben a jegyek szorzata páros?

II. Néhány alapismeret, gondolat

1) A faktoriális

- Egyszerűsítsd – vagy hozd a legegyszerűbb alakra!

$$\frac{n!}{(n-3)!} =$$

$$(n+2)(n+1)! =$$

$$\frac{n!}{(n-1)!} =$$

$$\frac{(n-1)!}{(n+1)!} =$$

$$n(n-1)(n-2)(n-3)! =$$

$$\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!} =$$

$$\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n-1)!} =$$

$$\frac{(n+3)!}{(n+1)!} \cdot \frac{(n+2)!}{(n-1)!} =$$

- * Kell $(n; k) \in \mathbf{N}^2 \rightarrow 1! + 2! + 3! + \dots + n! = k^2$
(segítség: Érdemes nézni a végződéseket...)

- * Kell $x \in \mathbf{N} \rightarrow x! + 1 = (x+1)^2$ Segítség: nézd meg, hogy mi a nagyságrendi viszonyuk!

- * Mutasd meg, hogy 2021-nek létezik olyan többszöröse, ami 11...1100...0 alakú!
- * Mutasd meg, hogy 2021-nek létezik 111...1 alakú többszöröse!

2) Egy kis valószínűességszámítás

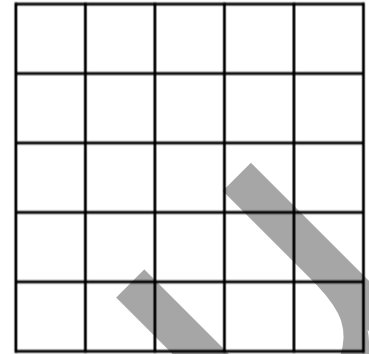
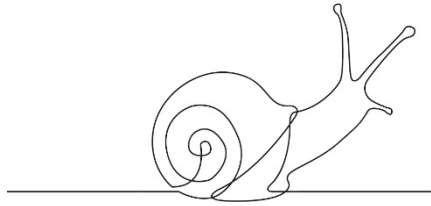
- Mi a valószínűsége annak, hogy a kockával prímszámot dobunk?
- Mi a valószínűsége annak, hogy a magyar kártyából egyet húzva királyt húzok?
- Mi a valószínűsége annak, hogy a magyar kártyából egyet húzva NEM zöldet húzok?

III. Permutációk - a sorrendek összeszámlálása: számít a sorrend – minden elem szerepel

1) Ismétlés nélküli Permutáció – különböző elemek maradéktalan sorba állítása

- * Melyik a nagyobb? $(8!)^9$ vagy $(9!)^8$
(Segítség: érdemes $8!$ -al leosztani néhányszor...)
- * Kell $x \in \mathbf{N}$ és: $4^{x-1} + 7 \cdot 2^x + 48 = x!$
(Segítség: érdemes valamivel való oszthatóságot figyelni.)

- * Egy 5×5 -ös sakktábla minden mezőjén egy csiga tanyázik. Adott jelre mindegyük átmászik egy szomszédos mezőre és ott lepihen. A szomszédos mezőknek közös oldaluk van. Lehetséges-e, hogy egy ilyen kimerítő mászás után minden mezőn pontosan egy csiga-biga tanyázzon? (Segítség: rajzolj!)



a) Alap

- Írd föl 3 elem $(a; b; c)$ összes lehetséges permutációját!
- Hányféleképp állítható sorrendbe az $(a; b; c; d)$, ha az „c” és a „d” valamilyen sorrendben egymást kell kövesse? Írd fel a lehetőségeket!
- * Mely számoknak létezik biztosan $111..1$ alakú többszöröse? (Skatulyaelv!)

b) Definíció, tétel

- Aladár, Béla, Dezső és Cirill együtt megy moziba. Hányféleképpen ülhetnek le egymás mellé? Írjuk is föl a lehetséges sorrendeket (permutációkat)! Mennyi a valószínűsége, hogy épp abc sorrendben ülnek növekvőn, v. csökkenőn?

c) Gyakorlás

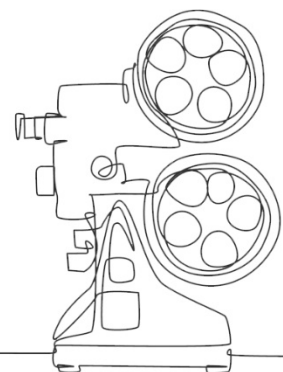
- A 0, 4, 6, 7 számokból 4 jegyű számokat állítok össze úgy, hogy minden jegyet egyszer veszek (a 0746 nem négyjegyű!). Hány ilyen lehet, és mennyi ezek összege?

- Hányféleképpen lehet egy mozi sorba leültetni 8 nézőt?

És akkor, ha Jancsi és Juliska egymás mellett akar ülni? (mindegy, hogyan).

Ha véletlenszerűen kapják a jegyet, akkor mi a valószínűsége annak, hogy Jancsi NEM Juliska mellett ül?

- * Legyen $p \neq 3$ prím. $p^n = 20$ jegyű szám. Mutassuk meg, hogy ebben a 20 jegyű számban $\exists$ olyan számjegy, amely legalább 3-szor előfordul!



- A 0, 2, 5, 7, 9 számokból hány 5 jegyű párosat állíthatok össze úgy, hogy minden jegyet egyszer használjak. Ha véletlenül teszem őket sorrendbe, mi a valószínűsége, hogy páros ötjegyűt kapok?

- Az osztály tanulóihoz jön két új tanuló. Így most már a lehetséges sorrendbe állításuk 1122-szeresére növekedett. Hány tanuló volt kezdetben az osztályban? (Úgy is csináld meg, hogy 2. fokú egyenletet írsz...)

2) Az ismétléses permutáció – minden elemet sorba állítok – lehetnek azonos elemek is
a) Alapok

- Hányféleképp tudod sorbatenni a „pipa” szó betűit, ha minden betű más színű, és csak a színek sorrendje számít?
- Hányféleképp tudod sorbatenni a „pipa” szó betűit, ha csak a „kiolvasás” számít, vagyis a két p betű „azonos”?
- Két ország cserediákjai futóversenyt rendeznek. A kínaiak hatan vannak, a magyarok ketten. Hányféle végeredmény lehet, ha nincs azonos idő, és csak a nemzetiséget nézzük?

b) Az ismétléses permutáció

- Írd föl a LILA szó betűiből összeállítható „lehetséges szavakat” (ha nincs is értelmük). Számold össze őket.

- 5 új ceruzám van: három piros és két kék. Hányféleképp tudom őket egymásmellé tenni, ha csak a színsorrendi különbség a különbség.

- 6 gyereket sorba állítok egymás mögé. Hányféleképpen tehetem meg, ha Péter nem állhat János előtt közvetlenül? Mi a valószínűsége annak, hogyha véletlenszerűen sorba állnak, akkor Péter nem áll János előtt közvetlenül?

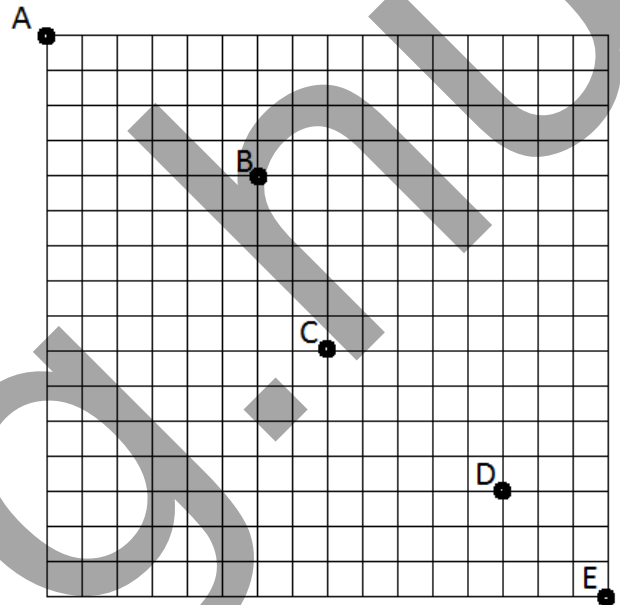
c) Egyéb példák

- Aladár különböző matchbox-okat gyűjt. Azt állítja, hogy ha kapna még két különbözőt (mind különböző lenne), akkor 56-szor többféle sorrendbe tudná őket kitenni az asztalra. Hány kisautója van?



- Hányféle (vagyis hány különböző) 23-mal kezdődő 6 jegyű szám áll elő: 1,2,2,3,3,3 számjegyek maradéktalan felhasználásával?
Mi a valószínűsége, hogyha véletlenül húzom egy urnából ezeket a számokat (cédulákra írva: 2 db. 1-es, 1 db. 2-es és 3 db. 3-as), akkor 23-mal kezdő számot kapok?

- Csak az éleken és csakis jobbra v. lefelé mehetnek. Hányféleképp lehet eljutni
 - A-ból B-be?



- A-ból C-be, ha B-t mindenképp érintem.

- C-ből E-be, hogy D-t ne érintsem?

- Írd föl az a,a,a,b,b összes permutációját úgy, hogy az azonos betűket nem különböztetjük meg. (Először számold ki, hány db. van!)

- Hány különböző számot lehet előállítani az 1;2;2;3;3;3 számjegyek maradéktalan felhasználásával, és mennyi ezek összege?

- Hány különböző számot lehet előállítani a 0;0;1;2;2;3;3;3 számjegyek maradéktalan felhasználásával (0-val nem kezdődhet szám)?

3) Ciklikus permutációk – Arthur király kerek-asztala

- Csenge vacsorára hívta 7 barátját. Hányféleképpen ültetheti le őket a kör alakú asztalhoz, ha Réka Csenge mellett szeretne ülni?
- 4 házaspár hányféleképpen ülhet le egy kör alakú asztalhoz vacsorázni, ha a párok egymás mellett szeretnének ülni, de úgy, hogy egyneműek ne kerüljenek egymás mellé?

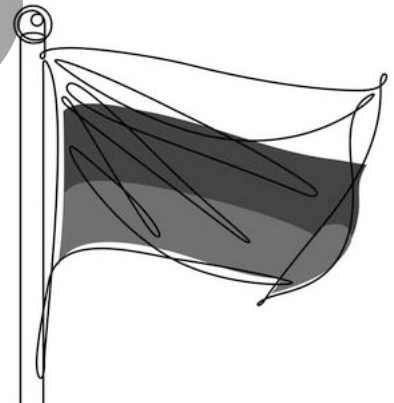
- Máriának van egy 10 különböző színű gyöngyből álló füzére. Hányféleképpen tudja azt felfűzni, hogy nyakéket készítsen belőle. Vigyázat: a gyöngyök gömb alakúak, és forognak a szálon.
- Máriának van egy 4 piros 2 kék és 1 sárga színű gyöngyből álló füzére. Hányféleképpen tudja azt felfűzni, hogy nyakéket készítsen belőle. Vigyázat: a gyöngyök gömb alakúak, és forognak a szálon.

IV. Variáció – számít a sorrend – nem minden elem szerepel

1) Az Ismétlés Nélküli Variáció – egy elem csak egyszer szerepelhet

a) Bevezetés

- Egy - szigorún - háromsávós lobogót készítünk. Öt színünk van: Piros, Fehér, Zöld, Kék, Fekete. Minden sáv más színű. Hányféleképp lehet ilyen készíteni? Ha véletlenszerűn összeállít valaki egy ilyen, akkor mi a valószínűsége, hogy a magyar zászló áll elő?



- Számold ki!

$$\frac{22!}{19!} =$$

$$\frac{18! - 17!}{16!} =$$

- Írd föl kifejtett polinom alakban: $\frac{(n-3)!}{(n-6)!} =$

b) Definíció és tétel

- Hány háromjegyű szám képezhető az 2,4,6,7,8 számjegyekből, ha egy-egy háromjegyűben mindegyik jegy különböző, és mennyi ezek összege?
- Egy urnában 10 db cédula van, 0-tól 9-ig számozva. Visszatevés nélkül kiveszek hármat úgy, hogy a sorrend számít. Ezt hívom „egy húzásnak”
 - Hány különböző 3 jegyű számot húzhatok így?
 - Ha minden húzás után leírom a háromjegyű számot, hányszor kell húznom, hogy legyen köztük biztosan kettő olyan, mely különbségét osztja a 10?

c) Gyakorlás

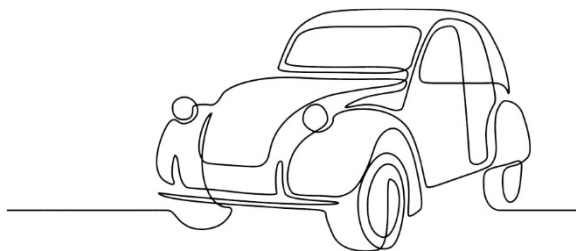
- Hány háromjegyű szám képezhető az 2,4,6,7,8 számjegyekből, ha egy-egy háromjegyűben mindegyik jegy különböző, és mennyi ezek összege?
- Hány db. háromjegyű szám képezhető a 0,3,5,6,9 számjegyekből, és mennyi ezek összege? Ha véletlenül húzok ki hármat (számít a sorrend), akkor milyen valószínűséggel lesz köztük 10-zel osztható háromjegyű szám?
- A $3 \cdot 7^x \cdot 5^2$ számot megszoroztam 11-gyel, és 18-cal nőtt az osztóinak a száma. Mennyi volt az x?



2) Az ismétléses variáció – számít a sorrend – egy elem akárhányszor felhasználható

a) Alap

- Ha magyar rendszámhoz fel lehet használni az angol abc 26 betűjét és mind a 10 számjegyet, akkor hány rendszámot lehet így kiadni? (Lehet olyan rendszám, pl.: NNP-100)



- Írjuk föl az összes olyan négyjegyű számot, amelyet az 5-ös és a 6-os számjegyek felhasználásával lehet leírni. (Előtte érdemes kitalálnod, hány db. van.)

Mi a valószínűsége, hogyha véletlenül leírunk egy ilyen négyjegyű számot, akkor abban pontosan 2 db. 5-ös és 2 db. 6-os van?

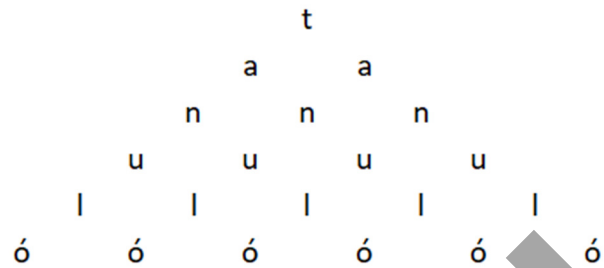
- Miért nem négyzetszám a következő szám:
a) $32!$ b) $18!+72$ c) $* 74!+10\,000\,000$

b) Definíció és tétel

- Egy hét feladatból álló tesztre feladatonként A,B,C-t lehet választani. Hányféleképp lehet megválaszolni a tesztet?

- Hányféleképpen lehet öt tanuló közt szétosztani 10 különböző tárgyat úgy, bárki bárhányat kaphat.
- Hány négyjegyű páros számot lehet felírni a 0, 1, 4 számjegyek fölhasználásával (bármelyiket bárhányszor lehet használni)? Ha véletlenül választok ebből a háromból négyszer (egyet akár többször is), és a választás sorrendjében leírom őket, akkor mi a valószínűsége, hogy egy négyjegyű páros számot kapok?
- András, Béla, Csaba, Dezső, Emil és Ferenc között kisorsolnak három ajándékot: egy könyvet, egy tollat és egy labdát. a) Hányféleképpen lehetséges ez, ha: a) egy gyerek csak egy ajándékot kaphat b) egy gyerek több ajándékot is kaphat. c) Ha egy gyerek több ajándékot is kaphat, akkor mekkora a valószínűsége, hogy András egy ajándékot sem kap?
(Segítség: érdemes az ajándékok sorrendjét rögzíteni, és hozzájuk rendelni egy-egy gyereket.)
- n elem másodosztályú ismétlés nélküli és ismétléses variációinak száma úgy aránylik egymáshoz, mint 10:11. Mekkora az n ?

- Hányféleképp olvasható ki a „TANULÓ” szó, ha balra le, vagy jobbra le léphetünk?
Ha véletlenszerűn lépünk, mi a valószínűsége, hogy a két szélső ó betűre lukadunk ki?



- Mennyi a csupa pt jegyből álló 4 jegyű számok összege, ha a) lehet számjegyismétlődés? b) nem lehet számjegyismétlődés?

- Az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyek (akár többszöri) fölhasználásával hány olyan háromjegyű szám (pl. 224) állítható elő, amelyben az 5 előfordul? Mi a valószínűsége annak, hogyha ezekből a számjegyekből ezen a módon egy olyan háromjegyűt állítunk össze véletlenszerűn, amelyekben van 5-ös?

- Magyar kártya: 4 szín van, színenként 4 szám és négy figura. Hányféleképp lehet sorrendbe tenni a kártyát, ha a) minden különbözőség számít, b) ha csak a színt veszem különbözőnek c) ha a figurás lapokat azonosnak és a számos lapokat is azonosnak veszem.

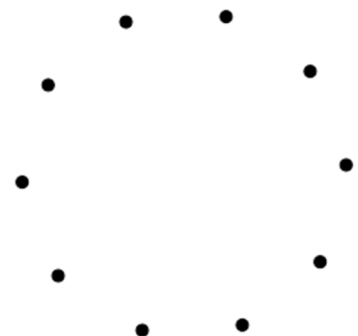
V. Kombináció – nem minden elem szerepel – nem számít a sorrend

1) Ismétlés nélküli kombináció – minden elem különböző – nem minden elem szerepel, nem számít a sorrend

a) Bevezetés

- 10 különböző számból hányféleképp tudok kiválasztani 4 különbözőt
 - úgy, hogy számít a sorrend
 - úgy, hogy nem számít a sorrend (vagyis nem egyesével húzok, hanem „belemarkolok”)
 - úgy, hogy épp növekvő sorrendben vannak

- Van a síkon 10 pont. Egyik három sem kollineáris. Hány különböző $\triangle$ -et határoznak meg?



b) Definíció és tétel

- Mutasd meg, hogy egy 10 fős osztályból ugyanannyiféleképpen lehet kiválasztani egy 3 fős csapatot, mint egy hét fős csapatot!

- Hasonlítsd össze a magyar Lottó (90 számból 5) illetve a belga Lottó (35 számból 7) telitalálatos esélyeit.

- * Mutassuk meg hogy a π ; 2π ; 3π ; ... 10π ; 11π számok között van két olyan, amely végtelen sok tizedesjegyben megegyezik.

c) Gyakorlás

- Ha minden lottót kitöltök, ami lehetséges, hány db. pontosan 3-as találatom lesz? Mi a valószínűsége, hogy pontosan 3-as találatom lesz, ha csak egy lottószelvényt töltök ki?

- Számold ki mennyivel egyenlő:

$$\binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3} =$$

$$\binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} =$$

Jósold meg a végeredményét:

$$\binom{7}{0} + \binom{7}{1} + \binom{7}{2} + \binom{7}{3} + \binom{7}{4} + \binom{7}{5} + \binom{7}{6} + \binom{7}{7} =$$

- Írd föl egyszerűbb alakban (szorzatként):

$$\binom{23}{21} =$$

$$\binom{18}{13} =$$

$$\binom{n+1}{n-2} =$$

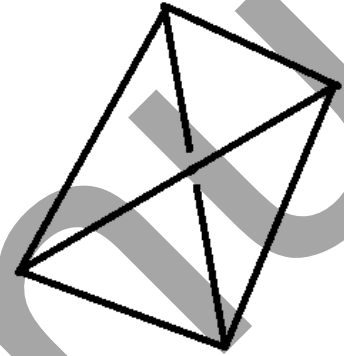
$$\binom{n}{1} =$$

- Egy négy elemű halmaznak hány részhalmaza van? Írjuk föl ezeket!
 $H = \{1; 2; 3; 4\}$

- * 20 egyenes által meghatározott pontok hány új egyenest határoznak meg maximálisan?

- Egy dobozban 10 db. 1-10-ig számozott cédula van. Visszatevés nélkül kihúzunk négyet egymás után és leírjuk a számokat egymás mellé. Hány olyan eset lehetséges, hogy a számok nem csökkenő sorrendben vannak?

- Adott 20 pont a térben úgy, hogy nincs köztük 4 olyan, amelyik komplanáris (egy síkban) lenne. Hány tetraédert (4 csúcsú poliéder – 4 csúcsú, háromszöglapokkal határolt test) határoznak meg összesen?



- Véletlen választás során mi a valószínűbb: az, hogy 8 emberből a 3 legrátermettebb kerül be egy küldöttségbe, vagy 10-ből a 4 legagyalágultabb?

2) Az ismétléses kombináció – a sorrend nem számít - nem minden elem szerepel – egy elem akár többször is

- A „Cukrászda a szalmonellához” nevezetű gyermekmegrontó helyen négyféle elhízást serkentő édességet kapni: Csokoládé bomba, Vaníliás bomba, Puncsos bomba és Koleszterin bomba. (C V P K)

Kázmér a CS haverjainak 15 db-ot vásárol. Hányféle különböző összeállítással tudja mérgezni őket?

- Egy 25 fős osztályban 6 azonos tollat sorsolnak ki. Hányféleképpen történhet a tollak szétosztása, ha egy tanuló a.) csak egy tollat kaphat; b.) több tollat is kaphat?

VI. Egy kis összefoglaló

1) Összefoglaló táblázat – elemi kombinatorika

- Az iskolában rendezett versmondó verseny döntőjébe 10 tanuló került: Béla, Cecília, Erzsébet, Ferenc, Ilona, Jolán, Kálmán, Livia, Mária és Péter. a) Hányféleképpen alakulhat a sorrend a helyezések szempontjából? b) Hány esetben lehet fiú az első helyezett? c) Hányféleképp jöhet ki az első három helyezett?
- Hányféleképpen lehet sorba rakni egy fehér, két zöld és három kék golyót?
- A 0, 1, 2, 3, ..., 9 számokat sorozatba rendezzük. Hány esetben lehet, hogy az 1, 2, 3 számok növekvő sorrendben kerülnek egymás mellé?

2) Vegyes példák

- Határozzuk meg az 1, 2, 2, 3, 3, 3 elemek permutációinak számát. (Hányféleképpen lehet sorba rendezni ezeket, a számokat?) Ezek között hány olyan van, amelyben az első helyen a 2 számjegy áll?
- A 0, 1, 2, 3, ..., 9 számokat sorozatba rendezzük. Hány esetben lehet, hogy az 1, 2, 3 számok növekvő sorrendben legyenek, de nem szükségszerűen egymás mellett?

VII. A binomiális együtthatók, a binomiális tétel, a Pascal-háromszög

1) A szimmetria tulajdonság és két összegtulajdonság

- Számolással és kombinatorikusan is mutasd meg, hogy:
$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

- Számolással és * kombinatorikusan is mutasd meg, hogy:

$$\binom{2}{2}\binom{n}{k-1} + \binom{2}{1}\binom{n}{k} + \binom{2}{0}\binom{n}{k+1} = \binom{n+2}{k+1}$$

- Hányféleképp olvasható ki a táblázatból a BUDAPEST szó, ha csak jobbra v. le léphetünk?

B	U	D	A	P
U	D	A	P	E
D	A	P	E	S
A	P	E	S	T

- Egy kockát hatszor feldobunk. ha kapott számokat egymás mögé leírjuk. Hány különböző 6 jegyű számot kaphatunk így? Hány olyat, melyben minden számjegy egyszer szerepel? Hány olyat, melyek számjegyeinek szorzata páros, és egy számjegy többször is szerepelhet?

2) A binomiális tétel

- Hány átlója van egy konvex hússzögnek?
- Adott a síkon n pont (egyik három sem kollineáris). Ha még 2-őt hozzájuk veszek (továbbra sem lesz kollineáris egyik három sem), akkor 11-gyel több egyenest határoznak meg. $n=?$
- Egy társaságban mindenki mindenkivel kezet fogott. Hányan vannak, ha összesen 136 kézfogás volt?

3) A binomiális együtthatók összege

- Számolással és * kombinatorikusan is mutasd meg, hogy:

$$\binom{3}{3}\binom{n}{k-2} + \binom{3}{2}\binom{n}{k-1} + \binom{3}{1}\binom{n}{k} + \binom{3}{0}\binom{n}{k+1} = \binom{n+3}{k+1}$$

- * Egy 8 fős úszódöntőn 3 magyar versenyző volt (5 nem magyar). Csakis a nemzetiség számít. Hányféleképp alakulhatott a beérkezési sorrend, ha legalább két magyar egymás után ért célba?

4) A binomiális együtthatók és a prímek

- Mutasd meg, hogy $\binom{n-1}{k-1}$ osztható k -val, ha n és k relatív prímek.

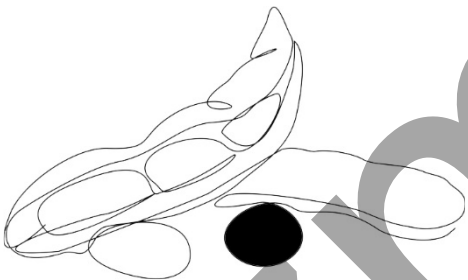
VIII. Összetettebb feladatok, gyakorlás

- Hány olyan hatjegyű szám van, melyben nincs 0 számjegy?
- Hány olyan hatjegyű szám van, amelyben van 1-es számjegy?
- Hány hatjegyű páratlan szám készíthető a 0,1,2 jegyek bárhányszoros felhasználásával?
- Egy kalapban 50 cédula van, rajtuk 1-50-ig 1-1 természetes szám. Hányféleképp lehet kivenni belőle 8-at (sorrend nem számít), ha a) egyiken sincs páratlan b) pontosan négyen van páratlan c) legfeljebb hét kártyán van páratlan szám.
- 10 házaspárt hányféleképpen tudok leültetni egy sorba úgy, hogy a feleségek a férjek mellé kerüljenek: a) jobbról? b) akármelyik oldalról?

- Egy kalapban 5 kártya van, egyikre az 1, másokra a 2, stb. van írva: 1-től 5-ig. Háromszor visszatevéssel véletlenszerűen húzok. (Húzok, visszateszem; húzok, visszateszem, húzok.) Leírom a kapott számot. Mi a valószínűsége annak, hogy a kapott háromjegyű számban legalább egy számjegy kétszer fordul elő?

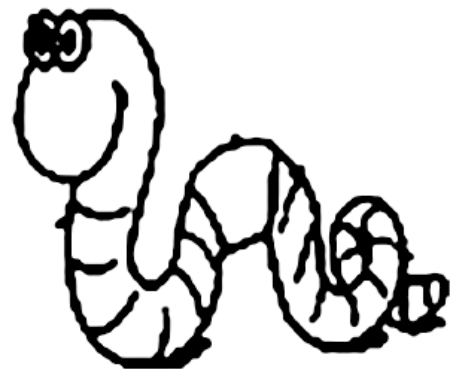
IX. Invariáns feladatok

- Egy vázában 75 fehér és 150 fekete babszem van. A váza mellett vagy egy halom fekete bab. A babszemeket a következőképpen szedegetjük a vázából: találomra kivesszünk két babszemet; ha van köztük fekete, akkor azt kitesszük a halomba, a másikat (akár fehér, akár fekete) visszadobjuk a vázába; ha azonban mindkét babszem fehér, akkor eldobjuk őket, s a halomból egy fekete babszemet dobunk a vázába. Ha már csak egy szem bab van a vázában, akkor mit mondhatunk a színéről?



- Egy háromszög csúcsaiba gyufákat helyeztünk. Egy-egy alkalommal bármelyik csúcsból vehetünk el gyufákat, de a másik két csúcs mindegyikébe kétszer annyit kell helyezni. Kezdetkor az egyik csúcsban 1 szál volt, a többiben egy sem. Elérhető-e, hogy mindegyik csúcsban ugyanannyi gyufa legyen?

- A táblára fel van írva szám: 51 és a 85. Az egyiket megszorozom 7-tel, majd kivonom ebből a másik háromszorosát, és az eredményt felírom a táblára. Majd megint kiválasztok kettő számot a tábláról, és ugyanezt teszem. És így tovább. Elérhető-e, hogy előbb utóbb az 1-est írjam fel a táblára?
- Egy táblára az 1,2,3,...,1988 számokat írtuk fel. Egy-egy alkalommal két számot letörlünk, s helyettük összegük 13-as osztási maradékát írjuk fel. Néhány ilyen törlés-írás után csak egy szám marad a táblán. Mi lehet ez a szám?
- Két kupacban giliszták vannak. Egy-egy alkalommal valamelyik kupacból elveszünk néhány gilisztát, s a másik kupacba kétszer annyit helyezünk. Kezdetben: egyikben 1, a másikban 2 gilisztá volt. Elérhető-e, hogy mindkettőben ugyanannyi legyen?



Számelmélet – Prímek – Diofantikus egyenletek – Polinomok

I. A prímek

- Melyik az a legkisebb természetes szám, amelynek 12 osztója van?
- Ha egy természetes számot megszorozok 2-vel, akkor az osztóinak száma 5-tel növekszik. Melyik ez a legkisebb természetes szám? (Segítség: pl. érdemes megnézni, hogy az eredetiben nincs v. van 2-es prímtényező)
- Mennyi az 540 pozitív osztóinak szorzata?
- Melyik az a természetes szám, mely pozitív osztóinak száma 6, és a szorzatuk 421 875.
- Egy szám prímfelbontása után honnan lehet látni, hogy az a) négyzetszám b) köbszám?

- * Bizonyítsuk be, hogy egy tetszőleges prímet 30-cal osztva a maradék 1 vagy egy prímszám.
- Mutasd meg, hogy az 5-nél nagyobb ikerprímekre igaz, hogy 12 osztja az összegüket. (A hárommal való oszthatósághoz először is nézd meg, hogy egy ikerprím-pár első tagja mennyi maradékot adhat 3-mal osztva...)
- * Mutasd meg, hogyha $n \in \mathbf{N}^+ \Rightarrow \frac{10^{4n-1} + 2}{3} + \frac{10^{3n-3} + 8}{9}$ egész szám.
- Legyen p és q két ikerprím. Mutassuk meg, hogy az összegük fele összetett szám.
- Mutasd meg, hogyha $p \neq 3$ és prím, akkor $2p-1$ és $2p+1$ nem lehet már ikerprím.
- Próbáld meg: Igazoljuk, hogy $1999^{2000} + 24$ összetett szám!
- Hány olyan szám van 1000-ig, amely osztóinak száma páratlan?

II. Az egyértelmű prímfelbontás és következményei

1) A számelmélet alaptétele

Egy $10,8 \text{ m} \times 4,2 \text{ m}$ -es téglalap alakú garázst a lehető legnagyobb méretű, egyforma négyzet alakú járólappal szeretnénk burkolni. Ezek olyan méretben kaphatók, melyek éle deciméterben mérve egész szám. Mekkora-nak válasszuk a járólap méreteit, ha hízagmentesen tudjuk űket lerakni.

2) Egy szám osztói

- * Áll.: $(m;n)=1 \Rightarrow d(nm)=d(n)d(m)$
- * A 210 000-nek hány olyan osztója van, amely nem osztóható 21-gyel?
- Adj meg egy olyan számot, mely osztóinak száma két páratlan szám szorzata!
- Egy pontosan 6 méteres nádszálad van. Ezt és ceruzát használva hogy tudnád lemérni, hogy egy gerenda 13 méteres-e tényleg?

- Áll: $n \in \mathbf{N} \Rightarrow 30 \mid n^5 - n$.

3) Racionális-irracionális számok

- Mutasd meg, hogy $\sqrt{10}$ irrac.
- Határozzuk meg azt a pozitív egész számot, amelynek 6 db. pozitív osztója van, és azok szorzata 91 125.
- Ad példát arra, hogy két irracionális szám szorzata, illetve összege lehet racionális.

4) Az egyértelmű prímfelbontásra, kanonikus alakra épülő feladatok

- Adj meg 3 olyan számot, amelyek páronként nem, de együtt relatív prímek!
- Két relatív prím legkisebb közös többszöröse: $2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 23^5$ a) Írj föl néhány ilyen párt. b) Hány darab ilyen pár van?
- Két relatív prím legkisebb közös többszöröse 6 féle prímtényezőből áll. Hány különböző számpár lehet ez a két relatív prím?

- $x, y \in \mathbf{N}$ $x^2 - y^2 = 2023$. $(x; y) = 17$. Mi lehet ez a két szám?

- $x, y \in \mathbf{N}$ $(x; y) = 13$; $[x; y] = 1989$. $x = ?$ $y = ?$

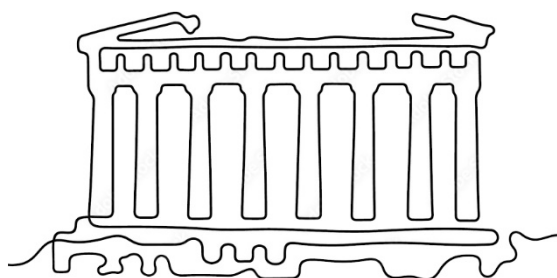
- * $x, y \in \mathbf{N}$ $x + y = 370$; $[x; y] = 270 \cdot (x; y)$. $x = ?$ $y = ?$
(Segítség: $d := (x; y)$ Ekkor $x = k \cdot d$ és $y = m \cdot d$, ahol $(k; m) = 1$. Illetve tudjuk, hogy $\frac{x \cdot y}{(x; y)} = [x; y]$)

- Egy kerékpár nagyobbik fogaskerekén 35 fog, a kisebbiken 15 fog van. Hányszor kell a pedált körbeforgatni, hogy mindkét fogaskerék újra a kiindulási helyzetbe kerüljön vissza?

III. Diofantoszi egyenletek és egyéb számelméleti feladatok

1) Diofantikus feladatok

- $x, y \in \mathbf{N}$ $xy + 2y - 3x - 21 = 0$. Mi lehet x és y .
- Melyik számrendszerben igaz, hogy ha 4616_x -ot elosztjuk 66_x -tal, akkor a hányados 55_x , a maradék pedig 20_x .
- * Mutasd meg, hogy $\nexists x, y \in \mathbf{Z} \rightarrow x^3 + 6x^2 + 5x = 27y^3 + 9y^2 + 9y + 1$ (Segítség: találj olyan prímet, amely osztja az egyik oldalt, de a másikat nem...)
- * Áll.: $\nexists x, y \in \mathbf{Z} \rightarrow 15x^2 - 7y^2 = 9$.



- ** Oldd meg: $5^x - 2^y = 1$ ($x, y \in \mathbf{N}$)

- Oldd meg: $x, y \in \mathbf{N}$, $6xy - 3y + 2x = 64$

2) Egyéb számelméleti feladatok

- * Mutasd meg, hogy $\nexists x, y \in \mathbf{Z} \rightarrow x^2 + y^2 = 1998$.
- * Mutasd meg, hogy bármely számrendszerben igaz, hogy az alapot megelőző szám kétszeresét és négyzetét is ugyanazon számjegyekkel, de fordított sorrendben írjuk. Pl.: 10-es számrendszerben: $9^2 = 81$ $2 \cdot 9 = 18$, vagy 12-es számrendszerben: $B^2 = A1$ és $2 \cdot B = 1A$
- Mely n egészekre – mivel lehet egyszerűsíteni a következő törtet:

$$\frac{3n+5}{19n+2}$$

$$\frac{2n^2+5}{n-3}$$

- Állítás: az $\overline{abcd}$ és a $\overline{dcba}$ összegének négyzetét osztja a 121.

IV. Polinomok

- $6x^4 - 5x^3 - 37x^2 - 11x + 15$

Mutasd meg, hogy ennek a polinomnak gyöke a: -1 , 3 , $1/2$ és még egy negyedik szám.

Ezek alapján oszd el a polinomot először $(x+1)$ -gyel, majd a hányadost $(2x-1)$ -gyel, utána pedig a hányadost $(x-3)$ -mal!

- $6x^4 + 37x^3 + 17x^2 - 85x + 25$

Mutasd meg, hogy ennek a polinomnak két gyökei: $1/3$ és -5

Ezek alapján alakítsd szorzattá a polinomot!

Halmazelmélet – Műveletek halmazokkal

I. Hatványhalmaz

1) A hatványhalmaz léte axióma

Írd föl a $H=\{1;2;3\}$ hatványhalmazának összes elemét.

2) Halmaz részhalmazainak száma – vagyis a hatványhalmaz számossága

- Egy H halmaznak ugyanannyi 10 elemű részhalmaza van, ahány 7 elemű. Hány eleme van a H halmaznak?
- Legalább hány elemű az a halmaz, amelynek legalább ezerrel több részhalmaza van, mint ahány eleme.
- Hányszor annyi 3 elemű részhalmaza van egy 10 elemű halmaznak, mint ahány 2 elemű?
- Hány olyan részhalmaza van az $A=\{a,b,c,d,e\}$ halmaznak, amelynek a b és a c közül legalább az egyik eleme?

II. Halmazműveletek (Ha nincs ábra – segíts magadon...)

1) Halmazok Uniója – a „vagy” művelet: $p \vee q$

- Mely esetben igaz: $|A \cup B| = |A|$ (Ha nincs ábra – segíts magadon...)
- Lehet-e: $|A \cup B| < |A|$
- Mely esetben igaz: $|A \cup B| = |A| + |B|$ (Ha nincs ábra – segíts magadon...)

2) Halmazok Metszete – az „és” művelet: $p \wedge q$

- $A = \{\text{pozitív prímek}\}$ $B = \{100\text{-nál kisebb természetesek, melyek számjegyeinek összege } 7\}$ Add meg az $A \cap B$ elemeit!
- Mutasd meg: $A \cup B = A \cap B \Rightarrow A = B$ (Segítség: Biz.: indirekt!)

Írd fel az $A = \{1; 2; 3\}$ valódi részhalmazait!

3) Tulajdonságok, összefüggések

Legyen $A = \text{téglalapok}$, $B = \text{rombuszok}$, $C = \text{paralelogrammák}$ $D = \text{négyzetek}$. Melyik igaz, melyik hamis:

a) $A \subseteq B$

b) $B \subseteq A$

c) $B \subseteq C$

d) $A \subseteq B$

e) $D \subseteq B$.

Melyik az, amelyik mindegyiknek részhalmaza?

Ha nem nézzük az oldalak méretét, akkor van-e, amelyik véges elemszámú lenne?

4) Halmazok Különbsége

- Bizonyítsd be: $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$ illetve: $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$ (Ha nincs ábra...)

- Adott $A = \{10; 20; 30\}$ Kell olyan B , C és D , hogy $A \cup B = \{10; 20; 30; 40; 50\}$. $A \cap C = \{20\}$ és $A \setminus D = \emptyset$. Hány db. ilyen B halmaz van?

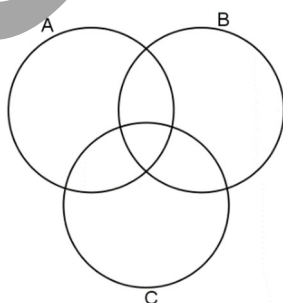
- Áll: $A \cap C = B \cap C$ és $A \setminus C = B \setminus C \Rightarrow A = B$ (Ha nincs ábra – segíts magadon...)

- Mely A és B -re igaz: $A \setminus B = B \setminus A$ (Ha nincs ábra – segíts magadon...)

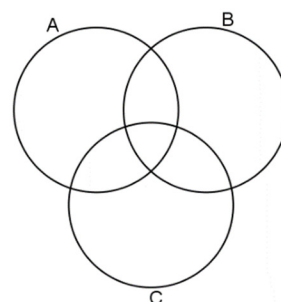
5) Szimmetrikus differencia – a „kizáró vagy” művelet: $p \oplus q$

- Adott három halmaz: $A = \{a; d; e; g\}$, $B = \{b; d; f; g\}$ és $C = \{c; e; f; g\}$
Add meg a következő halmazokat elemeik felsorolásával és satírozással!

$A \cap B =$

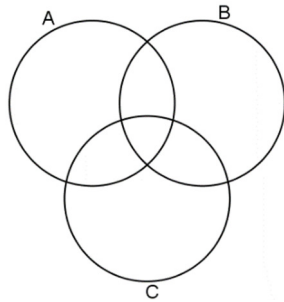


$A \cap C =$

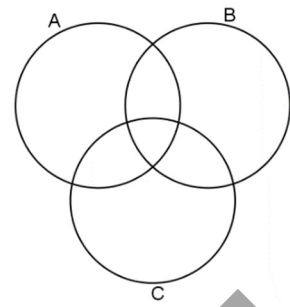


$A=\{a;d;e;g\}$, $B=\{b;d;f;g\}$ és $C=\{c;e;f;g\}$

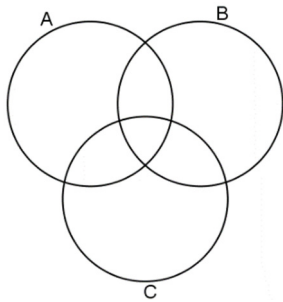
$A \cap B \cap C =$



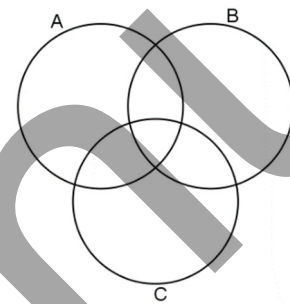
$A \cup C =$



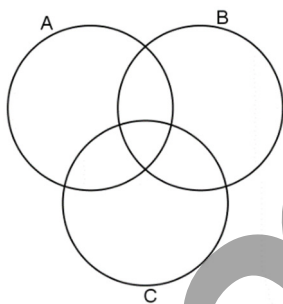
$A \setminus B =$



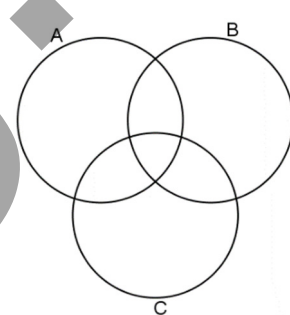
$A \setminus (B \cap C) =$



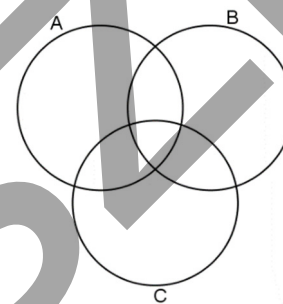
$(A \cup B \cup C) \setminus (A \cap C) =$



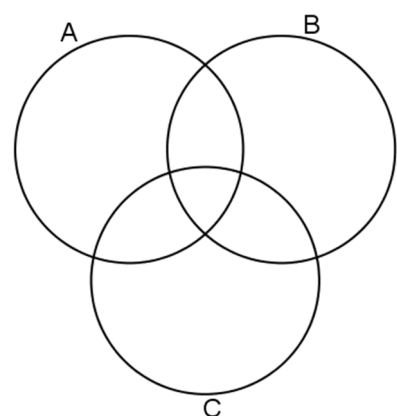
$A \Delta B =$



$A \Delta (B \cup C) =$



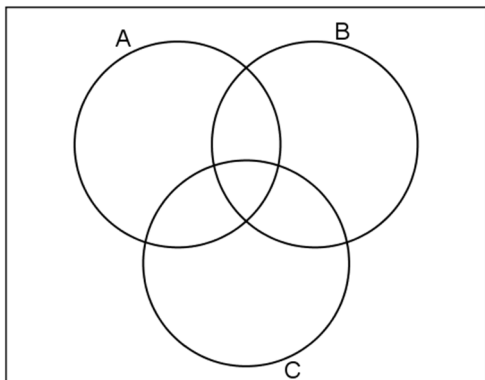
- * All.: $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$



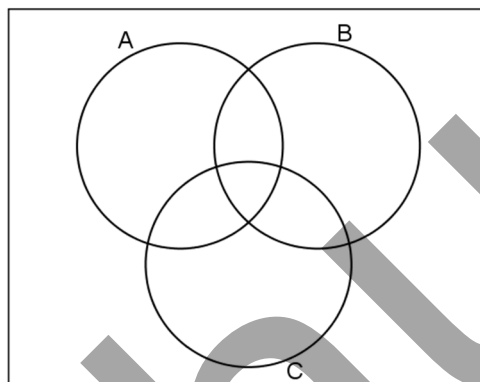
6) A Komplementer halmaz – „Tagadás”

- Adott a kétjegyű számok H halmaza és ebben: $A=\{\text{hárommal oszthatók}\}$; $B=\{\text{négyvel oszthatók}\}$ és $C=\{\text{ötten oszthatók}\}$. Írj be számokat! Alaphalmaz: $\mathbf{N}$. Fogalmazd meg oszthatósággal, LNKO-val vagy LKKT-vel, hogy mivel egyenlő:

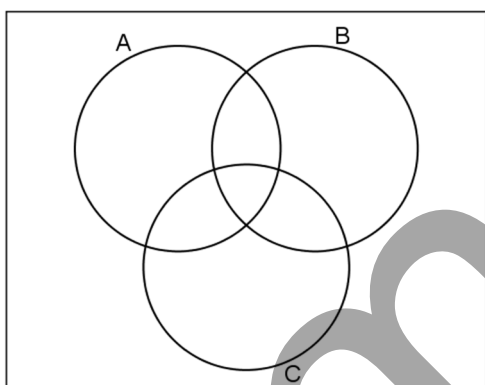
$$A \cap B =$$



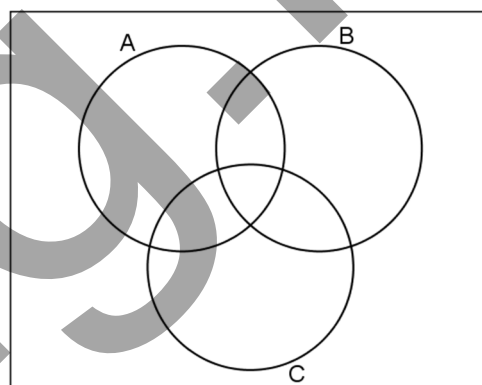
$$B \cap C =$$



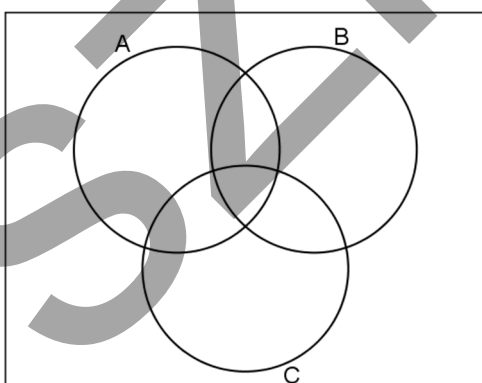
$$A \cap C =$$



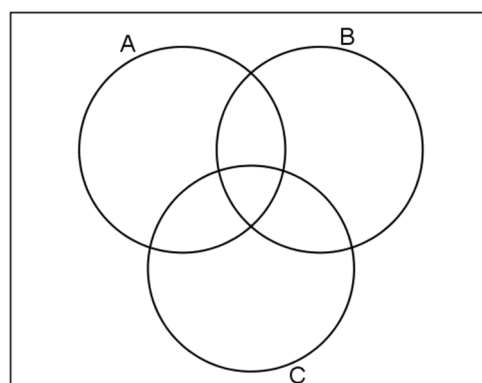
$$A \cap B \cap C =$$



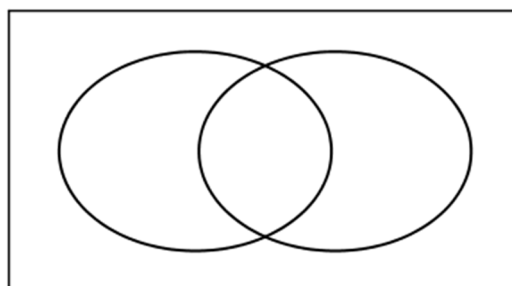
$$\overline{A \cup B \cup C}_H =$$



$$C \setminus (\overline{A \cup B}) =$$



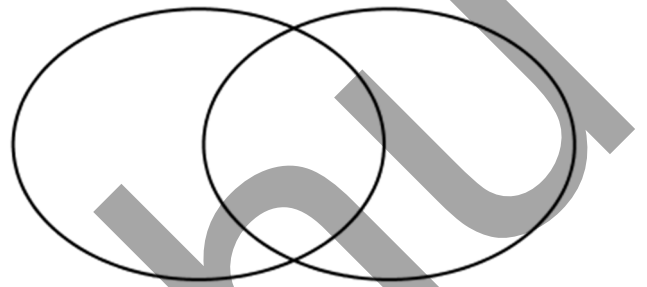
- Igazoljuk, hogy $A \subseteq B \Rightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$



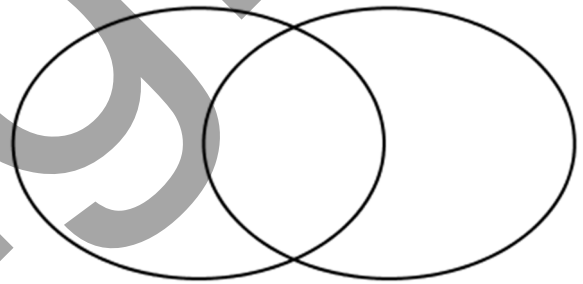
7) A Descartes szorzat

- $A=B=\{0;2;5\}$ Add meg az $A \times B$ halmazt.

- $A=\{2;5;10;11\}$ $B=\{3;5;11;14;15\}$ Hány elemű az $A \times B$, az $A \times A$ és a $B \times B$ és $B \times A$ halmaz? Add meg az $(A \times A) \cap (B \times B)$ -t.



- $A=\{0;1;2;3\}$ $B=\{0;1;2;4\}$. Hány közös eleme van az $A \times B$ és a $B \times A$ -nak?



- $H=\{1;2;...;10;11;12\}$ $A=\{1;3;5;6;8\}$ $B=\{1;2;4;6;9;10\}$

$$\overline{A}_H =$$

$$\overline{B}_H =$$

$$\overline{A}_H \cup \overline{B}_H =$$

$$A \cup \overline{B}_H =$$

$$\overline{A}_H \cap \overline{B}_H =$$

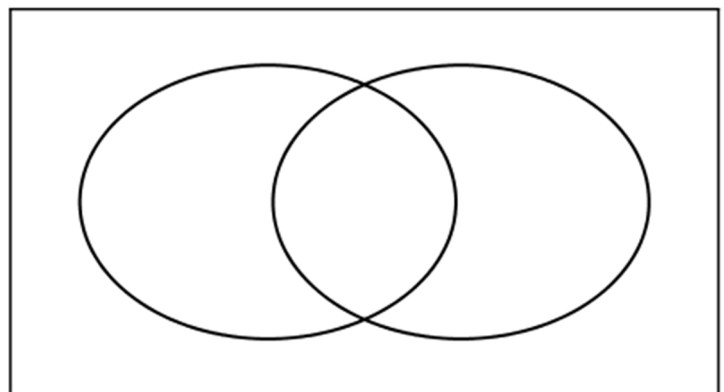
$$\overline{A}_H \cap B =$$

$$A \setminus B =$$

$$B \setminus \overline{A}_H =$$

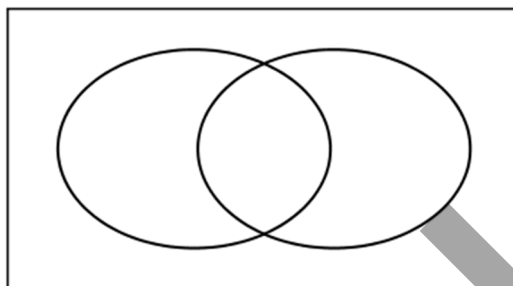
$$\overline{A \cap B}_H =$$

$$\overline{A \cup B}_H =$$

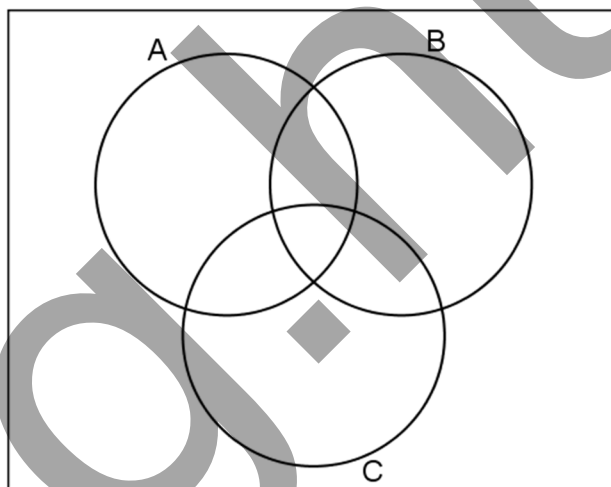


III. A Logikai szita – Halmazok uniójának számossága

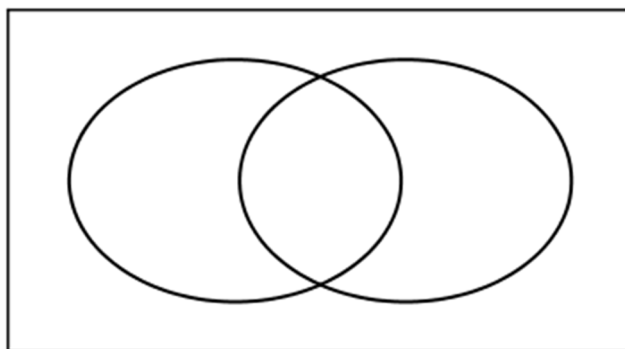
- Egy intézetben 80 ember dolgozik. 47 dolgozó beszél angolul, 35 németül és 23-an beszélnek mind a két nyelvet. Hányan nem beszélnek egyik nyelvet sem?



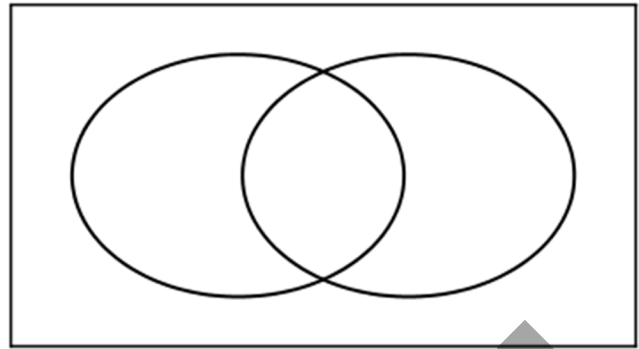
- A kétjegyű természetes számok közül hány osztható pontosan 2-vel a következő számok közül: 2; 3 és 5



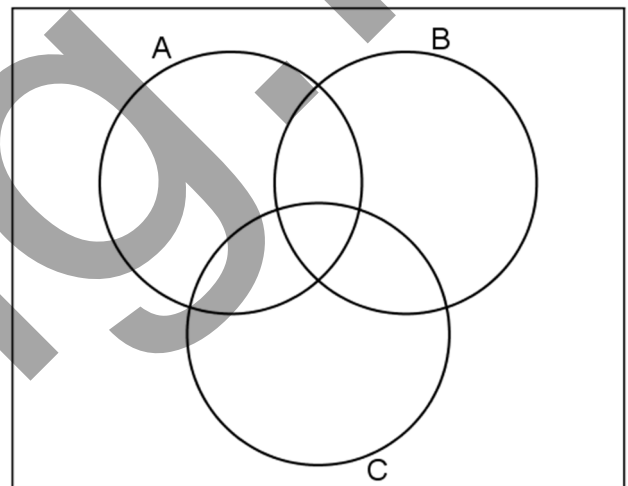
- Hány olyan 3 jegyű szám van, amely osztható 2-vel vagy 7-tel? (nem kizáró vagy)



- Hány darab olyan kétjegyű pozitív egész szám van, amely nem osztható sem 5-tel, sem 6-tal?

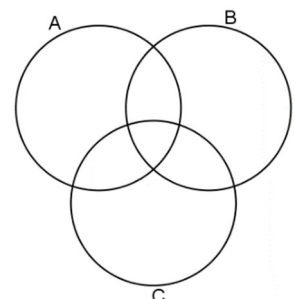


- Egy osztály 32 tanulója közül 16-an tanulnak angolul, 13-an franciául, 13-an németül. Az említett nyelvek közül 5-en németül és franciául is, 7-en németül és angolul is, 6-an angolul és franciául is tanulnak. Négyen mindhárom nyelvet tanulják. Hányan nem tanulják az említett nyelvek egyikét sem?

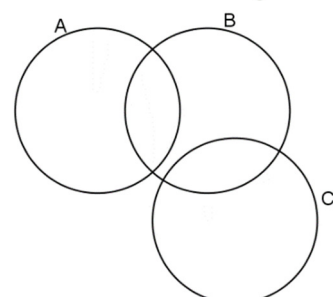


IV. Vegyes gyakorló példák

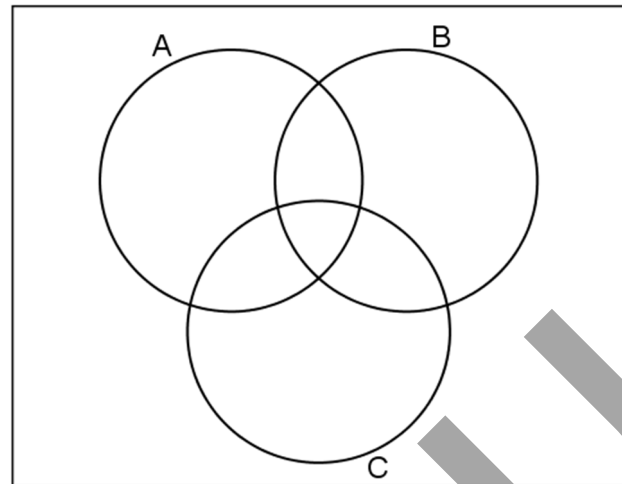
- Áll.: $A \cap C = B \cap C$ és $A \cup C = B \cup C \Rightarrow A = B$



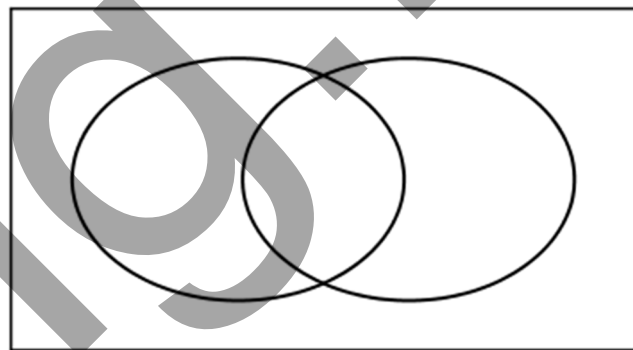
- Áll: $A \cap C = \emptyset \Rightarrow A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$



- * Az egymilliónál nem nagyobb egészek között hány olyan van, amely a 2;3;5 számok közül pontosan 2-vel osztható.



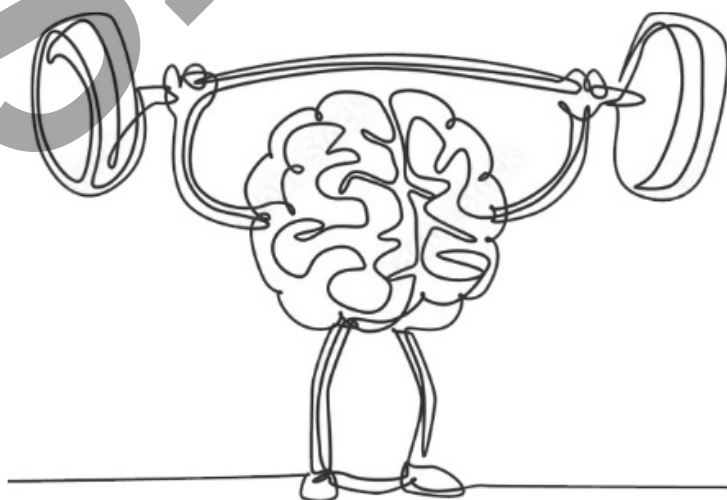
- Határozzuk meg a H alaphalmazt, illetve A és B részhalmazát, ha az alábbiakat tudjuk róluk: $A \cap B = \{e; g\}$ $\overline{A \cup B}_H = \{d; f\}$; $A \setminus B = \{a; b\}$; $\overline{A}_H = \{c; d; f\}$



- A=2-vel osztható kétjegyűek, B=3-mal osztható kétjegyűek, C=6-tal osztható kétjegyűek. Kell: $|A \setminus B|$ illetve $|A \setminus C|$, $|A \cup B|$

V. Egyéb gyakorló példák

- $|A \times B| = 100$. Mennyi az $|A \cap B|$ és az $|A \cup B|$ minimuma illetve maximuma?
- Egy konyhaszekrénybe háromféle műanyag tároló doboz van: Csak a fagyasztást tűri, Csak a mikrohullámút tűri, Mindkettőt tűri. Mindből legalább 2 db. van. Tudjuk, hogy 8 tűri a fagyasztó, 7 tűri a sütőt. Legalább és legfeljebb hány doboz van a szekrényben?
- $A = \{a; b; c; d\}$; $A \cup B = A$; $A \cap B = B$. Mi lehet a B halmaz?
- $A \cap C = B \cap C$ és $A \cup C = B \cup C$. Mutasd meg, $A = B$! (Pl.: indirekt bizonyítással, vagy halmazműveletekkel)
- $A \cup C = B \cup C$ és $C \setminus A = C \setminus B$. Mutasd meg, $A = B$! (Pl.: indirekt bizonyítással, vagy halmazműveletekkel)
- $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ $A \cap B = \{3; 5\}$, $A \setminus B = \{1\}$ $B \setminus A = \{2; 4\}$ Határozd meg az A és a B halmazt!
- Egy osztály létszáma 32. Angolul és Spanyolul tanulhatnak, mindenki legalább egy nyelvet. Mindkettőt 9-en tanulják. Mutasd meg, hogy az Angolul tanulók és a Spanyolul tanulók száma nem lehet egyenlő.
- Egy 28 fős osztályból 8-an érettségiznek Fizikából és 6-an Kémiából. Mindkettőből 4-en. Hányan nem érettségiznek az egyik tárgyból sem?



Gráfelmélet

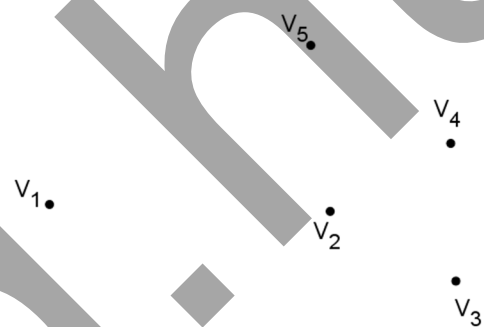
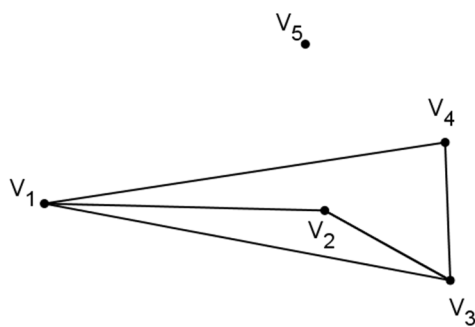
I. Definíciók – fogalmak

1) Gráf

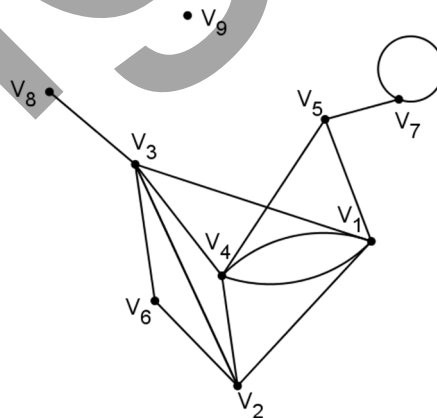
Rajzolj egy 5 csúcsú gráfot, melyben van izolált pont, hurok és, párhuzamos él!

2) Fogalmak

- Adott egy 5 csúcsú gráf. Egészítsd ki teljes gráffá, majd rajzold föl mellé a komplementerét!



- Írd föl a csúcsokhoz a fokszámokat!



- Rajzolj egy 4 csúcsú egyszerű gráfot, 3; 2; 2; 1 éllel.

- Rajzolj egy olyan egyszerű, öt csúcspontú gráfot, amelyben a pontok fokszáma 4; 3; 3; 2; 2.

- Öt farmot úttal kötnék össze. Négy utat készíthetnek, egy út két farm között van. Kettő már kész. Rajzolj be úgy utat, hogy mindegyik farmból mindegyikbe el lehessen jutni! Van-e különbség a lehetőségek közt?

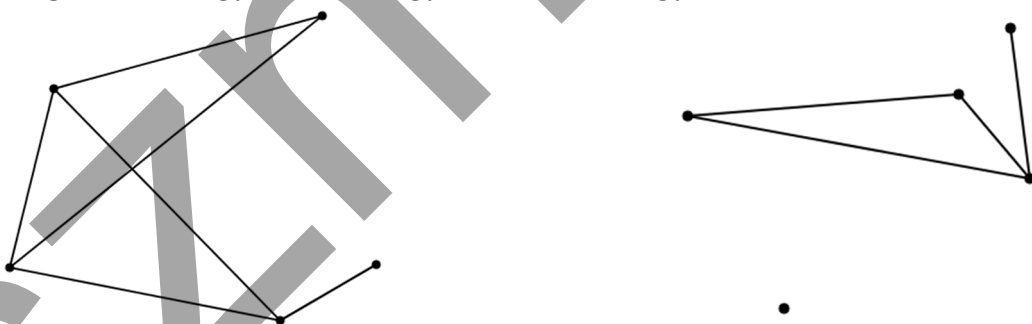


- Egy négytagú csoportban minden tagnak pontosan két ismerőse van a csoport tagjai között. Szemléltesd gráffal egy ilyen ismeretségi rendszert! (Az ismeretség kölcsönös.)

II. Gráfok tulajdonságai

1) Izomorfia

- Adott egy egyszerű gráf. Nevezd el a pontokat, majd a másikat ügyesen elnevezve egészítsd ki úgy éllekké, hogy vele izomorf legyen!

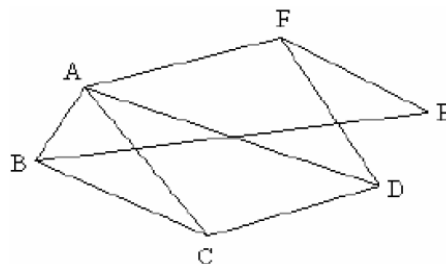


- Rajzold fel az összes olyan 6 pontú gráfot – izomorfia erejéig – amelynek 3 éle van!

2) Élszámok, foks számok

- Egy baráti társaság minden tagja írt röviden telefonon beszélt egymással. Így mindenki 10 telefonbeszélgetésben vett részt. Hány telefonbeszélgetés volt összesen?
- Számold ki a 7 csúcsú teljes gráf éleinek számát, majd az n csúcsúét!
- Áron szerint egy társaságban 15-en 24 emberrel fogtak kezét, 14-en 23-mal és 11-en 21-gyel. Miért nem lehetséges ez?
- Rajzolj egy 10 pontú gráfot, melynek foksámsorozata $(1,1,1,1,1,2,2,3,3)$?

- Az iskolák közötti labdarúgó bajnokságra jelentkezett 6 csapat között lejátszott mérkőzéseket szemlélteti a 2. ábra. Hány mérkőzés van még hátra, ha minden csapat minden csapattal egy mérkőzést játszik a bajnokságban?



- Vasárnap este öt barát sakkipartikat rendezett. (bármely kétfő legfeljebb egy partit játszott egymással). Másnap megbeszélték, hogy ki hány partit játszott (ötük közül). Rajzold fel és írd le, hogy hány parti zajlott vasárnap, ha
a) Aladár 4, Béla 1, Csaba 3, Dezső és Elek 2-2 partit játszott;
b) Aladár 3, Béla 1, Csaba, Dezső és Elek 2-2-2 partit játszott.

3) Komplementer gráfok

- Izomorfia erejéig hány olyan 10 pontú egyszerű gráf van, melyben 43 él van?

- Rajzold föl az összes 4 pontot tartalmazó egyszerű gráfot (érdekes komplementer páronként!)

4) A gráf bejárása

- Bizonyítsd be, hogyha egy egyszerű gráfban minden pont foka legalább kettő, akkor van a gráfban kör.



- 5 falut utak kötnék össze az ábrán látható módon.

- V_5 -ből V_3 -ba hányféle módon lehet eljutni, ha egy úton csak egyszer járhatunk?

- V_2 -ből V_5 -be hányféle módon lehet eljutni, ha egy úton csak egyszer járhatunk?

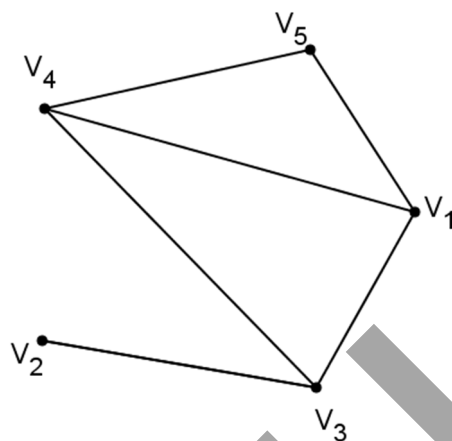
- Maximum hány utat lehet lezárni, hogy még mindegyikből mindegyikbe el lehessen jutni?

- Adj meg egy olyan lezárást, hogy egy falu teljesen magára maradjon.

- Adj meg két lezárást, hogy azzal egy falu teljesen magára maradjon.

- Adj meg két olyan lezárást, egy falu se maradjon teljesen magára, de mégse lehessen bármelyikből bármelyikbe eljutni!

- Miért nem lehet összefüggő az a 10 pontú gráf, melynek fokszámsorozata $(1,1,1,1,1,1,2,2,3,3)$?



III. Gyakorlás

- Aladár vegyületeket rajzolt.
7 Hidrogént (1 vegyérték), 2 Oxigént (2 vegyérték) és 3 szénatomot (4 vegyérték) használt fel úgy, hogy nem volt, csak egyszeres kötés. Mutasd meg, hogy hibázott!

Rájött, hogy még kell egy Hidrogén. Hány kovalens kötést kell rajzolni így? A válasz után rajzold fel a molekulát!

- A DÖK elnöksége 7 főből áll. A hetenkénti tanácskozás előtt néhányan kezet fogtak, néhányan nem. A DÖK tanárösszekötője hetente feljegyezte minden diáknál, hány másikkal fogott kezet. Mikor tévedett biztosan és miért?

○ 3; 4; 6; 7; 6, 2; 2

○ 6; 2; 1; 6; 3, 4; 4

○ 6; 5; 4; 4; 3, 3; 2

○ 2; 2; 2; 2; 2, 2; 2

○ 4; 6; 6; 6; 2, 2; 2